

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Φωκίτη Εμμανουήλ

Πρόχειρες Σημειώσεις Κυματικής

Αναθεωρήθηκαν 28, Οκτ.2006

1

Πρόλογος

Στις σημειώσεις αυτές καλύπτεται ένα τμήμα ,στην πραγματικότητα περίληψη, της ύλης που διδάσκεται στα πλαίσια του μαθήματος Κυματική του δεύτερου τμήματος ΣΕΜΦΕ του ΕΜΠ. Ο διδάσκων εδώ δίνει έμφαση στα θέματα που έχουν σημασία για τις εφαρμογές και για το υπόβαθρο που απαιτείται αν ο φοιτητής (τρια) θελήσει να εφαρμόσει τις έννοιες αυτές της Φυσικής σε άλλους επιστημονικούς τεχνολογικούς κλάδους. Γίνεται κάποια προσπάθεια να παρουσιασθεί το μάθημα με τέτοιο τρόπο ώστε να αναδεικνύεται η σύνδεση μεταξύ των διαφόρων εννοιών. Τέλος υπάρχουν αρκετές βιβλιογραφικές αναφορές, συμβατικές όσο και από το διαδίκτυο, καθώς επίσης και αρκετές ασκήσεις. Ελπίζεται η προσπάθεια αυτή να είναι χρήσιμη σαν ένα συμπληρωματικό βοήθημα του μαθήματος αυτού. Επειδή αυτή είναι ακόμα μία συνεχιζόμενη προσπάθεια, τα σχόλια και υποδείξεις από τους αναγνώστες θα είναι ιδιαίτερα πολύτιμα για τη βελτίωση των σημειώσεων αυτών.

Θα γίνει μία προσπάθεια να μπορέσουμε να ανιχνεύσουμε τις επεκτάσεις της Κυματικής σε άλλα μαθήματα αλλά και σε φαινόμενα της καθημερινότητας.

Μαθήματα που μπορούν να επωφεληθούν από τις γνώσεις που αποκτάμε στη Φυσική III είναι :

- Διάφορα μαθήματα των μαθηματικών όπως Διαφορικές Εξισώσεις, Διανυσματικός Λογισμός, Θεωρία Πιθανοτήτων κα.
- Από τη Φυσική:

Lasers, Κβαντομηχανική I και II, Ατομική και Μοριακή Φυσική, Πυρηνική Φυσική και Στοιχειώδη Σωματίδια, Βιοφυσική και αρκετά άλλα που διδάσκονται σε άλλα τμήματα του ΕΜΠ όπως Μικροκύματα, Βιοιατρική Τεχνολογία , Τηλεπικοινωνίες κá

Στρατηγική για την προετοιμασία φοιτητών κατά τη διάρκεια του εξαμήνου

Στο μάθημα αυτό, κατ' αρχήν φιλοδοξούμε να εξηγήσουμε στους φοιτητές τη σπουδαιότητα των θεμάτων που αναπτύσσονται τόσο για την Επιστήμη της Φυσικής όσο και για ενδεχόμενες προεκτάσεις στην Τεχνολογία. Παράλληλα, όσο και αν φαίνεται *τολμηρό*, υπάρχουν πολλές παιδαγωγικές, φιλοσοφικές και ιστορικές απόψεις και διαστάσεις γύρω από τα θέματα που αναπτύσσονται. Για τα σημεία αυτά, είναι ενδιαφέρον να υπάρξει κάποιου είδους ενασχόληση, η οποία ωστόσο αποτελεί αρμοδιότητα μαθημάτων του Τομέα των Ανθρωπιστικών Επιστημών.

Για την προετοιμασία, λοιπόν, εκ μέρους του φοιτητή μία καλή τακτική είναι να αναλάβει να παρουσιάσει το αποτέλεσμα μιάς εργασίας του πάνω σε θέματα σχετικά με το μάθημα της *Κυματικής*. Ο ορισμός της εργασίας για την περίοδο 2002-2005 αφορούσε την ενασχόληση κυρίως με βιβλιογραφική αναζήτηση μέσω του διαδικτύου και κατάλληλη σύνθεση ώστε να παρουσιασθεί η εργασία σε ένα διαθέσιμο χρόνο που εκυμένετο από 15 ως 20 λεπτά της ώρας.

Φέτος, για πρώτη φορά προτείνεται (εναλλακτικά) ο φοιτητής, η φοιτήτρια ή ομάδα 2 φοιτητών, να κάνει μία πραγματική εργασία Φυσικής γύρω από τις ακόλουθες κατευθύνσεις :

- a) Διενέργεια ενός ενδιαφέροντος πειράματος, λήψη μετρήσεων, ανάλυση και παρουσίαση των τελικών αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων. Το πείραμα μπορεί να γίνεται σε ερευνητικό κέντρο ή ινστιτούτο στην Ελλάδα ή και σε άλλο του εξωτερικού, όπου τα αποτελέσματα μπορεί να μεταφέρονται μέσω του διαδικτύου.
- b) Διενέργεια μιάς θεωρητικής ανάλυσης που να σχετίζεται με το μάθημα της Κυματικής ή της Κυματομηχανικής, μολονότι το τελευταίο δεν προλαβαίνουμε να το καλύψουμε στην κανονική διάρκεια του εξαμήνου. Στην τελευταία περίπτωση, τέτοιου είδους θέμα μπορεί να δοθεί μόνο σε φοιτητή/τρια που δίνει το μάθημα για δεύτερη φορά, κα' έτσι έχει παρακολουθήσει Κυματομηχανική.

Και στις δύο ως άνω περιπτώσεις, είναι ευθύνη του διδάσκοντα να διασφαλίσει ότι η απαιτούμενη ελάχιστη εργασία για την αντιμετώπιση εκάστου προτεινόμενου θέματος είναι "λογική" ώστε η εργασία να μπορεί να ολοκληρωθεί με ένα κλάσμα του χρόνου που απαιτείται για να επιτύχει κάποιος στο μάθημα (δηλαδή, να ασχοληθεί ο φοιτητής κατά τα 10-20% του μέσου χρόνου που απαιτείται για να περάσει το μάθημα).

Η συμμετοχή της εργασίας στην τελική βαθμολογία είναι προσθετική κατά ένα ποσοστό που φτάνει στις 15 μονάδες με άριστα το 100. Ωστόσο, για να πάρει ο φοιτητής (τρια) προβιβάσιμο βαθμό, πρέπει να γράψει στο τελικό διαγώνισμα άνω των 35 μονάδων.

Θα δοθούν επίσης, πέντε σειρές ασκήσεων προς επίλυση. Η συμμετοχή των φοιτητών θα ανταμείβεται με 15 επιπλέον μονάδες αν γράψουν άριστα όλες τις σειρές ασκήσεων. Ένας φοιτητής που θα συγκεντρώσει πάνω από 25 μονάδες από τις δύο ως άνω δραστηριότητες, θα πρέπει οπωσδήποτε να γράψει άνω των 30 μονάδων για να περάσει το μάθημα.

Πέρυσι, μετά την προθεσμία παράδοσης των ασκήσεων, αυτές διδασκόντουσαν και στο μάθημα (η τουλάχιστον ένα μεγάλο ποσοστό αυτών). Θα γίνει προσπάθεια να επαναληφθεί τούτο και φέτος.

Βιβλιογραφία

1. **Κυματική, Τομ. ΙΙΙ , Berkeley**
2. **Vibrations and Waves, A. P. French, The MIT Introductory Physics Series
NORTON**
3. **Κυματική Κβαντική και Στατιστική Φυσική**
Παραδείγματα και Προβλήματα
Σ. Βλασσόπουλος, Η. Κατσούφης, Γ. Τικτόπουλος, Τ. Φίλιππας, Εκδοση ΕΜΠ
4. **Orfanides : www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa**

V1- 10-10-04

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 2005-2006

Το μάθημα περιέχει γνώσεις τόσο για την επιστήμη του μαθηματικού, όσο και για αυτή του φυσικού αλλά ακόμη και για του φιλοσόφου και του τεχνολόγου.

Η προσέγγιση για την κατανόηση του μαθήματος, θα έχει επίκεντρο τη συμμετοχή του φοιτητή και της φοιτήτριας.

- Για όσους το χρωστάνε, συνιστάται μία ορισμένου βαθμού παρακολούθηση. Αυτή μπορεί να έγκειται και σε 10 ως 20 δίωρα αντί των περίπου 30 που είναι προγραμματισμένα για το μάθημα αυτό.

3

Η παρακολούθηση του σπουδαστή πρέπει να συνοδεύεται με ενεργό συμμετοχή. Αυτή διευκολύνεται με τη σύγχρονη τεχνολογία του διαδικτύου. Π.χ ψάξτε στο Google ή στο www.sciencedirect.com για λέξεις ή συνδυασμούς λέξεων όπως: *Problem sets in waves* ή *waves notes*, αλλά μπορείτε και να βάλετε Ελληνικές σχετικές λέξεις (στο Google). Τα αποτελέσματα μπορεί να είναι αρκετά χρήσιμα.

Παραθέτουμε τώρα μία αναλυτική περιγραφή του περιεχομένου του μαθήματος.

- Θα κυκλοφορήσω ένα χαρτί, όπου όσοι θέλουν μπορούν να γράψουν το e mail των ώστε να μπορούν να δέχονται έκτακτες ανακοινώσεις του διδάσκοντα σχετικές με το μάθημα. Διαφορετικά, μπορείτε να κάνετε τούτο στέλνοντας μου ανάλογο μήνυμα στο : fokitis@central.ntua.gr.

-

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο μάθημα αυτό θα θέλαμε να προκαλέσουμε ευθύς εξαρχής την ευρύτητα των φαινομένων που βρίσκουν ικανοποιητική ερμηνεία με τους νόμους της Κυματικής. Στην πληθώρα των φαινομένων αυτών περιλαμβάνονται και μερικά όπως: “Acoustic and magnetic waves που φαίνεται να είναι responsible for the heating of the solar atmosphere.” Τα φαινόμενα αυτά έγιναν αντιληπτά από την ανθρώπινη περιέργεια των πειραματικών και θεωρητικών ερευνητών. Ωστόσο, υπάρχουν πολλά άλλα φαινόμενα που αποτελούν τμήμα της καθημερινότητας. Σε αυτά τα τελευταία θα δώσουμε την έμφαση μας στα παραδείγματα που θα επιλέξουμε ενώ τα πρώτα φαινόμενα θα τα παρουσιάσουμε επί τροχάδην δίνοντας όμως και βιβλιογραφικές αναφορές για τους ενδιαφερόμενους αναγνώστες. Υπάρχουν και άλλα παραδείγματα ταλαντώσεων και κυμάτων τόσο σε βιολογικά συστήματα όπως και σε θέματα τέχνης (μουσική) τα οποία είναι αρκετά ελκυστικά. Για το λόγο αυτό, θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε αρκετά εξ αυτών.

4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Οι απλούστερες εισαγωγικές έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε είναι εκείνες των περιοδικών φαινομένων και των ταλαντώσεων. Τις τελευταίες τις έχετε ήδη συναντήσει στο μάθημα της Μηχανικής. Εδώ θα τις παρακολουθήσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια.

Πρέπει να προσθέσουμε πως στα φαινόμενα αυτά περιλαμβάνονται και ταλαντώσεις σε ζώντες οργανισμούς (ανθρώπινη καρδιά κλπ), χρήση ηχητικών κυμάτων στις νυχτερίδες κλπ.

Οι ταλαντώσεις, όπως θα δούμε, είναι οι γενεσιουργές αιτίες των κυμάτων αλλά, για λόγους παιδαγωγικούς, διδάσκονται στην αρχή ανεξάρτητα από τα κύματα.

Μία ταλάντωση, αφορά την μεταβολή, μέσα στο χρόνο, ενός φυσικού μεγέθους y γύρω από μία μέση τιμή. Η μέγιστη απομάκρυνση του μεγέθους είναι πεπερασμένη και επομένως το διάστημα τιμών του y κυμαίνεται στο διάστημα $[y_{min}, y_{max}]$.

Στις ταλαντώσεις περιλαμβάνεται και μία αρκετά ειδική κατηγορία, γνωστή ως η απλή αρμονική ταλάντωση, που αναφέρεται σε μία μορφή χρονικής εξάρτησης ενός φυσικού μεγέθους, της μορφής

$$y=y_0 \sin (\omega t+\phi) \quad (1)$$

Ποια είναι η διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί η κίνηση αυτή; Για να δούμε τούτο, παραγωγίζουμε δύο φορές την Εξ.(1) ως προς τον χρόνο και παίρνουμε

$$d^2y/dt^2 = -\omega^2 y \quad \text{ή} \quad d^2y/dt^2 + \omega^2 y = 0 \quad (2)$$

Ωστόσο, μας ενδιαφέρει να δούμε ορισμένα παραδείγματα αρμονικών ταλαντώσεων που απαντώνται σε φυσικά φαινόμενα και σε τεχνολογικές εφαρμογές.

2.1) Ενέργεια και Απλή Αρμονική Κίνηση

Κατά την αρμονική ταλάντωση ($x=x_0 \sin \omega t$), σε τυχούσα θέση η δυναμική ενέργεια ισούται με

$$E_{\delta\upsilon\nu} = -k \int_0^x x dx = -k [x^2/2]$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει πως "αν αφήσουμε ελεύθερο το σωματίδιο" θα παράγει τελικώς μία κινητική ενέργεια (όταν φτάσει στη θέση $x=0$).

Ας δούμε τώρα την αντίστοιχη κινητική ενέργεια:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m [x_0^2 \omega^2 \cos^2\theta] \quad (1)$$

με $\theta = \omega t$

Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι (έργο από 0 ως x):

$$E_{\delta\upsilon\nu} = -k \int_0^x x dx = -k [x^2/2] = -k x_0^2/2 = -(k/2)x_0^2 \sin^2\theta \quad (2)$$

Αλλά επειδή $\omega^2 = k/m$,

αθροίζοντας κατα μέλη τις (1) και (2) έχουμε

$$E = E_{\kappa\iota\nu} + E_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2} k x_0^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{1}{2} k x_0^2 = \text{constant}$$

Επαλληλία δύο καθέτων απλών αρμονικών ταλαντώσεων

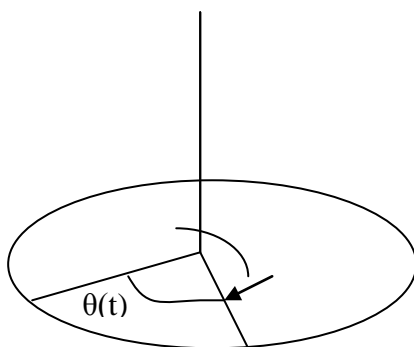
Η μετατόπιση δίνεται από τις εξισώσεις

$$x=a_1 \sin(\omega t+\varphi_1), y=a_2 \sin(\omega t+\varphi_2)$$

Παραδείγματα αρμονικών ταλαντώσεων

- Σώμα που συνδέεται μέσω ελατηρίου με ακλόνητο τοίχωμα
- Ένας **οριζόντιος** δίσκος που αναρτάται με ένα σύρμα στο κέντρο του, και εκτελεί *περιστροφικές ταλαντώσεις μικρού πλάτους*:

6



Σχήμα 1.1

Στην περίπτωση αυτή, όταν το $\theta_{\text{μεγ}}$ είναι αισθητά μεγάλο, η χρονική εξάρτηση του θ δεν ικανοποιεί ακριβώς τη μορφή της εξίσωσης (1), όπου $y \rightarrow \theta$, διότι έχουμε *αναρμονικά φαινόμενα*. Τούτο οφείλεται στο ότι η δυναμική εξίσωση δεν αντιπροσωπεύεται από την Εξ. (2) αλλά από κάποια συνθετότερη που είναι εκτός του σκοπού του παρόντος μαθήματος να τη μελετήσουμε.

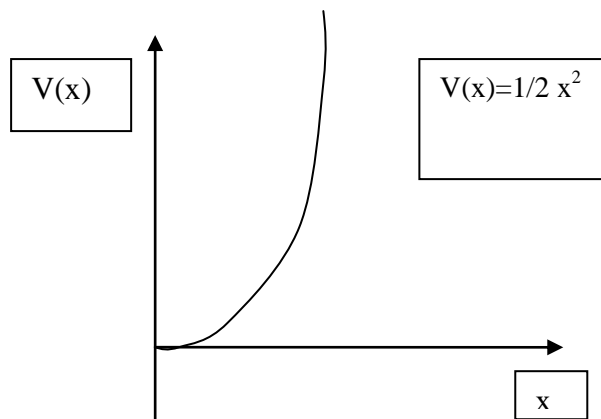
- Ένα **ανορθόδοξο παράδειγμα** Το μόριο του Αζώτου

Ας φανταστούμε το μόριο του αζώτου. Όπως προκύπτει σε βιβλία μηχανικής, που αντιμετωπίζουν το πρόβλημα των 2 σωμάτων (ατόμων N) μπορούμε να γράψουμε

την κίνηση του κέντρου μάζας με μία μεταβλητή, ενώ σαν δεύτερη μεταβλητή χρησιμοποιούμε την $r = r_2 - r_1$. Τότε, μπορεί ναδειχθεί πως η συνολική κίνηση μπορεί να θεωρηθεί σαν συνδυασμός της μεταβατικής κίνησης του κέντρου μάζας και μίας, ταλαντωτικής, κίνησης που περιγράφεται από το $r(t)$. Η τελευταία ικανοποιεί τη σχέση

$$\ddot{r}(t) = -k r,$$

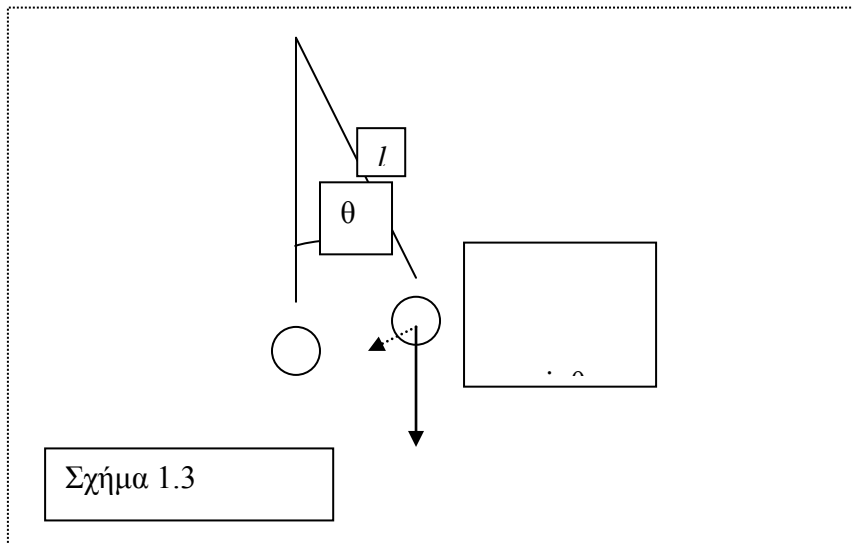
αν δεχθούμε πως δυναμική ενέργεια συναρτήσει της απόστασης r περιγράφεται από ένα διάγραμμα της μορφής



7

Σχήμα 1.2

Παράδειγμα: Εκκρεμές



Παρατηρούμε πως η δύναμη που προκαλεί την ταλάντωση, παράλληλα (κατά προσέγγιση) προς την τροχιά, είναι σε κάθε θέση της μάζας ίση προς $mg \sin\theta$, και συνεπώς ο Β νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$m (l \Delta^2 \theta) / \Delta t^2 = - \text{συνιστώσα βάρους κατά μήκος τροχιάς}$$

8 ή

$$m l \ddot{\theta}(t) = -mg \sin\theta$$

ή

$$\ddot{\theta}(t) = - (g/l) \sin\theta$$

Αναπτύσσοντας το $\sin\theta$ σε δυναμοσειρά, παίρνουμε

$$\ddot{\theta}(t) = - (g/l) (\theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \dots)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να διερευνηθεί σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις

A) θ να είναι πολύ μικρή

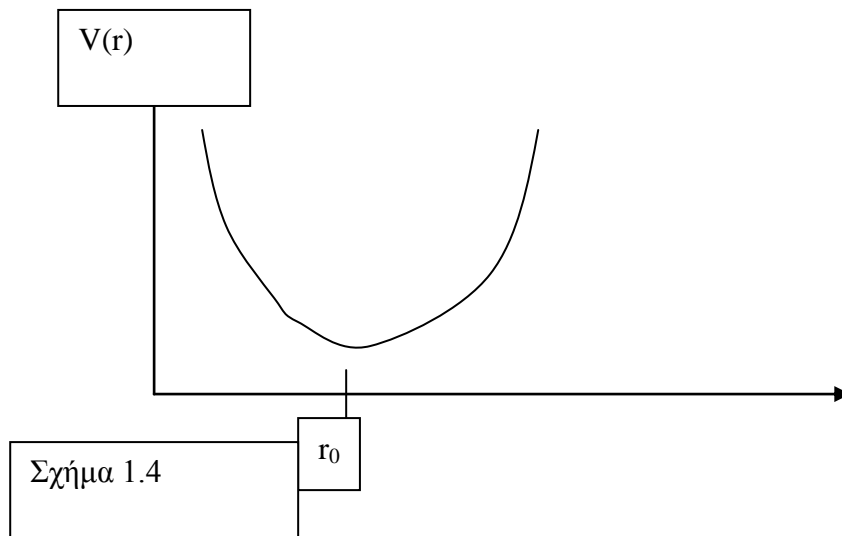
B) Το θ να παίρνει τιμές που δεν είναι πολύ μικρές.

Το **πολύ μικρή τιμή** είναι κάπως αυθαίρετο. Μπορούμε να το ορίσουμε έτσι ώστε να είναι $\theta \approx \sin\theta$, που μπορεί να συμβαίνει τυπικά για $\theta \leq 3^0$.

Στην περίπτωση λοιπόν A) μπορούμε να γράψουμε,

$$\ddot{\theta}(t) = - \omega^2 \theta, \text{ όπου έχουμε θέσει } \omega^2 \equiv g/l$$

Αρα, καταλήγουμε σε μία εξίσωση αρμονικών ταλαντώσεων.



9

Μπορείτε να σημειώσετε πως σε οποιοδήποτε πρόβλημα ταλαντώσεων όπου η δύναμη $F(x)$ εξαρτάται από την απομάκρυνση x , αυτή η εξάρτηση μπορεί να εκφραστεί σαν δυναμοσειρά, της μορφής:

$$F(x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Και έτσι πάντοτε για αρκετά μικρές τιμές του x , μπορούμε να έχουμε:

$$F(x) \approx a_0 - a_1 x,$$

Ή αν ορίσουμε $F_1(x) \equiv F(x) - a_0$

Έχουμε την περίπτωση των αρμονικών ταλαντώσεων.

Παρατηρείται, στο ανώτερο διάγραμμα, ότι η δύναμη ισούται με $F = -\text{grad } U(r)$
 Στην περίπτωση που το $U(r) = \alpha r^2$,

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = -2 \alpha r$$

και συνεπώς

$$\text{αν } 2\alpha/\mu \equiv \omega^2,$$

$$\ddot{r}(t) + \omega^2 r = 0$$

ΣΧΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΚΥΜΑΤΩΝ

Όπως θα δούμε, όπως σε ένα παράδειγμα μιάς χορδής της οποίας το ένα άκρο υφίσταται εγκάρσιες αρμονικές ταλαντώσεις, έχουμε σαν αποτέλεσμα την διάδοση της ταλάντωσης (σε χρόνο που καθορίζεται από την ταχύτητα διάδοσης του κύματος) σε άλλα σημεία της χορδής και κατά συνέπεια έχουμε δημιουργία *οδεύοντος κύματος*.

Επαλληλία δύο αρμονικών ταλαντώσεων

10

(1) Ταλαντώσεις με ίσες συχνότητες

Ένα σώμα μπορεί να κινείται λόγω της επίδρασης δύο (ή περισσότερων) αρμονικών ταλαντώσεων. Επειδή έχουμε πει πως έκαστη αρμονική ταλάντωση μπορεί να παρασταθεί με ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα, για να βρούμε την συνισταμένη κίνηση ενός συστήματος, μπορούμε να αθροίσουμε διανυσματικά τις δύο κινήσεις.

Η μετατόπιση λόγω της μίας δίνεται από

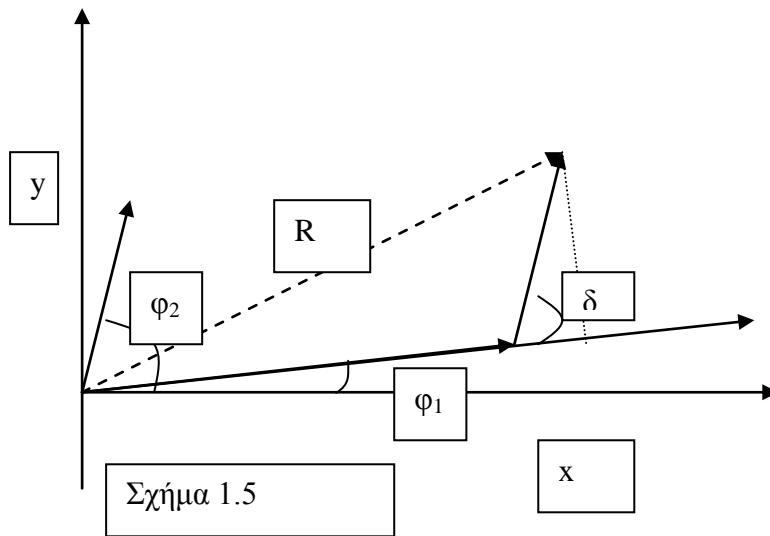
$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \phi_1) \text{ και λόγω της δεύτερης ταλάντωσης από } x_2 = a_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Είναι από το παρακάτω σχήμα :

$R^2 = (a_1 + a_2 \cos\delta)^2 + (a_2 \sin\delta)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos\delta$, όπου $\delta = \phi_2 - \phi_1$ είναι μία σταθερά, η σταθερά διαφοράς φάσης.

Η εφαπτομένη της γωνίας θ , που καθορίζει τη φάση της συνισταμένης ταλάντωσης, δίνεται, όπως προκύπτει εύκολα από το Σχήμα:

$$\tan\theta = \frac{a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_2}{a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos\theta_2}$$



11

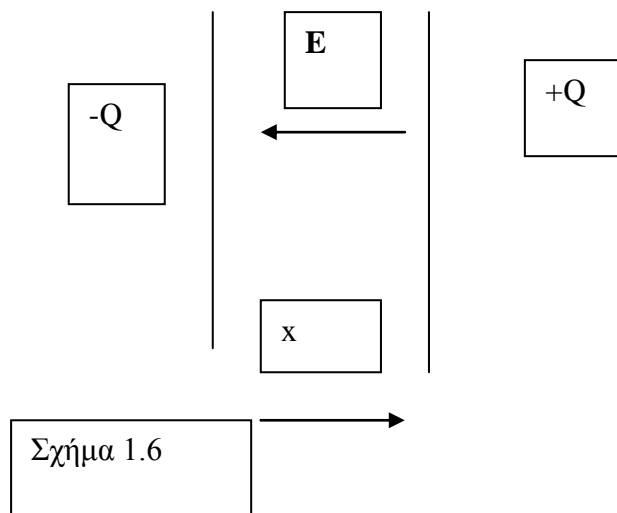
Τέλος 2^{ης} Διαλέξης

Τρίτη Διάλεξη :

-Ελεύθερες ταλαντώσεις σε ηλεκτρικά συστήματα με πυκνωτή και αυτεπαγωγή,

-Ελεύθερες ταλαντώσεις στην ιονόσφαιρα

Τοπικά στην ιονόσφαιρα έχουμε τοπικό διαχωρισμό θετικών ιόντων από ηλεκτρόνια, και έτσι μπορεί να έχουμε την κατάσταση του Σχήματος



12

Εδώ τότε θα έχουμε

$$E_x = - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \quad (1)$$

και

$$q E_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2)$$

όπου $x(t)$ η θέση εκάστου φορτίου στο χώρο ανάμεσα στους «οπλισμούς του πυκνωτή των διαχωρισμένων τοπικά φορτίων».

Από αυτές τις σχέσεις,

Τότε το ολικό φορτίο που εναποτίθεται στο ένα τοίχωμα (και φεύγει από το άλλο) είναι:

$$Q = N q A x$$

Όπου N ο αριθμός ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου, και υποθέτουμε πως κάθε ηλεκτρόνιο μετατοπίζεται από τη θέση ισορροπίας κατά απόσταση x .

Παραγωγίζοντας 2 φορές ως προς το χρόνο, και θέτοντας σε αυτό το αποτέλεσμα τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = - \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} Q$$

Αρα, έχουμε λύση $Q = Q_0 \cos(\omega t + \phi)$, όπου $\omega^2 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m}$

το ω λέγεται συχνότητα πλάσματος στην ιονόσφαιρα., $\nu_p = 10$ ως 30 MHz, και $N = 10^{12} - 10^{13}$ ηλεκτρόνια ανά m^3 .

Ελεύθερες Φθ.ινουσες Ταλαντώσεις

Εδώ έχουμε την επίδραση μίας δύναμης “τριβής”

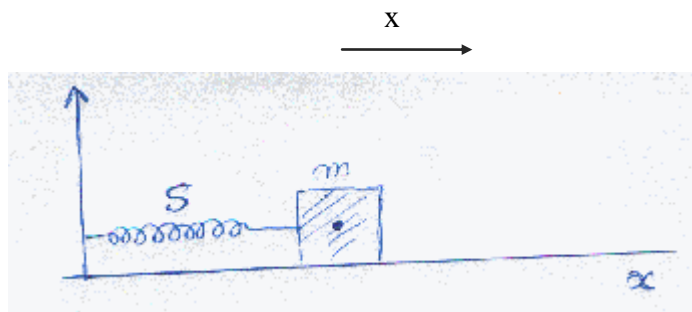


Fig1_mass_spring

Δύναμη τριβής $-r \dot{x}$

Σχ. 1.4

14

Τώρα, λόγω της δύναμης τριβής, $-r \dot{x}$ θα είναι

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + s x = 0$$

Εδώ, για τη λύση της, έχουμε τρεις περιπτώσεις. Μπορούμε πρώτα να αναζητήσουμε εκθετικής εξάρτησης λύση, $x = C e^{at}$.

Στις δύο περιπτώσεις το C εμφανίζεται ρητά ως σταθερό μήκος, αλλά στην τρίτη παίρνει τη μορφή

$C = A + Bt$ (B έχει διαστάσεις ταχύτητας). Παίρνοντας το C σαν σταθερό μήκος, έχουμε

$$\dot{x} = a C e^{at} \text{ και } \ddot{x} = a^2 C e^{at}$$

και άρα,

$$C e^{at} (m a^2 + r a + s) = 0, \text{ οπότε } C e^{at} \text{ (τετριμμένη λύση) ή } m a^2 + r a + s = 0$$

Λύνοντας την εξίσωση β βαθμού ως προς a βρίσκουμε

$$a = \frac{-r}{2m} \pm \left(\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m} \right)^{1/2}$$

και τρεις διαφορετικές περιπτώσεις ως προς την διακρίνουσα

(α) $\Delta = r^2$ Θετική, (“τριβή “ υπερνικά “ δύναμη επαναφοράς”) και η ισχυρή απόσβεση οδηγεί σε “υπερκρίσιμη απόσβεση”

(β) Δ= μηδέν . Τότε έχουμε τη λεγόμενη “κρίσιμη απόσβεση”

(γ) Δ μικρότερο μηδενός, δηλαδή η τριβή δεν εμποδίζει την ταλαντωτική κίνηση.

Περίπτωση (α)

Αποδεικνύεται ότι

$$x=e^{-pt} [(F/2) (e^{qt} + e^{-qt}) +(G/2) (e^{qt} - e^{-qt})]$$

και άρα, μη ταλαντωτική συμπεριφορά. Το p ισουται με $r/2m$

(εγινε όλο το &1.12 Παιν εκτός κρίσιμη απόσβεση), και εκτός συντελεστή ποιότητας.

Κρίσιμη Απόσβεση

$$x= (A+ Bt) e^{-rt/2m} =(A+Bt) e^{-pt}$$

Αυτή βρίσκει εφαρμογές στο βαλιστικό γαλβανόμετρο και σε άλλες περιπτώσεις

Ασθενής απόσβεση

$$\omega' = \left(\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m} \right)^{1/2}$$
$$= +i \left(\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2} \right)^{1/2}$$

Αρα,

$$x=C e^{-rt/2m} e^{\pm i\omega't}$$

Δεύτερη μεγάλη έκφραση (εκθέτης του δευτέρου e) μπορεί να συμβολιστεί με ω'

12-11-03 ΕΕ

Εφαρμογές Απλή αρμονική ταλάντωση με απόσβεση σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα

Η εξίσωση που διέπει την μεταβολή των ηλεκτρικών φορτίων σε ένα κύκλωμα με ωμική αντίσταση R και αρχική διαφορά δυναμικού $V=V_0$ είναι

$$R dq/dt +L di/dt + q(t)/C=0$$

Με άλλα λόγια, το άθροισμα όλων των διαφορών δυναμικού πρέπει να ισούται με μηδέν (Νόμος του Kirchoff). Έχουμε

$$R \dot{q} + L \ddot{q} + q/C = 0$$

Βάζοντας τώρα στο αντίστοιχο παράδειγμα μηχανικής, $m \rightarrow L$, $r \rightarrow R$, $s \rightarrow (1/R)$ παίρνουμε

$$q = q_0 e^{-Rt/2L + \sqrt{(R^2/4L^2 - 1/LC)}^{1/2} t}$$

Η οποία για $1/LC > R^2/4L^2$, δίνει ταλαντωτική συμπεριφορά με συχνότητα

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

Στον όρο εξασθένησης έχουμε ότι το R/L έχει διαστάσεις αντιστρόφου χρόνου T^{-1} .

Αν τώρα,

$$\text{η ποσότητα } \Delta \equiv \left(\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} \right) \text{ είναι μικρότερη του μηδενός}$$

γράφουμε

$$\pm \left(\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} \right)^{1/2} \equiv \pm i\omega'$$

και έτσι,

$$x(t) = C e^{-(b/2m)t} (\cos \omega't \pm i \sin \omega't)$$

Η έκφραση αυτή μας φαίνεται να μας προσκαλεί να επιλέξουμε μόνο το πραγματικό μέρος, και έτσι παίρνουμε

$$x(t) = C e^{-(b/2m)t} \cos \omega't$$

σαν ρεαλιστική λύση.

Άλλος τρόπος αντιμετώπισης είναι να πάρουμε ένα γραμμικό συνδυασμό των λύσεων με + και -, οπότε

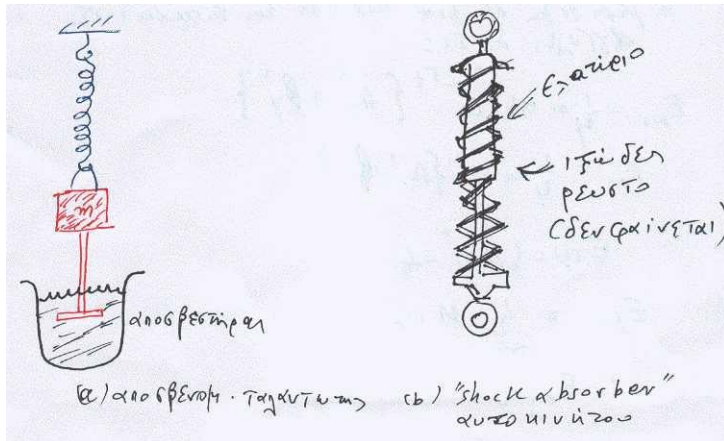
$$x(t) = e^{-(b/2m)t} (C_1 e^{i\omega't} + C_2 e^{-i\omega't})$$

$$\text{Αν τώρα βάλουμε } C_1 = \frac{A}{2i} e^{i\varphi} \quad C_2 = -\frac{A}{2i} e^{-i\varphi}$$

προκύπτει εύκολα,

$$x(t) = A e^{-(b/2m)t} \sin(\omega't + \varphi)$$

Ένα πρακτικό παράδειγμα αποσβενόμενων ταλαντώσεων φαίνεται στο Σχήμα, όπου παρουσιάζεται η απόσβεση κραδασμών σε ένα αυτοκίνητο μέσω του "αμορτισέρ".



Fig_5_12_03

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

Το θέμα αυτό ξεφεύγει από τις ελεύθερες ταλαντώσεις αλλά συνδέεται και με τις συζευγμένες ταλαντώσεις που θα δούμε αμέσως πιο κάτω. Ας φαντασθούμε σαν παράδειγμα την γνωστή αιώρα, όπου ένα παιδί εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις. Τότε, έστω πως κάποια χρονική στιγμή ασκούμε στο παιδί μία περιοδική δύναμη, $F_0 \cos \omega t$.

Τότε, η εξίσωση κίνησης γίνεται

17

$$d^2x + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos \omega t \quad (1)$$

Ακόμη απλούστερο πρόβλημα είναι εκείνο ενός οριζοντίου ελατηρίου με μία μάζα m στο άκρο του, ενώ τα άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε τοίχωμα, και έστω πως εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς τριβή. Αν κάποια στιγμή ασκήσουμε τη δύναμη $F_0 \cos \omega t$, τότε η διαφορική Εξίσωση κίνησης θα είναι η (1), με $\omega_0^2 = s/m$.

Ποια είναι η έκφραση του ω_0 στην περίπτωση της αιώρας;

Για τη λύση της (1), θεωρούμε πρώτα την περίπτωση όπου $\omega \gg \omega_0$, οπότε μετά από πολύ ώρα, θα έχουμε την μόνιμη κατάσταση όπου το πλάτος της ελεύθερης ταλάντωσης έχει πρακτικά μηδενισθεί λόγω τριβών, ενώ θα έχουμε μία απόκριση λόγω της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, $x = C \cos \omega t$, όπου το ω είναι μία ζητούμενη παράμετρος.

Η (1) τότε δίνει

$$-\omega^2 C \cos \omega t + \omega_0^2 C \cos \omega t = (F_0/m) \cos \omega t,$$

και .α.ρα

$$C = \frac{1}{m} \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Παρατηρούμε πως για $\omega < \omega_0$, το C είναι θετικό ενώ για $\omega > \omega_0$, το C είναι αρνητικό. Με άλλα λόγια, στην δεύτερη περίπτωση, η εξαναγκασμένη απομάκρυνση είναι αντίθετου προσήμου προς τη δύναμη (και την επιτάχυνση).

-Σχέσεις Φάσης

- Συντονισμός

Σχέση των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων με τις συζευγμένες ταλαντώσεις.

Όπως θα δούμε, έχουμε την δυνατότητα συζευγμένης κίνησης όταν έχουμε δύο κατά τα άλλα αρμονικούς ταλαντωτές που όμως συνδέονται μεταξύ των με ελατήριο ή άλλο μηχανισμό αλληλεπίδρασης. Τώρα τα πράγματα είναι προφανώς πιο πολύπλοκα διότι η δύναμη που ασκείται στον ταλαντωτή (1) από τον ταλαντωτή (2) δεν δίνεται από την απλή περιοδική σχέση όπως η $F = F_0 \cos \omega t$, αλλά πρέπει να την προσδιορίσουμε στην πορεία.

Θα εφαρμόσουμε άλλη στρατηγική για την επίλυση αυτού του προβλήματος και όχι αυτή που εφαρμόσαμε παραπάνω στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ενός ταλαντωτή.

1.7 Επαλληλία δύο καθέτων απλών αρμονικών ταλαντώσεων

1.8 Πόλωση*

1.9 Επαλληλία ενός μεγάλου αριθμού n απλών αρμονικών ταλαντώσεων του ίδιου πλάτους a και ίσων διαδοχικών διαφορών φάσεων δ μεταξύ τους

Εστω πως ένα μικρό σώμα, μάζας m , υπόκειται στην επαλληλία ενός αριθμού n αρμονικών ταλαντώσεων με την ίδια πόλωση, π.χ. εγκάρσια κατακόρυφη, και το ίδιο πλάτος και ίσες διαδοχικές διαφορές φάσης δ .

Το ερώτημα είναι ποιο θα είναι το συνολικό αποτέλεσμα;

Στην περίπτωση των 2 ταλαντώσεων, διαφοράς φάσης δ , προέκυψε η διανυσματική άθροιση των δύο ταλαντώσεων ως το διάνυσμα R που αντιστοιχεί στο στη διαγώνιο του παραλληλογράμμου των 2 στρεφομένων διανυσμάτων, Σχ. 1.6.

Στη γενικότερη περίπτωση των n το πλήθος ταλαντώσεων έχουμε πως η συνολική ταλάντωση αντιστοιχεί στην πλευρά που *κλείνει* το πολύγωνο ίσων πλευρών που αντιστοιχούν στα στρεφόμενα διανύσματα μιάς εκάστης ταλάντωσης, Σχ. 1.11.

Πως μπορεί να προκύψει τέτοιο φαινόμενο επαλληλίας ταλαντώσεων; Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 10, στο φαινόμενο πολλαπλής συμβολής, σε ένα σημείο του χώρου είναι δυνατόν να προκύπτει ταλάντωση από επαλληλία ταλαντώσεων ίδιων συχνοτήτων που όμως έχουν σταθερή διαδοχική φάση λόγω των διαφορετικών αποστάσεων του σημείου όπου παρατηρούμε την ταλάντωση από μία συστοιχία n πηγών που εκπέμπουν κύματα σε φάση. (Εδώ βλέπουμε πως τα οδεύοντα κύματα προκαλούν ταλαντώσεις).

Υπολογισμός;

Από το πολύγωνο του Σχ. 1.11 έχουμε

$$R/2 = r \sin(n\delta/2) = a \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

Η φάση της επαλληλίας σε σχέση με την πρώτη συνιστώσα είναι

$$\alpha = (90^\circ - \delta/2) - (90^\circ - n\delta/2) = (n-1)\delta/2$$

δηλαδή είναι το μισό της διαφοράς φάσης μεταξύ πρώτης και τελευταίας συνιστώσας ταλάντωσης.

Ετσι είναι

$$R \cos(\omega t + \alpha) = a \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \cos[\omega t + (n-1)\delta/2]$$

Σημειώστε πως το συνολικό πλάτος μπορεί να μηδενισθεί αν οι συνθήκες διαφοράς φάσης και ο αριθμός των ταλαντώσεων n συνδυαστούν να δώσουν μηδέν. Επίσης, είναι δυνατόν να προκύψει πως το κλάσμα δίνει τιμή ίση προς n , και άρα

$$R = n a$$

Τούτο συμβαίνει όταν οι n το πλήθος ταλαντώσεις δρουν σε φάση.

Χρήσιμα Μαθηματικά

Περίπτωση περίθλασης

Γραμμικότητα και αρχή της υπέρθεσης

Η διαφορική εξίσωση (2) ανήκει στην κατηγορία των γραμμικών ως προς το y διαφορικών εξισώσεων. (Βλέπε Berkeley, σελ. 16 ως 18)

19

Μη ομογενείς γραμμικές εξισώσεις

(Βλέπε Berkeley, σελ. 18)

Εχουμε, πχ. την εξίσωση

$$m d^2 y / dt^2 = - C y (t) + F(t),$$

όπου η $F(t)$ οφείλεται, π.χ., σε μία χρονικά μεταβαλλόμενη εξωτερική δύναμη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Διδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής

Η εξίσωση κίνησης κατά τον άξονα των x είναι:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = - 2K_1 x$$

και

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = - 2 K_2 y$$

που έχουν λύσεις:

$$x(t) = A_1 \cos (\omega t + \varphi_1), \omega_1^2 = 2K_1/M$$

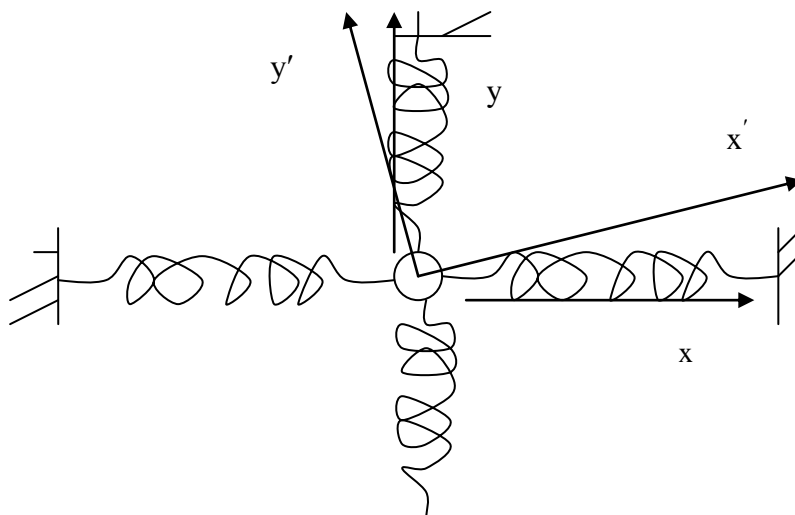
και

$$y(t) = A_2 \cos (\omega t + \varphi_2), \omega_2^2 = 2K_2/M$$

Βλέπουμε πως οι 2 κινήσεις είναι ασύζευκτες, και ότι η κίνηση κατά τον άξονα των x αντιστοιχεί στον πρώτο τρόπο ταλάντωσης, ενώ εκείνη κατά τον άξονα των y , αντιστοιχεί στον δεύτερο τρόπο ταλάντωσης. Τα $A_1, B_2, \varphi_1, \varphi_2$ εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες.

Κανονικές συντεταγμένες

Αν στο προηγούμενο παράδειγμα δεν είμασταν τόσο τυχεροί ή τόσο γνωστικοί, θα μπορούσαμε να είχαμε εκλέξει άλλο σύστημα αξόνων όπως αυτό που εικονίζεται στο Σχήμα:



Σχήμα 1.7

Τότε, οι εξισώσεις κίνησης ως προς του άξονες x' και y' θα είναι συζευγμένες, και στην περίπτωση αυτή είναι πιο υπαρκτό το πρόβλημα της ανεύρεσης των κανονικών συντεταγμένων, ψ_a και ψ_b , καθών και των αντιστοίχων συχνοτήτων των τρόπων ταλάντωσης. Μια μέθοδος για την επίλυση προβλήματος αυτού του είδους με συζευγμένες εξισώσεις κίνησης, είναι να βρούμε άλλες μεταβλητές, ως προς τις οποίες οι νέες εξισώσεις κίνησης είναι ασύζευκτες, δηλαδή να βρούμε τις κανονικές μεταβλητές. Η μέθοδος για την επίτευξη του στόχου περιγράφεται πιο κάτω:

Επανάληψη με ένα απλό παράδειγμα

Συζευγμένες ταλαντώσεις με δύο αρμονικούς ταλαντωτές που συνδέονται μεταξύ τους με ένα ελατήριο

Η εξίσωση κίνησης της πρώτης μάζας είναι

$$M\ddot{\psi}_a(t) = -s\psi_a(t) + s(\psi_b - \psi_a)$$

Και του δεύτερου σώματος

$$21 \quad M\ddot{\psi}_b(t) = -s\psi_b(t) - s(\psi_b - \psi_a)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο ως άνω εξισώσεις, και θέτοντας $\psi_1 \equiv \psi_a(t) + \psi_b(t)$ παίρνουμε:

$$M\ddot{\psi}_1 = -s\psi_1 \text{ και άρα } \psi_1 = A \cos(\omega_1 t + \phi_1) \text{ με } \omega_1^2 = s/M$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις 2 εξισώσεις κίνησης και θέτοντας $\psi_2 \equiv \psi_a(t) - \psi_b(t)$

$$M\ddot{\psi}_2 = -3s\psi_2 \text{ και άρα } \psi_2 = B \cos(\omega_2 t + \phi_1) \text{ με } \omega_2^2 = 3s/M$$

Βλέπουμε δηλαδή, πως υπάρχουν δύο νέες μεταβλητές κίνησης, ψ_1 και ψ_2 , που είναι γραμμικός συνδυασμός των αρχικών μεταβλητών, ως προς τις οποίες έχουμε αρμονική ταλάντωση με τις 2 συγκεκριμένες συχνότητες που βρήκαμε. Οι 2 αυτές συντεταγμένες λέγονται κανονικές μεταβλητές

Βλέπουμε επίσης πως προκύπτει ότι:

$$2\psi_a = \psi_1 + \psi_2 = A \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\omega_2 t + \phi_1)$$

και

$$2\psi_b = \psi_1 - \psi_2 = A \cos(\omega_1 t + \phi_1) - B \cos(\omega_2 t + \phi_1)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως οι συντεταγμένες κίνησης, ψ_a και ψ_b είναι πάντοτε επαλληλία, η γενικότερα γραμμικός συνδυασμός δύο απλών αρμονικών κινήσεων που αντιστοιχούν στους λεγόμενους τρόπους ταλάντωσης. Οι μεταβλητές ψ_1 και ψ_2 ονομάζονται κανονικές μεταβλητές ενώ οι ω_1 και ω_2 λέγονται συχνότητες τρόπων ταλάντωσης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) 1.10 BERKELEY

Ενότητα 1η Περιγράφηκαν τα περιεχόμενα του μαθήματος, η μέθοδος παρουσίασης θεμάτων από σπουδαστές. Υπό όρους προστίθενται ως 15 μονάδες στον τελικό βαθμό του διαγωνίσματος. Πρέπει όμως να γράψουν σε αυτό για ≥ 35 μον.

Περιεχόμενα Αρμονικός Ταλαντωτής (χωρίς και με απόσβεση). (Ασθενής, κρίσιμη, ισχυρή απόσβεση). Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (μεταβατική κατάσταση-μόνιμη κατάσταση), σύνθετη μηχανική αντίσταση. Συντονισμός και παράγοντας ποιότητας Q , κυκλώματα εναλλασσομένου ρεύματος, μιγαδική αντίσταση. **Pain:** Κεφ.1-2 εκτός από τις παραγράφους :1.8,1.10,2.8,2.13.

2. Συζευγμένοι ταλαντωτές, κανονικοί τρόποι ταλάντωσης [ελαστική σύζευξη-κανονικές συντεταγμένες-βαθμοί ελευθερίας-κανονικοί τρόποι ταλάντωσης, προσδιορισμός συχνοτήτων κανονικών τρόπων ταλάντωσης, εξαναγκασμένη ταλάντωση συζευγμένων ταλαντωτών-συχνότητες συντονισμού, αδρανειακή-επαγωγική σύζευξη ηλεκτρικών ταλαντωτών, ενέργεια κανονικών τρόπων ταλάντωσης, ταλάντωση στην περίπτωση τυχαίων αρχικών συνθηκών-διακροτήματα, περιοδική διάταξη πολλών σημειακών μαζών σε ιδανική χορδή-συχνότητα αποκοπής]. **Pain:** Κεφ.3]

3. **Κύματα σε συνεχή μέσο, σε μία διάσταση** [εξίσωση κύματος ως όριο της περιοδικής διάταξης πολλών σωματιδίων στο όριο του συνεχούς-εξίσωση κύματος σε συνεχές ελαστικό μέσο, γενική λύση της εξίσωσης κύματος. Εγκάρσια κύματα. Οδεύοντα κύματα. Φασική ταχύτητα. Διάδοση ενέργειας οδεύοντος κύματος. Χαρακτηριστική αντίσταση ελαστικού μέσου. Οριακές συνθήκες σε ασυνέχεια. Ανάκλαση-διάδοση σε ασυνέχεια. Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης σε συνεχές μέσο σε μία διάσταση, στάσιμα κύματα. Κυματοπακέτα ως επαλληλία πολλών συχνοτήτων και θεωρήματα εύρους ζώνης. Σχέσεις διασποράς και ταχύτητα ομάδας..] : **Pain:** Κεφ.4 εκτός από τις παραγράφους :4.14, 4.18,4.19,4.20 .

3α) Γεωμετρική Οπτική Οπτικά όργανα. Ατρονομικά Τηλεσκόπια
<http://csep10.phys.utk.edu/astr162/lect/light/telescopes.html> (Mauna Kea Observatory)

Κοσμικές ακτίνες από ανιχνευτή κυμάτων βαρύτητας:
http://www.icrc1999.utah.edu/~icrc1999/root/vol2/h6_4_07.pdf

4. **Μέθοδοι Fourier** [Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης και ανάπτυγμα Fourier, συντελεστές Fourier και ενέργεια κανονικών τρόπων ταλάντωσης, κίνηση χορδής με αρχική διαταραχή (αρχικές απομακρύνσεις-αρχικές ταχύτητες-συνδυασμός)] [**Pain:** από Κεφ.9:9.1-9.5]
Ολοκλήρωμα Fourier. Μετασχηματισμός Fourier

5. **Συμβολή-Περίθλαση από σύμφωνες πηγές** [Συμβολή με διαίρεση μετώπου(δύο σημειακές πηγές, N σημειακές πηγές). Συμβολή με διαίρεση πλάτους. Περίθλαση σε ασυνέχεια πεπερασμένων διαστάσεων] [**Pain:** από Κεφ. 10: 10.12-10.19,10.23]

Διάλεξη 4

Επιμονή, και μη αποθάρρυνση από την μη κατανόηση με την πρώτη φορά!

Ως τώρα έχουμε ήδη συναντήσει διάφορα είδη, από απλά ως σύνθετα, ταλαντωτικών κινήσεων. Συναρήσαμε την επαλληλία 2 ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας με κάποια όμως διαφορά φάσης. Θα συνατήσουμε παρακάτω και περιπτώσεις επαλληλίας ταλαντώσεων με διαφορετικές συχνότητες.

Παράδειγμα αρμονικού ταλαντωτή

1) Σωματίδιο μάζας 1 Kgr κινείται σε φρέαρ δυναμικής ενέργειας που δίνεται από $U=U_0+6x+x^2$. Να βρείτε (α) τη δυσκαμψία, (β) την περίοδο ταλάντωσης, και (γ) τη θέση σταθερής ισορροπίας.

Λύση

Force = $(-dU(x)/dx) = (-6 -2x)$, and the equilibrium position is $x_0=3$. The equation of motion

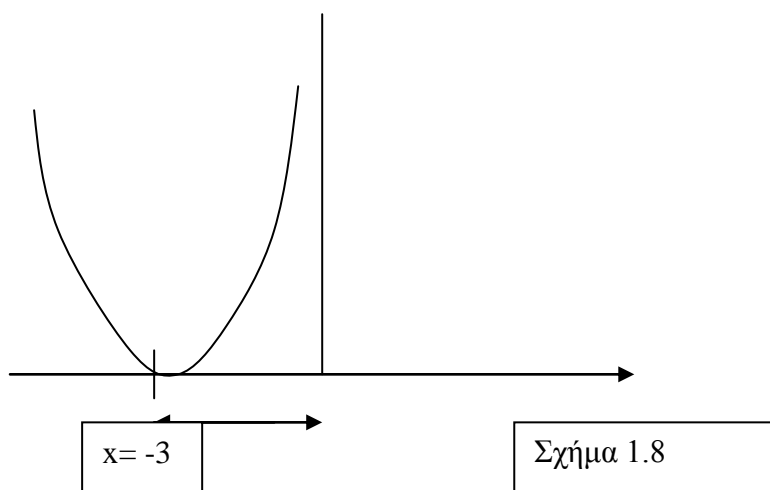
Is $m \ddot{x} = (-6 -2x) = -2(3+x)$. Changing variable, $y=3+x$, we have $\ddot{y} = \ddot{x}$ and thus,

$\ddot{m}y = -2 y$. We conclude that the force constant is $s=2 \text{ Nt/m}$.

The frequency of oscillation is equal to $\omega/2\pi = \sqrt{2/m} = 1.41 / (2\pi) \text{ Hz}$

Για $x = -3$, είναι $\ddot{x}(t)|_{x=-3} = 0$, άρα η θέση ισορροπίας είναι στο $x = -3$.

24



2) Σωματίδιο μάζας 1 γραμ. εκτελεί απλή αρμονική κίνηση κατά μήκος του άξονα των x. Σε αποστάσεις 6 cm και 10 cm από τη θέση ισορροπίας, οι ταχύτητες του σωματιδίου είναι 5 cm/s και 4 cm/s, αντίστοιχα. Να βρείτε την περίοδο ταλάντωσης, το πλάτος και τη μέγιστη κινητική ενέργεια.

Λύση

Εστω, $x=C \sin(\omega_0 t + \varphi)$, και άρα $dx/dt = C \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ (1)

Και λόγω της (1)

$$dx/dt = \omega_0 \sqrt{C^2 - x^2}$$

Με αντικαταστάσεις έχουμε

$$v_2 = \omega_0 \sqrt{C^2 - x_2^2} \quad (a)$$

και ,

$$v_1 = \omega_0 \sqrt{C^2 - x_1^2} \quad (b)$$

$$\rightarrow v_1^2 - v_2^2 = \omega_0^2 (x_1^2 - x_2^2) \rightarrow \omega_0^2 = (v_1^2 - v_2^2) / (x_1^2 - x_2^2)$$

Για το πλάτος, από τη (b) παίρνουμε $C^2 = v_1^2 / \omega_0^2 + x_1^2 = v_1^2 (x_1^2 - x_2^2) / (v_1^2 - v_2^2) + x_1^2$

$$C^2 = \left[\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2} \right]^{1/2}$$

(2) Ταλαντώσεις με διαφορετικές συχνότητες

Σε αυτή την περίπτωση, η συνισταμένη μετατόπιση γίνεται:

$$x = a \sin \omega_1 t + a \sin \omega_2 t$$

Η έκφραση της συνισταμένης μετατόπισης, εύκολα φαίνεται, δίνεται από:

$$x = 2a \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \quad (I)$$

Αρα, έχουμε μία συνιστάμενη ταλάντωση που την χαρακτηρίζει ένα πλάτος μετατόπισης ίσο προς $2a$ που έχει διαμορφωθεί, μεταβάλλεται δηλαδή μεταξύ 0 και $2a$ εξ αιτίας του παράγοντα του συνημιτόνου, με μία πολύ χαμηλότερη συχνότητα, ίση με την ημιδιαφορά $(\omega_2 - \omega_1)/2$. Τότε έχουμε τα λεγόμενα *διακροτήματα*.

Παρατηρούμε πως η *διαμόρφωση* του πλάτους που εμφανίζεται έχει εν γένει μικρή συχνότητα, γεγονός που μας επιτρέπει να εκτελούμε σχετικές μετρήσεις συχνότητας, δηλαδή μετρώντας την συχνότητα διαμόρφωσης του πλάτους, να μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συχνότητα ω_2 ως προς την ω_1 . Με άλλα λόγια, αν μετρήσουμε με ακρίβεια το μέγεθος $(\omega_2 - \omega_1)/2$ από τα χαρακτηριστικά του διακροτήματος, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε με καλή ακρίβεια το ω_2 αν γνωρίζουμε (από πρότυπες και πολύ ακριβείς μετρήσεις) με πολύ καλή ακρίβεια το ω_1 . Διαφορετικά, αν επιχειρούσαμε να μετρήσουμε με πολύ μεγάλη ακρίβεια το ω_2 , τότε θα συναντούσαμε, πιθανότατα δυσκολίες. Ένας λόγος της δυσκολίας μπορεί να είναι ότι π.χ. το ω στις οπτικές συχνότητες, μπορεί να είναι 10^{12} Hz, ένα δηλαδή εξαιρετικά μεγάλο μέγεθος συχνότητας, και πιθανότατα, χωρίς τη χρήση διακροτημάτων, θα έχουμε πολύ μεγάλο σφάλμα.

Πρόκειται να συναντήσουμε πολλές ακόμα περιπτώσεις όπου εφαρμόζουμε την τεχνική μέτρησης διαφορών με σκοπό την επίτευξη μεγάλης ακρίβειας ή ευκολίας

στον προσδιορισμό της τιμής ενός αγνώστου μεγέθους με την μέθοδο μέτρησης διαφορών.

Ασκηση 3;

Να βρείτε την ακρίβεια προσδιορισμού του μεγέθους ω_2 εφόσον γνωρίζουμε το ω_1 με σχετικό σφάλμα 10^{-9} , και εφόσον μετρήσουμε την διαφορά $(\omega_2 - \omega_1)/2$ με σχετικό σφάλμα 10^{-6} .

Λύση ; Η ακρίβεια προσδιορισμού του $(\omega_2 - \omega_1)/2$ οφείλεται βασικά στην ακρίβεια μέτρησης του χρόνου, t , και των τιμών της συνάρτησης $x(t)$. Η τιμή $(\omega_2 - \omega_1)/2$ προκύπτει μετά μία διαδικασία μαθηματικής προσαρμογής (fit) των πειραματικών δεδομένων με τη θαυρητική καμπύλη (I). Ετσι θα έχουμε

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \rightarrow \Delta\omega_1 = ((\Delta\omega)^{1/2} + (\Delta\omega_2)^{1/2})^{1/2} \approx \Delta\omega_1 \rightarrow \Delta\omega_1/\omega_1 \approx 10^{-6}$. Παρατηρούμε πως η ακρίβεια της μεθόδου εξαρτάται κυρίως από την ακρίβεια του προσδιορισμού των $x(t)$ και t , μια και η ακρίβεια προσδιορισμού του ω_1 είναι, όπως υποθέσαμε, πολύ καλύτερη. Θα συναντήσουμε μεθόδους ακόμη μεγαλύτερης ακρίβειας.

Ασκηση 4) Να λύσετε αναλυτικά το πρόβλημα συζευγμένων ταλαντώσεων 2 ίσων μαζών συνδεδεμένων μεταξύ των με ελατήριο σταθεράς s και έκαστο εξ αυτών είναι συνδεδεμένο με κατακόρυφο τοίχο, επίσης με ελατήριο σταθεράς s , έτσι ώστε να έχουμε μία οριζόντια ταλαντωνόμενη διάταξη μαζών και ελατηρίων χωρίς τριβή. Στη θέση ισορροπίας, τα ελατήρια είναι στο φυσικό τους μήκος.

Κανονικές συντεταγμένες ή κανονικές μεταβλητές (KM)

Με αυτή την επιλογή συντεταγμένων, x και y , δεν υπάρχει σύζευξη μεταξύ των δύο

26

κινήσεων. Αυτή όμως δεν είναι η γενικότερη περιγραφή της κίνησης.

Με άλλα λόγια και συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε πως σε ένα σύστημα δύο ταλαντωτών η κίνηση εκάστου είναι στη γενική περίπτωση μη αρμονική και πολύπλοκη. Ωστόσο, με κατάλληλες αρχικές συνθήκες (και σε ορισμένες περιπτώσεις εντελώς τυχαία!) είναι δυνατόν να συμβεί ώστε η κίνηση ενός εκάστου ταλαντωτή να είναι αρμονική και μάλιστα και ο δύο να ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα. Αν μάλιστα το φαινόμενο των τρόπων ταλάντωσης θεωρείται πολύ σπουδαίο φαινόμενο, μπορούμε να υποθέσουμε πως η ανακάλυψη του υπήρξε εντελώς τυχαία και στη συνέχεια προκάλεσε το ενδιαφέρον των Φυσικών και Μαθηματικών. Θα δούμε μάλιστα ότι το φαινόμενο επεκτείνεται και σε συστήματα ταλαντωτών μεγάλου πλήθους. Ένα στερεό σώμα αποτελείται από δισεκατομμύρια σωματίδια μεταξύ των οποίων υπάρχουν δυνάμεις που θα μπορούσαν να υποτεθούν, προς στιγμήν, όμοιες με εκείνες ενός ελαστικού ελατηρίου. Ετσι, αναμένει κανείς να εφαρμόζονται και εδώ τα περί των τρόπων ταλάντωσης. (Ιδείτε και στη Βιβλιογραφία στο τέλος του εδαφίου αυτού: French, Vibrations and Waves, page 135).

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό ενός τρόπου ταλάντωσης είναι πως τα επί μέρους σωματίδια (ταλαντωτές) έχουν σταθερό λόγο πλατών. Ας δούμε λοιπόν πως μπορούμε να αναζητήσουμε συστηματικά τους τρόπους ταλάντωσης σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα με δύο ταλαντωτές.

Γενικά, πρέπει να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης εκάστου σώματος ως προς τις μεταβλητές x και y . Εστω αυτές πως είναι ανεπιτυχείς συντεταγμένες υπό την έννοια πως οι εξισώσεις κίνησης είναι συζευγμένες, δηλαδή εκείνη με την δεύτερη παράγωγο του x ως προς το χρόνο περιέχει και το y , και εκείνη με την δεύτερη παράγωγο του y ως προς το χρόνο περιέχει και το x .

Εστω λοιπόν ότι με τις αναπτυχθείς συντεταγμένες x και y ότι προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 &= -\alpha_{11}x - \alpha_{12}y \quad \text{και} \\ d^2y/dt^2 &= -\alpha_{21}x - \alpha_{22}y \end{aligned} \quad (1)$$

Τώρα, υποθέτουμε, απλά και μόνο ότι έχουμε ταλάντωση με ένα κανονικό τρόπο. Τότε είναι φανερό πως η κίνηση εκάστου από τα δύο σώματα γίνεται απλή αρμονική, με μία ζητούμενη κυκλική συχνότητα ω_i και έτσι δεν συνυπάρχει σε αυτήν συνιστώσα από άλλες κυκλικές συχνότητες $\omega_{j \neq i}$.

Δηλαδή τότε μπορούμε να βάλουμε

$$x(t) = A \cos(\omega_i t + \phi) \quad \text{και} \quad y(t) = B \cos(\omega_i t + \phi)$$

όπου το ω παίρνει εδώ μία μόνο τιμή, ω_i , ενώ οι αντίστοιχοι όροι από τυχόν άλλους τρόπους ταλάντωσης είναι μηδέν.

Συνεπώς, παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο έχουμε

$$d^2x/dt^2 = -\omega_i^2 x \quad \text{και}$$

$$d^2y/dt^2 = -\omega_i^2 y \quad (\text{στη συνέχεια για απλότητα αμελούμε το δείκτη}$$

i)

27

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (1) παίρνουμε δύο ομογενείς γραμμικές εξισώσεις ως προς x και y :

$$(\alpha_{11} - \omega^2)x + \alpha_{12}y = 0 \quad \text{και} \quad (2)$$

$$\alpha_{21}x + (\alpha_{22} - \omega^2)y = 0$$

Από εδώ, οι δύο εξισώσεις που πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα δίνουν για το λόγο y/x :

$$y/x = (\omega^2 - \alpha_{11})/\alpha_{12} \quad \text{και} \quad y/x = \alpha_{21}/(\omega^2 - \alpha_{22}) \quad (2.1)$$

Αρα, λόγω της ισότητας των δύο λόγων y/x παίρνουμε:

$$(\omega^2 - \alpha_{11})/\alpha_{12} = \alpha_{21}/(\omega^2 - \alpha_{22})$$

δηλαδή

$$(\alpha_{11} - \omega^2)(\alpha_{22} - \omega^2) - \alpha_{21}\alpha_{12} = 0 \quad (3)$$

Υπάρχει και άλλη μέθοδος με την ορίζουσα που την εκθέτουμε σε συντομία:

Αυτή έγκειται στο να εξισώσουμε την ορίζουσα του γραμμικού και ομογενούς συστήματος των εξισώσεων (2) με το μηδέν ώστε να έχουμε μη μηδενική λύση για τα x και y :

Τότε οδηγούμαστε πάλι στην εξίσωση (3).

Αυτή είναι μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς το ω^2 , και εν γένει έχει 2 λύσεις, που τις ονομάζουμε ω_1^2 και ω_2^2 . Ετσι, **βρίσκουμε πως υπάρχουν ακριβώς 2 διαφορετικές κυκλικές συχνότητες και άρα 2 διαφορετικοί τρόποι ταλάντωσης**. Σε κάθε έναν από αυτούς τους τρόπους υπάρχει ένας συγκεκριμένος λόγος y/x που προκύπτει από μία οποιαδήποτε από τις εξισώσεις (2.1), π.χ.

$$(y/x)_{\text{τρόπου } i} = \left(\frac{B}{A} \right)_{\text{τρόπου, } i} = (\omega_i^2 - \alpha_{11})/\alpha_{12}, \text{ με } i=1,2$$

Αφού βρήκαμε τις κυκλικές συχνότητες ω_1 και ω_2 , μπορούμε να πούμε πως η γενικότερη κίνηση εκάστου σώματος σε συζευγμένη ταλάντωση προκύπτει ως υπέρθεση των δύο τρόπων, δηλαδή

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = (B_1/A_1) A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + (B_2/A_2) A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (4)$$

Δείτε τώρα και τα σχόλια στο τέλος του αντίστοιχου εδαφίου Κυματικής Berkeley (σελ 24 και 25).

Παρατηρούμε πως . ενώ επιλέγουμε τα A_1, ϕ_1, A_2 και ϕ_2 τελείως αυθαίρετα, δεν είχαμε καθόλου ελευθερία επιλογής όταν έπρεπε να διαλέξουμε τα αντίστοιχα μεγέθη στην εξίσωση (4) που αναφέρονται φυσικά στο δεύτερο σώμα. Τούτο έγινε επειδή η αρχικές φάσεις, ϕ_1 και ϕ_2 , ήταν ήδη καθορισμένες από το πρώτο σώμα, ενώ για τα πλάτη του δεύτερου σώματος: αυτά εξαρτώνται και από τα πλάτη του πρώτου, για έκαστο τρόπο ταλάντωσης, μέσω των σχέσεων (2.1).

28

Ιδιότητες ενός τρόπου ταλάντωσης

(α) Η ταλάντωση η οποία εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή X ή Y ονομάζεται κανονικός τρόπος ταλάντωσης και έχει τη δική του κανονική συχνότητα. Σε ένα τέτοιο τρόπο ταλάντωσης όλα τα κινούμενα μέρη ταλαντώνονται με την ίδια κανονική συχνότητα, και έχουν ένα λόγο πλάτων A/B που λέγεται Σχήμα του τρόπου και τον χαρακτηρίζει.

(β) Η ολική ενέργεια ενός συστήματος χωρίς απόσβεση μπορεί να εκφρασθεί με το άθροισμα των τετραγώνων των κανονικών συντεταγμένων πολλ/σιασμένων με σταθερούς συντελεστές, και το άθροισμα των τετραγώνων των πρώτων παραγώγων των ως προς τον χρόνο πολλ/σιασμένων επί σταθερούς συντελεστές.

(γ) Η σημασία των κανονικών τρόπων ταλάντωσης βρίσκεται στο ότι είναι εντελώς ανεξάρτητοι μεταξύ των. Η ενέργεια συσχετισμένη με τον ένα τρόπο, ποτέ δεν ανταλλάσσεται με εκείνη ενός άλλου τρόπου. Αυτός είναι ο λόγος γιατί μπορούμε να προσθέσουμε την ενέργεια των διαφορετικών τρόπων για να βρούμε τη συνολική ενέργεια.

1. Η έκφραση της κινητικής ενέργειας του συστήματος σε έκαστο τρόπο ταλάντωσης, π.χ. τον τρόπο ω_1 , είναι αρκετά απλή:

$$E_{\text{κιν,1}} = \frac{1}{2} m_1 A^2 \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{1}{2} m_2 B^2 \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \phi_1) = \\ = \frac{1}{2} \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \phi_1) (m_1 A^2 + m_2 B^2)$$

Η κινητική ενέργεια λόγω του τρόπου ταλάντωσης ω_2 είναι

$$E_{\text{κιν},2} = \frac{1}{2} \omega_2^2 \sin^2(\omega_2 t + \varphi_2) (m_1 C^2 + m_2 D^2), \text{ και άρα η συνολική κινητική ενέργεια είναι:}$$

$$E_{\text{κιν,ολική}} = E_{\text{κιν},1} + E_{\text{κιν},2} = \frac{1}{2} \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi_1) (m_1 A^2 + m_2 B^2) + \frac{1}{2} \omega_2^2 \sin^2(\omega_2 t + \varphi_2) (m_1 C^2 + m_2 D^2)$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Εστω ένα σύστημα δύο συζευγμένων εκκρεμών ίσης μάζας και ίσων μηκών που εκτελούν συζευγμένες ταλαντώσεις. Να βρεθούν οι τρόποι ταλάντωσης.

Όταν οι μάζες 2 συζευγμένων εκκρεμών του δεν είναι ίσες, να δείξετε ότι οι εξισώσεις κίνησης είναι :

$$m_1 \ddot{x} = -m_1(g/l)x - s(x-y) \text{ και } m_1 \ddot{y} = -m_1(g/l)y + s(x-y)$$

Στη συνέχεια, επιλέξτε ως κανονικές μεταβλητές την

$X \equiv (m_1 x + m_2 y) / (m_1 + m_2)$ και επιβεβαιώστε ότι πράγματι η ανωτέρω αντιστοιχεί σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης με κανονική συχνότητα που δίνεται από τη σχέση $\omega_1^2 = g/l$, και πως η $Y \equiv x - y$ αντιστοιχεί σε κανονική συχνότητα που δίνεται από τη σχέση

$$\omega_2^2 = g/l + s(1/m_1 + 1/m_2). \text{ Ποιές είναι οι φυσικές σημασίες των } X \text{ και } Y;$$

29

ΑΣΚΗΣΗ 2

Θέμα 1^ο Το σύστημα του σχήματος αποτελείται από δύο σώματα με ίσες μάζες, $m_1 = m_2 = m$, συζευγμένες με ελατήρια σταθεράς $k_1 = k$ και $k_2 = 2k$. Θεωρούμε ότι τα σώματα κινούνται μόνο κατά τη διεύθυνση του πεδίου βαρύτητας.

α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης κάθε σώματος.

β) Υπολογίστε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

(Υπόδειξη: Να γίνει πρώτα ένας γραμμικός μετασχηματισμός των συντεταγμένων θέσης για να απαλειφθεί ο σταθερός όρος από τις εξισώσεις)

Λύση:

Εστω, x_1 και x_2 οι απομακρύνσεις από την θέση ισορροπίας. Ο Νόμος του Νεύτωνα για καθένα από τα 2 σώματα δίνει:

$$\text{Εξ. Κίνησης } m_1: \quad m \ddot{x}_1 = m g - k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2)$$

$$\text{Για } m_2: \quad m \ddot{x}_2 = m g + k_2 (x_1 - x_2)$$

Αν $X_1 \equiv x_1 + a_1$ και $X_2 \equiv x_2 + a_2$, και $\omega_0^2 \equiv k/m$, οι δύο διαφορικές εξισώσεις γίνονται

$$\ddot{X}_1 = -3 \omega_0^2 X_1 + 2 \omega_0^2 X_2 + \dots \text{ και } \ddot{X}_2 = 2 \omega_0^2 X_1 - 2 \omega_0^2 X_2 + \dots$$

Όπου οι \dots έχουν όρους που εξαρτώνται από τα a_1 , a_2 και g . Βάζοντας τις συνθήκες μηδενισμού των όρων αυτών προκύπτουν οι τιμές των a_1 και a_2 , και έτσι έχουμε $a_1 = 2g/\omega_0^2$ και $a_2 = 5mg/(2h)$

$$\ddot{X}_1 = -3 \omega_0^2 X_1 + 2 \omega_0^2 X_2 \quad \text{και} \quad \ddot{X}_2 = 2 \omega_0^2 X_1 - 2 \omega_0^2 X_2$$

Σε έναν τρόπο ταλάντωσης είναι:

$$X_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{και} \quad X_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{Οπότε}$$

$$(\omega^2 - 3\omega_0^2) A_1 + 2 \omega_0^2 A_2 = 0 \quad \text{και} \quad 2\omega_0^2 A_1 + (\omega^2 - 2\omega_0^2) A_2 = 0$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας δίνει

$$\omega_1 = \frac{(5 + \sqrt{17})}{2} \omega_0 \quad \text{και} \quad \omega_2 = \frac{(5 - \sqrt{17})}{2} \omega_0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ταλαντώσεις σε συνεχή μέσα

30

Διάλεξη 5

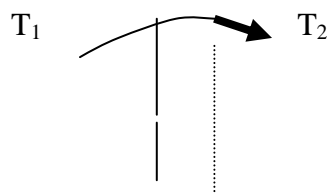
- Εγκάρσιες ταλαντώσεις συνεχούς μέσου
- Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις δύο συζευγμένων ταλαντωτών
- Εγκάρσιες ταλαντώσεις σε σύστημα n διαδοχικών χορδών και μαζών.
- Πόλωση

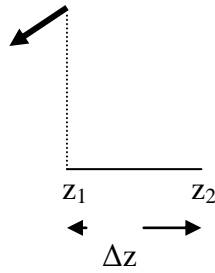
Μία χορδή από ένα ομογενές συνεχές μέσο, υπόκειται σε κάποια μηχανική τάση T όταν είναι οριζόντια, οπότε στιγμιαία την απομακρύνουμε από την ισορροπία με ένα καλούπι, και την αφήνουμε να ταλαντωθεί.

Η θεωρία μπορεί να βρει εφαρμογές σε ταλαντώσεις γεφυρών, πλοίων κλπ.

Εγκάρσιοι τρόποι συνεχούς χορδής

Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης εγκάρσιας απομάκρυνσης $\psi(z,t)$ στις περιπτώσεις των σχετικά χαμηλότερων τρόπων ταλάντωσης, μπορούμε να γράψουμε τις δυνάμεις που ασκούνται εγκάρσια σε ένα τμήμα της χορδής μήκους Δz :





Σχήμα 2.1

Η κατακόρυφη δύναμη είναι

$$F_x(t) = T_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_2 - T_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_1 \quad (1)$$

T_0 - μπαίνει αφού οι οριζόντιες προβολές των 2 δυνάμεων στα δύο άκρα έχουν αντίθετη κατεύθυνση.

Αν όμως θεωρήσουμε τη συνάρτηση της κλίσης, $f(z) = \partial \psi / \partial z$, και την αναπτύξουμε σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο z , και ύστερα θέσουμε $z = z_2$, παίρνουμε

$$f(z_2) = f(z_1) + (z_2 - z_1) \left(\frac{df}{dz} \right)_1 + \dots \text{(όροι ανώτερης τάξης)}$$

31

Ετσι, μπορείτε να δείξετε ότι η Εξ. (1) γίνεται

$$f(z_2) - f(z_1) = \Delta z \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2}$$

και άρα η συνισταμένη της κατακόρυφης δύναμης είναι

$$F_x(t) = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2}$$

και άρα ο Β νόμος του Νεύτωνα για το τμήμα της χορδής μήκους $\Delta z / \cos \theta \approx \Delta z$, και μάζας $\rho_0 \Delta z$, γίνεται

$$\rho_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2}$$

ή

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} \quad (\text{ΚΚΕ})$$

και είναι γνωστή ως κλασική κυματική εξίσωση.

ΚΛΑΣΙΚΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Την ως άνω εξίσωση θα συναντήσουμε πολλές φορές, και αφορά μία γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Θα μάθουμε πολλές ιδιότητες της. Προφανώς η σταθερά T_0/ρ_0 χαρακτηρίζει ειδικά την περίπτωση της χορδής. Σε άλλες περιπτώσεις, κάποια άλλη θετική σταθερά μπαίνει στη θέση της T_0/ρ_0 .

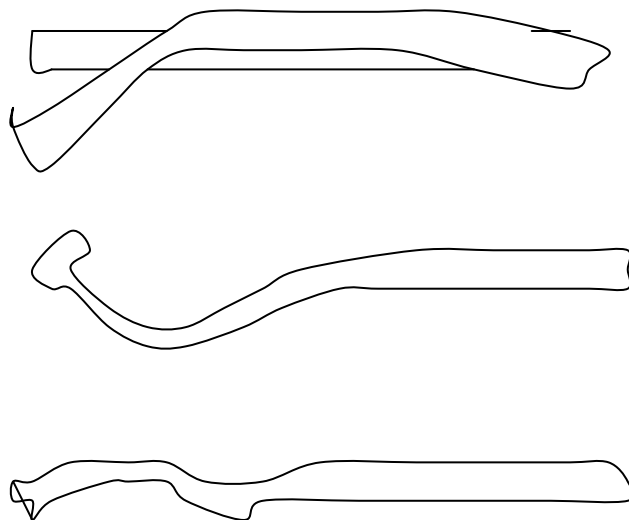
Στάσιμα κύματα

Προσπαθούμε τώρα να βρούμε τους κανονικούς τρόπους -τα στάσιμα κύματα- μιάς συνεχούς χορδής. Πριν όμως δούμε αυτό το θέμα, ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα, τους τρόπους ταλάντωσης της ράβδου του μπίτζ μπόλ, όπως φαίνεται στα σχήματα πιο κάτω.

Συμπληρωματικό σημείωμα

32

Παρατηρούμε πιο κάτω τον 1ο τρόπο, 2ο τρόπο και 3ο τρόπο ταλάντωσης ράβδου μπίτζ μπόλ



Βλέπουμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη του τρόπου, τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των κόμβων που παρουσιάζουν τα αντίστοιχα σήματα της ράβδου. Θέτουμε στην αρχή το παράδειγμα αυτό για να φανεί το πλήθος των φαινομένων για τα οποία πρέπει να μπορεί η κυματική εξίσωση να δώσει λύση.

Είναι φανερό ότι αναζητώντας έκαστο τρόπο ταλάντωσης της συνεχούς χορδής, θα πρέπει να έχουμε κάθε στοιχειώδες τμήμα της μήκους ds να εκτελεί εγκάρσια κίνηση με την ίδια κυκλική συχνότητα ω , και την ίδια σταθερά φάσης ϕ , ενώ το πλάτος $A(z)$ του αντίστοιχου τμήματος της χορδής που περιορίζεται στο διάστημα z ως $z+dz$ μπορεί να μεταβάλλεται με το z . Μία λύση, για ένα τρόπο ταλάντωσης, μπορεί να έχει τη μορφή

$$\psi(z,t) = A(z) \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

Όπως και στην περίπτωση χορδή με διάκριτες ίσες και ισαπέχουσες μάζες, όπου η μορφή του

τρόπου $A_1: A_2: \dots A_r: A_N$ εξαρτάται από την κυκλική συχνότητα ω_n , εδώ στην περίπτωση συνεχούς κατανομής μάζας, η μορφή του τρόπου εξαρτάται από την κυκλική συχνότητα του τρόπου ταλάντωσης, ω_n . Για να προχωρήσουμε στην ανεύρεση του $A(z)$, προσδιορίζουμε από τη σχέση (1) την επιτάχυνση, και αντικαθιστούμε στην κλασική κυματική εξίσωση. Τότε έχουμε

33

..
 $\psi(z,t) = -\omega^2 \psi(z,t) = -\omega^2 A(z) \cos(\omega t + \phi)$, και έτσι η (ΚΚΕ) δίνει

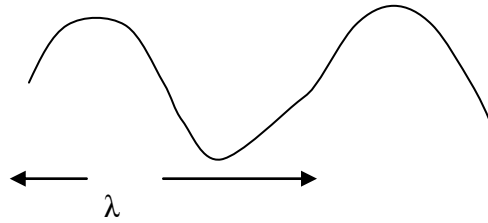
$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -\omega^2 \frac{\rho_0}{T_0} A(z) \quad (1)$$

Η εξ. (2) έχει τη μορφή διαφορικής εξίσωσης αρμονικών ταλαντώσεων. Το σχήμα εξαρτάται από τη θέση z , και όχι το χρόνο!

Μία λύση για το σχήμα θα έχει τη μορφή

$$A(z) = A \sin(2\pi z/\lambda) + B \cos(2\pi z/\lambda) \quad (2)$$

όπου λ παριστάνει μία σταθερά που περιγράφει το διάστημα εντός του οποίου γίνεται μία πλήρης ταλάντωση. Το λ λέγεται "μήκος κύματος".



Σχήμα 2.2

Η παράμετρος αυτή χαρακτηρίζει ταλαντώσεις στο χώρο, και μετριέται σε μέτρα. Κατ' ανάλογο τρόπο, η παράμετρος T χαρακτηρίζει ταλαντώσεις στο χρόνο, και είναι γνωστή ως "περίοδος".

Η συνθήκη για να είναι η (2) λύση της Εξ. (1) είναι κατ' ανάγκη

$$(2\pi/\lambda)^2 = \omega^2 (\rho_0/T_0) = (4\pi^2 v^2) (\rho_0/T_0) \rightarrow \lambda v = \sqrt{T_0/\rho_0} = v_0 \quad (2)'$$

Το v_0 έχει διαστάσεις ταχύτητας και είναι γνωστό ως *ταχύτητα φάσης οδεύοντων κυμάτων* μέσα στη χορδή. Στη μελέτη των στασίμων κυμάτων που τώρα κάνουμε, η έννοια της ταχύτητας δεν είναι απαραίτητη, γιατί τα στάσιμα κύματα δεν πηγαίνουν πουθενά. Παραμένουν στο ίδιο μέρος, και η χορδή πάλλεται σαν ένας μεγάλος καταναμημένος αρμονικός ταλαντωτής.

Η γενική λύση για τη μετατόπιση $\psi(z,t)$ σε ένα συγκεκριμένο τρόπο (στάσιμο κύμα) προκύπτει αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (1) και (2), οπότε έχουμε

34

$$\psi(z,t) = \cos(\omega t + \phi) (A \sin(2\pi z/\lambda) + B \cos(2\pi z/\lambda)) \quad (3)$$

Οριακές συνθήκες

Αν θέλουμε τα άκρα της χορδής να είναι ακίνητα, τότε η Εξ. (3) γίνεται για $z=0$:

$$B \cos(0) = 0 \rightarrow B=0, \text{ άρα για } z=L, \text{ (το μήκος της χορδής είναι ίσο με } L),$$

$$\psi(L,t) = A \sin(2\pi L/\lambda) = 0 \quad \forall t \rightarrow 2\pi L/\lambda = m\pi, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \rightarrow$$

άρα

$$\lambda_1 = 2L, \lambda_2 = (1/2)\lambda_1, \lambda_3 = (1/3)\lambda_1, \text{ κλπ} \quad (4)$$

Άρα, γενικά είναι: $\lambda_m = 2L/m, \quad m=1,2,3,\dots$

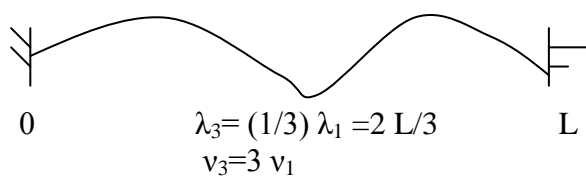
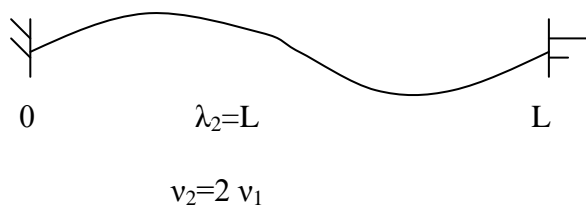
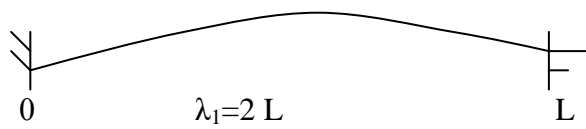
Λόγοι αρμονικών συχνοτήτων

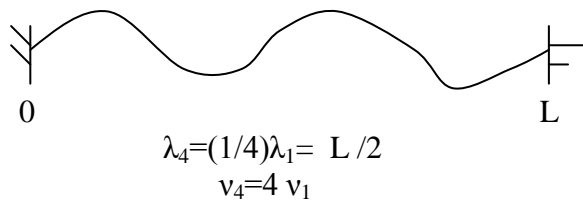
Λόγω της σχέσης (2)', η Εξ. (4) δίνει $v_n = n v_1, \quad n=1, 2, 3, \dots$

Οι συχνότητες $2v_1, 3v_1, \text{ κλπ}$ λέγονται ανώτερες αρμονικές, ενώ η v_1 λέγεται *θεμελειώδης* συχνότητα. Η σχέση αυτή της αναλογίας είναι αποτέλεσμα της παραδοχής πως η χορδή είναι απόλυτα ομοιόμορφη και απόλυτα εύκαμπτη. Στα περισσότερα φυσικά συστήματα, όπως στην χορδή πιάνου, μπορούμε να έχουμε, π.χ., $v_2 = 2.78 v_1, v_3 = 4.62 v_1$ κλπ.

Οι ιδανικές χορδές έχουν τα εξής σχήματα:

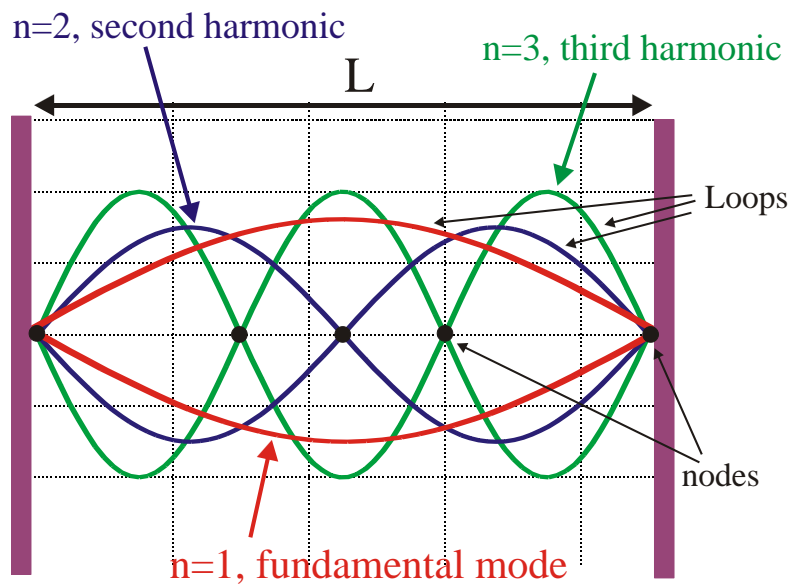
35





Standing Waves on a clamped String

36



Σχήμα: Στο ως άνω σχήμα φαίνονται παραστατικά, ο θεμελιώδης, και οι δύο επόμενοι τρόποι ταλάντωσης σε χορδή με ακλόνητα τα δύο άκρα

Κυματικός αριθμός

Μπορούμε να ορίζουμε ένα ακόμη χρήσιμο μέγεθος σ , που πρακτικά είναι το αντίστροφο του μήκους κύματος, και είναι γνωστό ως *κυματικός αριθμός*,

$$\sigma = 1/\lambda \quad (5)$$

και εκφράζεται σε "κύκλους ανά μέτρο". Ο κυματικός αριθμός πολλαπλασιαζόμενος επί 2π είναι γνωστός ως *γωνιακός κυματικός αριθμός*, k .

$$k = 2\pi/\lambda \quad (6)$$

Παρά τους ορισμούς αυτούς, στη συνέχεια, για το παρόν μάθημα όταν λέμε κυματικός αριθμός θα εννοούμε το k , δηλαδή τον γωνιακό κυματικό αριθμό. Παρόλη την πρακτική στο παρόν εξάμηνο, προειδοποιούμε τους μέλλοντες φασματοσκόπους ότι συχνά θα βρίσκουν στη βιβλιογραφία και στα τεχνικά εγχειρίδια συσκευών να γίνεται χρήση του ορισμού (5) και να ονομάζεται το μέγεθος αυτό κυματαριθμός ή στα Αγγλικά wavenumber. Καλό είναι, λοιπόν, να είμαστε προσεκτικοί με το τί εννοούμε όταν μιλάμε για κυματαριθμό.

Η σχέση (3) με βάση το νέο μέγεθος γίνεται

$$\psi(z,t) = \cos(\omega t + \phi) (A \sin(kz) + B \cos(kz)) \quad (6)$$

και έτσι βλέπουμε πως γίνεται αρκετά απλούστερη από άποψη εμφάνισης από την Εξ.(3)!

Στην ειδική περίπτωση όπου τα δύο άκρα της χορδής είναι σταθερά είναι

37

Αναφορές

1. Torsional vibrations: <http://www.lafavre.us/torsionTraces.htm> (μουσική)
2. Τρόποι ταλάντωσης : http://www.physics.cornell.edu/courses/p204/lectures2005/Lecture02_05.pdf
3. Τρόποι ταλάντωσης υποβρυχίου: <http://www.mech.port.ac.uk/CTFR/Silsub4.html>
4. Ακκορτεόν : <http://www.ia.csic.es/Sea/sevilla02/mus04009.pdf>
5. Advanced Lab : <http://nebula.physics.uakron.edu/academic/syllabus/advanlab.htm>
6. Ανάλυση ταλαντώσεων: <http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/summary/110526310/SUMMARY>
7. Σεισμοί και γεφυρές: http://cee.oregonstate.edu/workshops/tubitak/reports/chadwell_near_source.pdf

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

Το θέμα αυτό ξεφεύγει από τις ελεύθερες ταλαντώσεις αλλά συνδέεται και με τις συζευγμένες ταλαντώσεις που θα δούμε αμέσως πιο κάτω. Ας φαντασθούμε σαν παράδειγμα την γνωστή αιώρα, όπου ένα παιδί εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις. Τότε, έστω πως κάποια χρονική στιγμή ασκούμε στο παιδί μία περιοδική δύναμη, $F_0 \cos \omega t$.

Τότε, η εξίσωση κίνησης γίνεται

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos \omega t \quad (1)$$

Ακόμη απλούστερο πρόβλημα είναι εκείνο ενός οριζοντίου ελατηρίου με μία μάζα m στο άκρο του, ενώ τα άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε τοίχωμα, και έστω πως εκτελεί

ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς τριβή. Αν κάποια στιγμή ασκήσουμε τη δύναμη $F_0 \cos \omega t$, τότε η διαφορική Εξίσωση κίνησης θα είναι η (1), με $\omega_0^2 = s/m$.

Ποια είναι η έκφραση του ω_0 στην περίπτωση της αιώρας;

Για τη λύση της (1), θεωρούμε πρώτα την περίπτωση όπου $\omega \gg \omega_0$, οπότε μετά από πολύ ώρα, θα έχουμε την μόνιμη κατάσταση όπου το πλάτος της ελεύθερης ταλάντωσης έχει πρακτικά μηδενισθεί λόγω τριβών, ενώ θα έχουμε μία απόκριση λόγω της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, $x = C \cos \omega t$, όπου το ω είναι μία ζητούμενη παράμετρος.

Η (1) τότε δίνει

$$-\omega^2 C \cos \omega t + \omega_0^2 C \cos \omega t = (F_0/m) \cos \omega t,$$

και .α.ρα

$$C = \frac{1}{m} \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Παρατηρούμε πως για $\omega < \omega_0$, το C είναι θετικό ενώ για $\omega > \omega_0$, το C είναι αρνητικό. Με άλλα λόγια, στην δεύτερη περίπτωση, η εξαναγκασμένη απομάκρυνση είναι αντίθετου πρόσημου προς τη δύναμη (και την επιτάχυνση).

-Σχέσεις Φάσης

- Συντονισμός

38

Σχέση των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων με τις συζευγμένες ταλαντώσεις.

Όπως θα δούμε, έχουμε την δυνατότητα συζευγμένης κίνησης όταν έχουμε δύο κατά τα άλλα αρμονικούς ταλαντωτές που όμως συνδέονται μεταξύ των με ελατήριο ή άλλο μηχανισμό αλληλεπίδρασης. Τώρα τα πράγματα είναι προφανώς πιο πολύπλοκα διότι η δύναμη που ασκείται στον ταλαντωτή (1) από τον ταλαντωτή (2) δεν δίνεται από την απλή περιοδική σχέση όπως η $F_0 \cos \omega t$, αλλά πρέπει να την προσδιορίσουμε στην πορεία.

Θα εφαρμόσουμε άλλη στρατηγική για την επίλυση αυτού του προβλήματος και όχι αυτή που εφαρμόσαμε παραπάνω στις εξαναγκασμένες ταλάντωσης ενός ταλαντωτή.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις και συντονισμός για 2 συζευγμένους ταλαντωτές

Από διαίσθηση αναμένουμε πως θα υπάρχουν μεγάλα πλάτη ταλάντωσης όποτε η εξωτερική συχνότητα είναι πολύ κοντά σε μία από τις ιδιο-συχνότητες του συστήματος. Ας δούμε πως προκύπτει, με λεπτομέρεια, το αποτέλεσμα αυτό.

Είναι

$$m\ddot{x}_A + m\omega_0^2 x_A + k(x_A - x_B) = F_0 \cos \omega t$$

και

$$m\ddot{x}_B + m\omega_0^2 x_B - k(x_A - x_B) = 0 \quad (\omega_0^2 = g/l)$$

Εισάγουμε τις κανονικές συντεταγμένες, $q_1 = x_A + x_B$, και $q_2 = x_A - x_B$, οπότε

$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = (F_0/m)\cos\omega t$$

και

$$\ddot{q}_2 + \omega'^2 q_2 = 0, \text{ με } \omega'^2 = \omega_0^2 + 2\omega_C^2 \quad (\omega_C^2 = k/m)$$

Βλέπουμε σημαντική απλοποίηση του προβλήματος.

Με αντικατάσταση, προκύπτει πως οι λύσεις μόνιμης κατάστασης μπορεί να προκύψουν ως

$$q_1 = C \cos\omega t, \quad q_2 = D \cos\omega t$$

$$\text{όπου } C = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1)$$

και

$$D = \frac{F_0/m}{\omega_0'^2 - \omega^2} \quad (2)$$

Τα πλάτη C και D δείχνουν το είδος συντονισμού που είδαμε και στην περίπτωση ενός εξαναγκασμένου αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση.

Για τις πραγματικές απομακρύνσεις x_A και x_B έχουμε

$$x_A = A \cos\omega t \quad \text{και} \quad x_B = B \cos\omega t, \quad \text{όπου } A = (1/2)(C + D) \quad \text{και} \quad B = (1/2)(C - D)$$

Οι εκφράσεις των A και B συναρτήσει των C και D δίνονται λόγω των Εξ.(1) και (2)

ως

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 + \omega_C^2) - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0'^2 - \omega^2)}$$

και

$$B(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_C^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0'^2 - \omega^2)}$$

Ταλαντώσεις με μεγάλο πλήθος ίσων συζευγμένων μαζών

Ας θυμηθούμε τη συζήτηση που είχαμε κάνει σε προηγούμενο μάθημα:

Ας δούμε πρώτα την πρώτη περίπτωση, όπου θα θεωρήσουμε την αρκετά καλής εποπτείας περίπτωση των εγκάρσιων ταλαντώσεων σε ένα σύστημα χορδής με τρεις ή περισσότερες ίσες μάζες που συνδέονται μεταξύ των με αβαρή ελατήρια ίσης σταθεράς k .

Όπως έχουμε δει και στην περίπτωση, συζευγμένων ταλαντώσεων σε συστήματα με δύο ταλαντωτές, η κίνηση εκάστου μέρους, a, b, c, d, \dots μπορεί να περιγραφεί με της απομακρύνσεις, $\psi_a(t), \psi_b(t), \psi_c(t), \psi_d(t) \dots$. Κάθε ΚΤΤ (Κανονικός Τρόπος Ταλάντωσης) χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι έκαστη απομάκρυνση, $\psi_i(t)$, διέπεται από την ίδια κυκλική συχνότητα, ω_j , και μία αντίστοιχη γωνία φάσης, ϕ_j , που εξαρτάται μεν από τις αρχικές συνθήκες, αλλά είναι η ίδια σε όλα τα κινούμενα μέρη:

$$\psi_a(t) = A \cos(\omega_j t + \phi_j), \psi_b(t) = B \cos(\omega_j t + \phi_j), \psi_c(t) = C \cos(\omega_j t + \phi_j), \text{ κλπ}$$

και μάλιστα, χαρακτηρίζεται από έναν *σηματισμό*, όπως λέμε, που είναι, π.χ., $A : B : C : \dots = 1 : 0 : -2 : \dots$

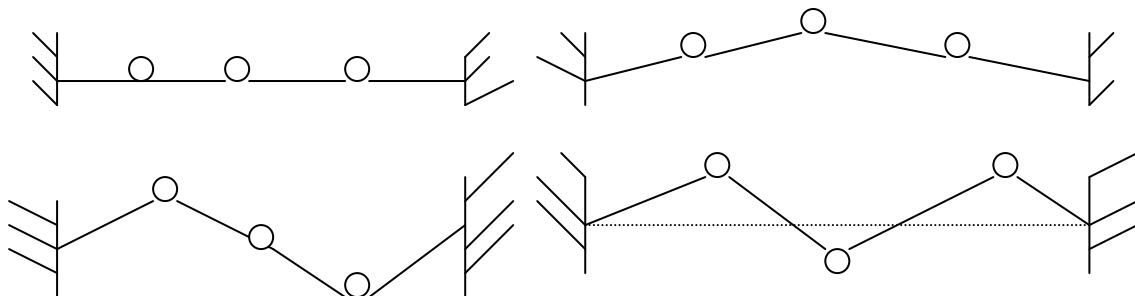
Ο σηματισμός είναι χαρακτηριστικός (και εν γένει διαφορετικός) εκάστου ΚΤΤ. Έτσι, για τον τρόπο, π.χ. j , είναι:

40

$$\psi_a(t) = A \cos(\omega_j t + \phi_j), \psi_b(t) = 0, \psi_c(t) = -2 A \cos(\omega_j t + \phi_j), \text{ κλπ}$$

Πρέπει, εδώ να σημειωθεί πως η τιμή του A , για έκαστο τρόπο ταλάντωσης, επίσης εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Η τιμή του A σχετίζεται μάλιστα με την αρχική συνολική ενέργεια του συστήματος των μαζών μολονότι η μορφή του σηματισμού είναι χαρακτηριστική της τάξης j , του τρόπου. Ο σηματισμός κάθε τρόπου εξαρτάται, με τη σειρά του, από τις τιμές των παραμέτρων m_i, k_i , για $i=1,2,\dots,n$. Σε ειδικές απλουστευμένες περιπτώσεις, μπορεί να συμβεί να είναι όλα τα m_i , ίσα μεταξύ των, καθώς και όλα τα k_i επίσης ίσα μεταξύ των.

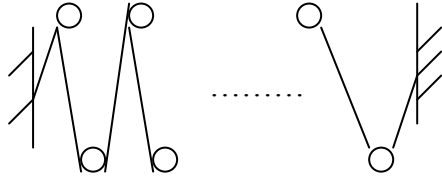
Ας δούμε λοιπόν στην περίπτωση εγκάρσιων ταλαντώσεων σε χορδή με τρεις ίσες μάζες, και ελατήρια τα *σχήματα* των διάφορων τρόπων ταλάντωσης :



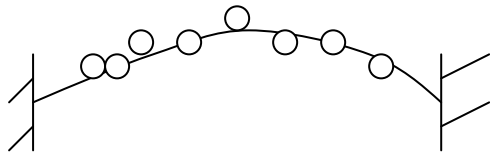
Τα ως άνω σχήματα, παριστάνουν την κατάσταση ηρεμίας, και τα σχήματα 1^{ου}, 2^{ου} και 3^{ου} τρόπου ταλάντωσης σε χορδή με 3 σώματα και 4 ελατήρια, τα δύο ακραία

ελατήρια βρίσκονται στερεωμένα σε αντίστοιχα τοιχώματα, και τούτο αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Στην περίπτωση μιάς γραμμικής διάταξης n - μαζών, με ίσες αποστάσεις, ο n -στος τρόπος ταλάντωσης θα αντιστοιχεί στον σχηματισμό ζιγκ-ζαγκ, όπως φαίνεται στο σχήμα,



Ενώ, για τον 1^ο τρόπο ταλάντωσης, θα έχουμε τον σχηματισμό που θα θυμίζει μισή περίοδο ημιτονικής ταλάντωσης:



Μπορείτε, να αναζητήσετε τις μορφές των σχηματισμών για τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης για χορδή με 4, 5, ... n μάζες, και αντίστοιχα $n+1$ ελατήρια.

41

Ποσοτική περιγραφή των ταλαντώσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

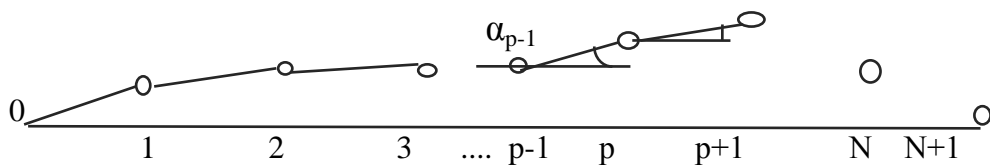
Συζευμένες ταλαντώσεις χορδής με N -σφαιρίδια

Οδεύοντας προς πλέον πολύπλοκα αλλά ωστόσο ακόμα γραμμικά συστήματα (δηλαδή μονοδιάστατα) μπορούμε πλέον να δούμε ότι σιγά σιγά υπεισέρχονται νέες έννοιες όπως αυτής στην οποία η **κυκλική συχνότητα παύει να είναι γραμμική συνάρτηση του μήκους κύματος**. Αυτά έχουν μεγάλη σημασία για πραγματικά συστήματα τόσο με συνεχή όσο και ασυνεχή κατανομή μάζας.

Ας δούμε πιο συγκεκριμένα την περίπτωση ίσων μαζών m που είναι τοποθετημένες με γραμμική διάταξη που χαρακτηρίζεται από απόσταση a μεταξύ διαδοχικών σφαιρών, σε μία χορδή που έχει αμελητέα μάζα.

Για μικρές αρμονικές ταλαντώσεις που γίνονται σε ένα επίπεδο, θα θέλαμε να βρούμε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

Αν y_r είναι η ταλάντωση της r -στης μάζας, αυτή σπρώχνεται προς τα κάτω προς το σημείο ισορροπίας από δυνάμεις $T \dots$



Σχήμα 3.1

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο υπ αριθμόν p σωματίδιο έχουν οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες. Τα τμήματα χορδής ανάμεσα στις μάζες έχουν εν γένει μήκη

$l' = l / \cos \alpha_1$ κλπ. Είναι $\cos \alpha_1 = 1 - \alpha_1^2/2$ και $l' = l (1 + \alpha_1^2/2)$, άρα η αύξηση μήκους είναι ανώτερης τάξης και αμελείται.

Έτσι, η οριζόντια συνισταμένη είναι

$T (-\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) = \frac{1}{2} T (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)$. Αυτή είναι αμελητέα και έτσι θα θεωρήσουμε μόνο κατακόρυφη κίνηση.

Στον κατακόρυφο άξονα, η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$m \ddot{y}_p = - T(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) = - (T/ma) [(y_p - y_{p-1}) + (y_p - y_{p+1})] \quad (\text{Εγκάρσ. 1}) \quad (\text{AA})$$

Στη γενικότερη περίπτωση δεχόμαστε ότι τα σωματίδια είναι N το πλήθος και έкаστη αρμονική ταλάντωση έχει έκφραση

$$y_p = A_p \cos \omega t.$$

Προκύπτουν έτσι, N - εξισώσεις που περιέχουν το ω και τα πλάτη A_r .

Ειδικότερα, έχουμε μία εξίσωση όπου στο δεύτερο μέρος βρίσκεται ο άγνωστος ω και η κυκλική συχνότητα $\omega_0 = (T/\mu a)^{1/2}$

43

$$\frac{A_{r-1} + A_{r+1}}{A_r} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2}$$

$r=1,2,\dots,N$

Διάλεξη 6

- Εγινε Ασκηση 3.11 από το βιβλίο του Pain
- Εγινε το πρώτο θέμα της επαναληπτικής εξέτασης ΣΕΜΦΕ Σεπτεμβριος 2005.

Εισαγωγή: Κύματα βαρύτητας

LIGO Experiment: <http://www.eleves.ens.fr/home/ourjoumt/ligo40m.pdf>

Διάλεξη 7

Περιλαμβάνει:

1. Διακροτήματα

2.. Εξαναγκασμένες αρμονικές ταλαντώσεις μιάς τεντωμένης χορδής

3. Ασκήσεις

Διακροτήματα

Ως τώρα στη συζήτηση των τρόπων ταλάντωσης ενός συστήματος με 2 ή περισσότερους βαθμούς ελευθερίας, θεωρήσαμε κίνηση εκάστου σώματος (όταν το σύστημα δεν εκτελεί ένα συγκεκριμένο τρόπο ταλάντωσης) ως γραμμική επαλληλία των 2 τρόπων ταλάντωσης:

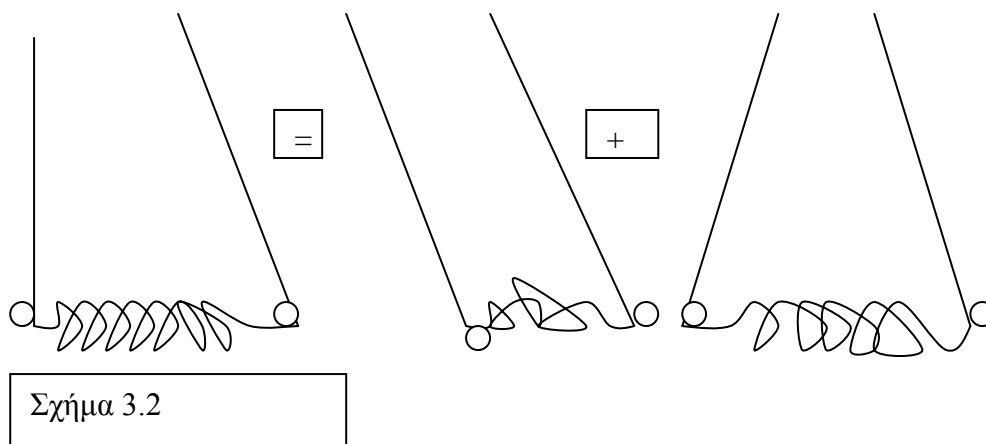
$$y(t)=1/2 (X+Y)= a \cos(\omega_1 t) + a \cos(\omega_2 t) \quad (1)$$

$$x(t)= 1/2 (X-Y)= a \cos(\omega_1 t) - a \cos(\omega_2 t) \quad (2)$$

αν $X_0=Y_0=2a$ και $\varphi_1=\varphi_2=0$

Ας θέσουμε τώρα το σύστημα σε κίνηση, μετατοπίζοντας τη δεξιά μάζα κατά την απόσταση $x=2a$ και αφήνοντας τις δύο μάζες να εκτελέσουν ταλαντώσεις.

45



Τότε οι Εξ.(1) και (2) δίνουν:

$$x=2 a \cos[(\omega_2-\omega_1)/2] \cos[(\omega_1+\omega_2)/2]$$

και

$$y=2 a \sin[(\omega_2-\omega_1)/2] \sin[(\omega_1+\omega_2)/2]$$

Δείτε τότε και τη γραφική παράσταση των δύο μεταβλητών θέσης μέσα στο χρόνο.

Παρατηρούμε πως ενέργεια μεταδίδεται με βραδύ ρυθμό από την μία μάζα στην άλλη, ενώ οι δύο τρόποι ταλάντωσης $X(t)$ και $Y(t)$ δεν ανταλλάσσουν μεταξύ των ενέργεια.

Αυτές δίνουν τον "σχηματισμό" εκάστου τρόπου ταλάντωσης. Οι κανονικές συντεταγμένες προκύπτουν ως $\psi_1=(1/2) (\psi_a+\psi_b)$, και $\psi_2=(1/2) (\psi_a-\psi_b)$, όπως μπορείτε εύκολα να δείξετε.

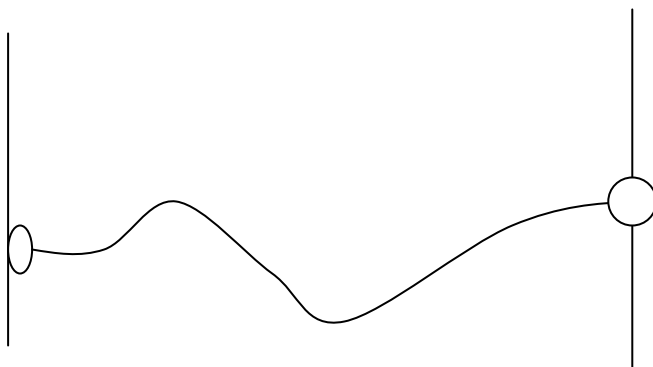
Τα διακριτότητα χρησιμοποιούνται συχνά για μέτρηση φυσικών μεγεθών με ακρίβεια.

Εγινε μία άσκηση :

Θέμα Σεπτεμβρίου 2005:

Να βρεθεί και να γραφεί η απομάκρυνση $y(x,t)$ σε τυχόν σημείο χορδής με άκρα που καταλήγουν σε αβαρείς δακτυλίους που μπορούν να γλιστρούν χωρίς τριβή σε αντίστοιχους στήλους Η χορδή είναι τεντωμένη με τάση T και έχει γραμμική πυκνότητα ρ .

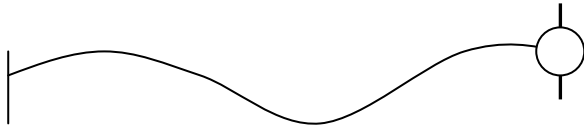
46



Σχήμα 3.3

Άλλες συνοριακές συνθήκες:

Σαν παράδειγμα, μπορεί να θεωρήσουμε πως έχουμε την συνοριακή συνθήκη για $z=0$ ότι εκεί είναι $\psi(z)=0$, ενώ στη θέση $z=L$, η χορδή είναι σε επαφή με ένα τελείως λείο αβαρή κρίκο που μπορεί να ολισθαίνει σε ένα στήλο χωρίς τριβή.



Σχήμα 3.4

47

Συνεπώς, η κατακόρυφη δύναμη που θα δέχεται από το στήλο η χορδή θα μηδενίζεται στη θέση $z=L$. Θα είναι δηλαδή $m \psi'' = 0 = T d\psi/dz$, με $m=0$. Άρα, $d\psi/dz|_L = 0$.

Τούτο σημαίνει πως η χορδή είναι οριζόντια για $z = L$.
Άρα, η απομάκρυνση είναι

$\psi(z,t) = A \cos(\omega t + \theta) \cos(kz + \phi)$, με $\cos(kL + \phi) = 0$, άρα $\phi = \pi/2, 3\pi/2$ κλπ.

Συνεπώς, $\psi(z,t) = A \cos(\omega t + \theta) \sin(kz)$,

Επιπλέον δε, $d\psi(z,t)/dz|_{z=L} = 0$, άρα $\cos(k_n L) = 0$, άρα $k_n L = (2n+1)\pi/2$.

Έτσι,

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega t + \theta) \sin\left[\frac{\pi}{L} (n+1/2)z\right]$$

με $\omega = \omega_n = c k_n$

Έγιναν οι φθίνουσες ταλαντώσεις ενός αρμονικού ταλαντωτή (από του Berkeley, Κυματική)

Διάλεξη 8

1. Εξαναγκασμένος αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση
2. Νέα Θέματα για παρουσίαση
3. Παραδείγματα

3. Εξαναγκασμένος αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση(συνέχεια)

Μία ανεξάρτητη λύση του αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση είναι η

$$x_1(t) = \exp[-t/(2\Gamma)] (A_1 \sin\omega_1 t + B_1 \cos\omega_1 t) \quad (1),$$

$$\text{όπου } \omega_1^2 = \omega_0^2 - \Gamma^2/4$$

Για $t=0$, $x_1(0)=B_1$, και $\omega_1 A_1 = \dot{x}_1(0) + \Gamma x_1(0)/2$

Τότε η (1) δίνει

$$x_1(t) = \exp[-t/(2\Gamma)] \{x_1(0) \cos\omega_1 t + [\dot{x}_1(0) + 1/2 \Gamma x_1(0)] \sin\omega_1 t / \omega_1 \} \quad (7)$$

Όταν $\omega_1 = \Gamma/2$, τότε έχουμε **κρίσιμη απόσβεση**. Τότε στην (7) μπορούμε να βάλουμε $\cos\omega_1 t \approx 1$, και

$$\sin\omega_1 t / \omega_1 \approx t$$

Συνεπώς,

$$x_1(t) = \{x_1(0) + [\dot{x}_1(0) + 1/2 \Gamma x_1(0)] t \} \quad (8)$$

Όταν $\omega_0 < \Gamma/2$, τότε όπως αποδεικνύεται

$$x_1(t) = \exp[-t/(2\Gamma)] \{x_1(0) \cosh|\omega_1|t + [\dot{x}_1(0) + 1/2 \Gamma x_1(0)] \sinh|\omega_1|t / |\omega_1| \} \quad (7)$$

Όταν $\omega_1 = \Gamma/2$, τότε έχουμε την **κρίσιμη απόσβεση**

Εστω πως υπάρχει και η εξωτερική δύναμη $F_0 \cos\omega t$

Τότε, θεωρούμε πως στη μόνιμη κατάσταση θα έχουμε μία λύση x_s ,

$x_s = A \cos\omega t + B \sin\omega t$, ώστε να προβλέψουμε την δυνατότητα η κίνηση να έχει διαφορά φάσης με την εξωτερική δύναμη. Με αντικατάσταση στην διαφορική εξίσωση κίνησης, βρίσκουμε πως αυτή η έκφραση την ικανοποιεί, αν και μόνο αν:

$$A = \frac{F_0}{M} \frac{\Gamma\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2]} \equiv A_{ab}$$

Και

$$A = \frac{F_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}{M [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2]} \equiv A_{\text{elastic}}$$

Παράδειγμα αππλετ εξαναγκασμένων ταλαντώσεων

<http://www.netzmedien.de/software/download/java/oszillator/>

Εγιναν το παράδειγματα:

1. Λόγος ιδιοσυχνοτήτων διατομικών μορίων μαζών (m_1, m_2) και (m_1', m_2') , αντίστοιχα (λόγω διαφορετικών ισοτόπων των ατόμων), όταν υποθέσουμε πως στο μόριο έχουμε ταλαντώσεις της απόστασης μεταξύ των μορίων $x_2 - x_1$ μικρού πλάτους, ενώ δεχόμαστε πως η ύπαρξη διαφορετικού αριθμού νετρονίων στα διαφορετικά ισότοπα δεν αλλοιώνει την εξάρτηση της ελκτικής δύναμης μεταξύ των ατόμων. Τούτο δηλαδή ισχύει για πολύ μικρά $x = x_2 - x_1$.

2. Να βρείτε τη συχνότητα ταλαντώσεων σωματιδίου μάζας m που είναι ελεύθερο να κινείται κατά μήκος ευθείας γραμμής, και είναι προσδεμένο σε ελατήριο του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο στο σταθερό σημείο A (Βλέπετε σχήμα), σε απόσταση l από την κατεύθυνση προς την οποία γίνεται η ταλάντωση. Σημειώνεται πως απαιτείται δύναμη F για να εκταθεί το ελατήριο σε μήκος l . Δεχόμαστε πως το πλάτος απομάκρυνσης x από την κατακόρυφη θέση είναι πολύ μικρότερο του l .

Συντονισμός

Είδητε το παράδειγμα

<http://www.shep.net/resources/curricular/Physics/java/physengl/resonance.html>

Εξάσκηση με applet:

<http://www.walter-fendt.de/ph11e/resonance.htm>

50

Lecture 9 (31-10-05)

Για την επίλυση της μη ομογενούς εξίσωσης, μπορούμε να γράψουμε την λεγόμενη Λαγκρανζιανή του φαινομένου,

$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 + xF(t)$ ενώ η αντίστοιχη εξίσωση κίνησης είναι

$$m \ddot{x} + kx = F(t)$$

$$m \ddot{x} + m\gamma \dot{x} = -sx + F_0 e^{i\omega t} \quad \rightarrow \quad \rightarrow$$

Λύνοντας ως προς το διάνυσμα x έχουμε το μέτρο όσο και τη φάση.

Αν $x = A \exp(i\omega t)$

$$(-A\omega^2 m + i\omega A\gamma + A s) \exp(i\omega t) = F_0 e^{i\omega t} = (-A\omega^2 m + i\omega m A\gamma + A\omega_0^2 m)$$

Ισχύει για κάθε τιμή του χρόνου αν

$$|A| = \frac{F_0}{m [(\omega\gamma)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2]^{1/2}}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε πως το \mathbf{A} έχει μια διαφορά φάσης ως προς το $F_0 \cos \omega t$, τότε θα είναι

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| e^{i(\omega t - \delta)}$$

Τώρα, από την αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών βάση διανυσμάτων, προκύπτει εύκολα πως

$$\tan \delta = \frac{\omega \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Πράγματι, είναι:

$$\mathbf{A} = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{m \ i\omega \gamma + (\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{F_0 e^{i\omega t} (-i\omega \gamma + (\omega_0^2 - \omega^2))}{m \ (\omega \gamma)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

$$\mathbf{A} = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{m} \frac{z_0 e^{-i\delta}}{z_0} \quad (2)$$

όπου

$$z_0 = [(\omega \gamma)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2]^{1/2}$$

51

Συνεπώς, η (2) δίνει

$$\mathbf{A} = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{m} \frac{e^{-i\delta}}{[(\omega \gamma)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2]} =$$

$$\mathbf{A} = \frac{F_0 e^{i(\omega t - \delta)}}{m [(\omega \gamma)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2]} =$$

$$\text{με } \tan \delta = [\omega \gamma / (\omega_0^2 - \omega^2)]$$

Ασκήσεις

Pain

Λύση:

Όπως φαίνεται στο Σχ. 3.3. είναι

$x = 2a \cos \omega_m t \cos \omega_a t$, $y = 2a \sin \omega_m t \sin \omega_a t$, . Για κάποια στιγμή έχουμε τα πλάτη και άρα οι ενέργειες είναι

$$E_x = (1/2) s (2a \cos \omega_m t)^2 = 2 m \omega^2 \cos^2 \omega_m t$$

και

$$E_y = (1/2) s (2a \sin \omega_m t)^2 = 2 m \omega^2 \sin^2 \omega_m t$$

Η ολική ενέργεια για μικρό s είναι

$$E = E_x + E_y = 2 m a^2 \omega_a^2$$

Ηλεκτρομαγνητικές Ταλαντώσεις

Άσκηση 2

(α) Σε ένα ταλαντευόμενο κύκλωμα LC, ποιά τιμή φορτίου, εκφραζόμενη συναρτήσει του μεγίστου φορτίου, θα υπάρξει στον πυκνωτή όταν η ενέργεια μοιράζεται εξ ίσου μεταξύ ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου; (β) Πόσος χρόνος απαιτείται για να ικανοποιηθεί αυτή η συνθήκη, αν υποθέσουμε ότι ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος αρχικά; Υποθέστε ότι $L=10 \text{ mH}$, $C=2 \text{ }\mu\text{F}$. (γ) Παραστήσετε γραφικά την χρονική εξέλιξη της μαγνητικής και ηλεκτρικής ενέργειας στο κύκλωμα.

Λύση

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με βασική ενεργειακή θεώρηση αφού η ενέργεια του συστήματος θα είναι σταθερή και θα ταλαντώνεται μεταξύ ενέργειας πυκνωτή και ενέργειας μαγνητικού πεδίου.

$$U=U_B + U_C = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} q^2/C$$

(α)

$$\frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} q^2/C = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} q_{\text{max}}^2 /C), \text{ άρα } q = q_{\text{max}}/2^{1/2} .$$

$$(\beta) q = q_m \cos \omega t = q_m /2^{1/2}, \text{ άρα } \omega t = \arccos (1/\sqrt{2}) = \pi/4, \omega = 1/\sqrt{LC}$$

$$t = (\pi/4) \sqrt{LC} = 6.9 \times 10^{-5} \text{ sec.}$$

52

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο και λαμβάνοντας υπόψη τη διατήρηση της ενέργειας του κυκλώματος εν τη απουσία ηλεκτρικής αντίστασης θα έχουμε

$$dU/dt = d/dt (\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} q^2/C) = Li di/dt + (q/C) dq/dt = 0$$
$$\text{ή } L dq/dt d^2q/dt^2 + (q/C) dq/dt = 0 \text{ (αφού } di/dt = d^2q/dt^2)$$

$$\text{ή } d^2q/dt^2 + (1/LC) q = 0$$

1

Άσκηση 3 Κύκλωμα RLC (α) Να βρείτε μία έκφραση για την ποσότητα $q(t)$ σε ένα κύκλωμα εν σειρά που περιέχει R, L, C . (β) Μετά πόσο χρόνο οι ταλαντώσεις φορτίου θα ελαττωθούν στο $1/2$ του πλάτους αν $L=10 \text{ mH}$, $C=1 \text{ }\mu\text{F}$, $R=0.1 \text{ }\Omega$; (γ) Ποια είναι η κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων;

Λύση

(α)

$$dU/dt = d/dt (\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} q^2/C) = -i^2 R, \text{ άρα}$$

$$L d^2q/dt^2 + R dq/dt + q/C = 0$$

Υπάρχει η αντιστοιχία εξίσωση στις μηχανικές ταλαντώσεις

$$m \ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\text{με λύση } x = \exp(-bt/2m) \cos(\omega t + \alpha), \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/2 = k/m - b^2/(4m^2), \gamma = b/m$$

(β)

Με την προφανή αντιστοιχία, $m \rightarrow L, R \rightarrow b, k \rightarrow 1/C$, προκύπτει

$$q = \exp(-Rt/2L) \cos(\sqrt{(1/CL) - (R^2/4L^2)} t + \alpha),$$

$$t = 2L \ln 2 / R = \dots 0.14 \text{ sec.}$$

$$(\gamma) \omega = \sqrt{(1/CL) - (R^2/4L^2)}$$

Απορρόφηση ενέργειας σε μηχανικό εξαναγκασμένο ταλαντωτή

Σημειακή μάζα είναι στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $s = m\omega_0^2$. Υπό την επενέργεια εξωτερικής δύναμης $F = F_0 \cos \omega t$ πάνω στη μάζα με κατεύθυνση x , να βρείτε

(α) Τα A και B που αντιστοιχούν στο ελαστικό πλάτος και πλάτος απορρόφησης

(β) Να δειχθεί πως η μέση απορροφούμενη ισχύς για ακέραιο αριθμό περιόδων είναι $\langle P \rangle = (1/2) \omega F_0 A$

(γ) Να αποδειχθεί ότι η ολική ενέργεια του συστήματος έχει μέση τιμή για ένα ακέραιο αριθμό περιόδων ίση με $\langle E \rangle = (1/4) m (\omega_0^2 + \omega^2) (A^2 + B^2)$

Λύση

Αν $x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$, τότε η εξίσωση κίνησης

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - sx + F_0 \cos \omega t \text{ γίνεται, και αν } r/m \equiv \gamma$$

$$(\dot{x} = \omega (A \cos \omega t - B \sin \omega t), \quad \ddot{x} = -\omega^2 (A \sin \omega t + B \cos \omega t))$$

$$- \omega^2 (A \sin \omega t + B \cos \omega t) + \omega \gamma (A \cos \omega t - B \sin \omega t) + \omega_0^2 (A \sin \omega t + B \cos \omega t) = (F_0/m) \cos \omega t$$

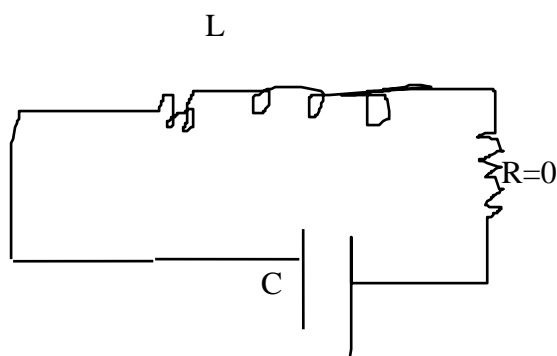
$$(\dots) \sin \omega t + (\dots) \cos \omega t = 0,$$

Επειδή η άνω σχέση πρέπει να ισχύει διά κάθε t , πρέπει οι ποσότητες μέσα στις παρενθέσεις να μηδενίζονται, άρα

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A = \omega \gamma B \text{ και } (\omega_0^2 - \omega^2) B + \omega \gamma A = F_0/m$$

Κύκλωμα LC

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε την ακολουθία αυτεπαγωγών και χωρητικότητων. Η ηλεκτρεργετική δύναμη εξ αυτεπαγωγής ισούται με $L dI_n/dt$ στα άκρα της αυτεπαγωγής με δείκτη n . Θα δίνεται δε από την εξίσωση



Σχήμα 3.5

$$L dI_n/dt = -C^{-1}Q' + C^{-1}Q$$

άρα,

$$L \frac{d^2 I_n}{dt^2} = -C^{-1} \frac{dQ'}{dt} - C^{-1} \frac{dQ}{dt}$$

Με χρήση της αρχής της διατήρησης φορτίου

$$\frac{dQ'}{dt} = I_n - I_{n+1}$$

και ανάλογα

$$\frac{dQ}{dt} = I_{n-1} - I_n$$

Αρα,

$$L \frac{d^2 I_n}{dt^2} = C^{-1} [I_{n+1} - I_n] - C^{-1} [I_n - I_{n-1}]$$

Η σχέση διασποράς θα είναι εκείνη που βρίσκεται στην περίπτωση αλληλουχίας σφαιριδίων και ελατηρίων αφού διέπεται εκείνη η κίνηση από την ίδια διαφορική εξίσωση. Για να την βρούμε, μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην θέση του λόγου k/m , τον λόγο C^{-1}/L .

$$\omega(k) = 2(C^{-1}/L)^{1/2} \sin(ka/2)$$

Η γενική λύση για ένα μόνο τρόπο και χωρίς να ληφθούν υπόψη οι οριακές συνθήκες είναι

$$I_n(t) = [A \sin nka + B \cos nka] \cos[\omega(k)t + \phi]$$

Η σημασία του μεγέθους ka

Στην περίπτωση του συστήματος με εντοπισμένες αυτεπαγωγές και χωρητικότητες, το ka είναι η αύξηση της φάσης της “συνάρτησης σχήματος”, $A \sin nka + B \cos nka$, καθώς μεταβαίνουμε από τη μία εντοπισμένη αυτεπαγωγή στην επόμενη. Στην παραγματικότητα, δεν χρειάζεται να προσδιορίσουμε την απόσταση ανάμεσα σε δύο αυτεπαγωγές, θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε το ka με κάποιο άλλο σύμβολο, π.χ. ϕ . Το ϕ θα συμβόλιζε την αύξηση φάσης όταν στη συνάρτηση σχήματος $A \sin n\phi + B \cos n\phi$, το n αυξάνει κατά μία μονάδα.

Lecture 9 31 -10-2005

(Εγινε συνέχεια των n- μαζών με ελατήρια)

Εφ' όσον το δεύτερο μέρος είναι για κάθε ω ανεξάρτητο των πλατών A_r , θέτουμε ότι έκαστο πλάτος έχει την έκφραση $A_r = C \sin r \theta$. Το κίνητρο για την αντικατάσταση αυτή είναι το ότι στην οριακή συμπεριφορά για μεγάλα N αντιστοιχεί, όπως έχουμε δει, σε ημιτονική συμπεριφορά.

Τότε εύκολα από τριγωνομετρία έχουμε

$$A_{r-1} + A_{r+1} = 2 \sin(r\theta) \cos\theta$$

και εύκολα

$$\frac{A_{r-1} + A_{r+1}}{A_r} = \cos\theta \quad (\text{Σχέση 26.1})$$

Ποιά είναι η τιμή του θ ?

55

Αυτό προκύπτει από τις N το πλήθος εξισώσεις βάζοντας ότι για $r=0$, και $r=N+1$, $A_0=0$, $A_{N+1}=0$. Η τελευταία συνθήκη θα ισχύσει αν το $(N+1)\theta$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του π . Γιατί;

Απάντ.: Διότι, $A_{N+1} = A \sin(r\theta) = A \sin[(N+1)\theta] = 0$ (ακλόνητο άκρο), και συνεπώς $(N+1)\theta = n\pi$, $n=1,2,3,\dots$

Από εκεί προκύπτει:

$$\theta = \frac{n\pi}{N+1}$$

$$\text{και } A_r = C \sin\left(\frac{r n \pi}{N+1}\right)$$

Οι επιτρεπόμενες κυκλικές συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης είναι :

$$\frac{A_{r-1} + A_{r+1}}{A_r} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right) \quad (\text{I})$$

και έτσι

$$n\pi$$

$$n\pi$$

$$\omega_n^2 = 2\omega_0^2 [1 - \cos(\frac{\pi n}{N+1})] = 4\omega_0^2 \sin^2 [\frac{\pi n}{2(N+1)}] \quad (\text{II})$$

Τι σημαίνει αυτό το αποτέλεσμα;

(α) Υπάρχει μία μέγιστη συχνότητα ταλάντωσης, $\omega_n \approx 2\omega_0$ που ονομάζεται συχνότητα αποκοπής και που χαρακτηρίζει όλα τα ταλαντώνομενα συστήματα που αποτελούνται από όμοια στοιχεία που επαναλαμβάνονται περιοδικώς σε όλη την έκταση του συστήματος. Αυτό θα το συναντήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο (βλ. Διάδοση κύματος σε κρυστάλλους).

(β) Σε κάθε κυκλική συχνότητα (ή γωνιακή συχνότητα) ω_n , η p -στη μάζα θα έχει πλάτος ταλάντωσης)

$$A_p = C \sin \frac{n p \pi}{N+1}$$

όπου C σταθερό.

Τώρα, μπορούμε να εξετάσουμε την περίπτωση ταλαντώσεων σε κρύσταλλο με Τότε αντί της εξίσωσης (Εγκάρσ. 1) προκύπτει η

56

$$m \ddot{y}_p = k [(y_p - y_{p-1}) + (y_p - y_{p+1})]$$

όπου y_p , y_{p-1} κλπ είναι οι διαμήκεις απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας, και k η σταθερά σύζευξης.

Όπως προέκυψε και στη συζήτηση των εγκαρσίων ταλαντώσεων με πολλά σφαιρίδια, η σχέση μεταξύ της κυκλικής συχνότητας ω_n και της θέσης n a , του n -στου σωματιδίου είναι:

$$\omega_n^2 = 2\omega_0^2 [1 - \cos(\frac{n\pi a}{N+1})] = 4\omega_0^2 \sin^2 [\frac{n\pi a}{2(N+1)a}] \quad (\text{III}), \text{ όπου } \omega_0^2 = k/m, \text{ και } N$$

Θα δούμε πως η σχέση αυτή γίνεται σχέση μεταξύ του ω και του λεγόμενου κυματικού αριθμού k .

Το πλήθος των "μορίων ή ατόμων σε γραμμική διάταξη".

Συνεπώς, αφού $(N+1)a = L$, όπου L το μήκος του κρυστάλλου, έχουμε

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin \left(\frac{n\pi a}{2L} \right), \text{ η αν } x \equiv n a,$$

και αν ασκείται μία εξωτερική δύναμη με τυχούσα συχνότητα ω , σαν συνέπεια της παραπάνω ανάλυσης, προκύπτει όπως αποδεικνύεται η σχέση

$$\omega = 2\omega_0 \sin \left(\frac{ka}{2} \right)$$

Αν τώρα, το λ είναι πολύ μεγάλο, προκύπτει πως $\omega \approx \omega_0$ ($k a \ll \pi$)
 Αντίθετα, για αρκετά μικρά λ , η κυκλική συχνότητα δεν είναι ανάλογη της k , και άρα λέμε πως το υλικό μέσο εμφανίζει διασπορά. Η φυσική σημασία της διασποράς έγκειται στο γεγονός ότι αν εισάγουμε, όπως θα δούμε στα οδεύοντα κύματα, στο ένα άκρο ενός τέτοιου συστήματος ένα κύμα, $y = y_0 \cos(\omega t - kx) + y_0' \cos(\omega' t - k' x)$, η μορφή του εξερχόμενου κύματος θα διαφέρει από το αρχικό μια και το μέσο εμφανίζει διασπορά. (Βλέπετε και Hugh D. Young, Vol. I page 555).

$$2A_n \cos ka = A_n (2 - (Ma/T_0) \omega^2) \quad (69), \text{ όπου } z=na, \text{ και } k=$$

**Πόσοι διαφορετικοί τρόποι ταλάντωσης υπάρχουν;
 Από τη σχέση (II),**

$$\omega_n^2 = 2\omega_0^2 \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right) \right] \quad (II)$$

$$\omega_n = 2 \omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)$$

57

αν θέσουμε $n=N+1$, παίρνουμε $\omega_{N+1} = 2 \omega_0$. Ωστόσο, για την τιμή αυτή δεν έχουμε τρόπο ταλάντωσης αφού από τη σχέση

$$A_p = C \sin \frac{np\pi}{N+1}$$

παίρνουμε:

$$A_p = C \sin\left[\frac{(N+1)p\pi}{N+1}\right] = C \sin[\pi p] = 0$$

για $n=N+2$, είναι:

$$\omega_{N+2} = 2 \omega_0 \sin\left(\frac{(N+N+2-N\pi)}{2(N+1)}\right) = 2 \omega_0 \sin\left(\pi - \frac{N\pi}{2(N+1)}\right) = 2 \omega_0 \sin\left(\frac{N\pi}{2(N+1)}\right)$$

αρα, $\omega_{N+2} = \omega_N$

Ανάλογα, $\omega_{N+3} = \omega_{N-1}$, κλπ. Αρα, έχουμε μόνο N το πλήθος ανεξάρτητες κυκλικές συχνότητες που αντιστοιχούν στους τρόπους ταλάντωσης των N σωματιδίων και ελατηρίων.

Αλλά και για τα πλάτη, $A_{p,N+2}$ έχουμε ανάλογες σχέσεις:

$$A_{p,N+2} = C_{N+2} \sin\left(\frac{p(N+2)\pi}{N+2}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{N+1} \\
= & C_{N+2} \sin\left(2p\pi - \frac{pN\pi}{N+1}\right) \\
= & - C_{N+2} \sin\left(\frac{pN\pi}{N+1}\right) \approx A_{p,n}
\end{aligned}$$

Επίσης, συζητήθηκε και πως στην περίπτωση όπου η απόσταση a μεταξύ διαδοχικών ταλαντωτών είναι πολύ μικρή, τότε παίρνουμε την Κλασική Κυματική Εξίσωση.

Άσκηση: Διερευνήστε το φαινόμενο για N πολύ μεγάλο.

Για πεπερασμένο μήκος της αλυσίδας, έχουμε σαν συνέπεια πως η απόσταση των διαδοχικών μαζών είναι πολύ μικρή. Μπορούμε να εξετάσουμε το τι συμβαίνει για μικρές τιμές του n , δηλαδή για τους πρώτους τρόπους ταλάντωσης. Τότε, μπορούμε να βάλουμε:

58

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right) \approx \\
& \left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)
\end{aligned}$$

και άρα,

$$\omega_n \approx 2 \sqrt{(T/ml)} \frac{n\pi}{2(N+1)} = \sqrt{(T/(m/l))} \frac{n\pi}{(N+1)l}$$

Τελικά,

$$\omega_n = n \frac{\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

Ειδικά,

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

Άσκηση:

Να δείξετε πως για $n \ll N$,

$$\psi_n(x,t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t \quad (n=1,2,3,\dots)$$

Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης ενός κρυσταλλικού πλέγματος.

Αυτό το θέμα απλά θα το θίξουμε μια και άπτεται θεμάτων που αφορούν την κβαντική συμπεριφορά της συμπυκνωμένης ύλης. Η δομή των στερεών (κρυστάλλων) έχει αρκετή περιοδικότητα, έτσι ώστε να μπορούμε να εξομοιώσουμε ένα κρυσταλλικό πλέγμα με ένα τρι-διάστατο «σουμιέ» κρεβατιού όσον αφορά την ταλαντωτική συμπεριφορά του.

Για να εφαρμόσουμε τις σχέσεις:

$$\omega_n = 2 \omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)$$

$$\omega_n = n \frac{\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

59

μπορούμε να θεωρήσουμε το στερεό σαν γραμμική διάταξη ατόμων (σφαιριδίων) κατά μήκος μιάς από τις κύριες κατευθύνσεις του κρυστάλλου. Έτσι, μ είναι η ολική μάζα ατόμων ανά μονάδα μήκους. Αλλά τι είναι το T ;

Διαστατικά, το T/μ είναι το ίδιο με το λόγο Y/ρ , δηλαδή με το λόγο του μέτρου του Young διά της πυκνότητας. Μπορεί ναδειχθεί τότε πως η έκφραση των τρόπων ταλάντωσης είναι:

$$v_n = 2 v_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)$$

όπου,

$$v_0 = (1/2L) (Y/\rho)^{1/2}$$

με τυπική τιμή του $v_0 \approx 10^{13}/\text{sec}$.

Αυτή είναι η ανώτερη συχνότητα που είναι δυνατόν να διεγερθεί στον κρύσταλλο. Οι χαμηλής τάξης τρόποι περιγράφονται καλά με τη σχέση ανάλογη της

$$v_0 = (1/2L) (Y/\rho)^{1/2}$$

όπου L το πάχος του κρυστάλλου. Όταν λοιπόν τούτο είναι 1 cm, θα έχουμε για χαμηλότερη συχνότητα, περίπου της τάξης των 10^5 Hz . Όσον αφορά τον υψηλότερο τρόπο, αυτός προκύπτει όταν τα διαδοχικά άτομα μετατοπίζονται προς αντίθετη κατεύθυνση το ένα προς το άλλο.

Τέτοιου είδους κίνηση μπορεί να διεγερθεί αποτελεσματικά με ένα laser που προσπίπτει σε ιοντικό κρύσταλλο χλωριούχου νατρίου, στον οποίο τα ιόντα Na^+ , και Cl^- εξωθούνται πάντα σε αντίθετες κατευθύνσεις λόγω του ηλεκτρικού πεδίου του προσπίπτοντος κύματος του laser. Με την ως άνω τιμή του ν_0 , συντονισμός αναμένεται να συμβεί, μεταξύ λέιζερ και κρυσταλλικό πλέγματος, σε συχνότητα γύρω στα 10^{13}Hz , δηλαδή σε $\lambda = (3 \times 10^8 \text{m/sec}) / (10^{13}\text{Hz}) = 30 \mu\text{m}$. Το πείραμα δείχνει απορρόφηση συντονισμού στα $60\mu\text{m}$, γεγονός που επιβεβαιώνει ποιοτικά τουλάχιστον τους ανωτέρω υπολογισμούς. Θα μπορούσε να επαναληφθεί το πείραμα αυτό αν διαθέσουμε εξαιρετικά λεπτό wafer NaCl , πάχους $10^{-7} \text{m} = 0.1 \mu\text{m}$.

Οριακή συμπεριφορά στο λόγο των πλατών όταν το n παίρνει τη μέγιστη τιμή
 Για $n=N$, έχουμε από την Εξ. (I):

$$\frac{A_{r-1} + A_{r+1}}{A_r} = 2 \cos\left(\frac{N\pi}{N+1}\right) \quad (\text{IV})$$

Και συνεπώς, ο λόγος τείνει κοντά στο -2 , για N πολύ μεγάλα. Ετσι, επειδή ο λόγος των διαδοχικών πλατών πλησιάζει το -1 . Δείτε και την άσκηση Pain 3.19, και τον σχολιασμό για την ακρίβεια του ισχυρισμού αυτού για μάζες πολύ κοντά στα άκρα (

60

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις γραμμικού συστήματος ίσων μαζών συνδεδεμένων με ελατήρια ίσης δυσκαμψίας

Το εδάφιο αυτό μελετάται συστηματικά στο βιβλίο Κυματικής του Berkeley για μηχανικά συστήματα ενώ ένα ανάλογο, για ηλεκτρικές ταλαντώσεις, υπάρχει στο βιβλίο του Pain.

Ας δούμε όμως ένα σύστημα λίγο διαφορετικό, εκείνο που αντιστοιχεί σε n -μάζες συνδεδεμένες μέσω ελατηρίων σε γραμμική διάταξη, αλλά κάθενα σώμα αποτελεί μέρος ενός εκκρεμούς ιδιοσυχνότητας ω_0 . Θεωρούμε ταλαντώσεις του συστήματος των μαζών πολύ μικρού πλάτους και αναζητούμε το σύνολο των τρόπων ταλάντωσης, στην προσέγγιση του συνεχούς, δηλαδή όταν οι αποστάσεις a , μεταξύ διαδοχικών σωμάτων είναι πολύ μικρότερες του «μήκους κύματος», της ημιτονικής καμπύλης που αναμένουμε πως θα περνάει μέσω της διάταξης των μαζών σε κάθε χρονική στιγμή t .

Η εξίσωση κίνησης της υπαριθμό n μάζας είναι:

$$M \ddot{y}_p = -T(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) = (T/Ma) [(y_p - y_{p-1}) + (y_p - y_{p+1})] - M\omega_0^2 y_p \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας για μικρά a το ανάπτυγμα Taylor:

$$[(y_p - y_{p-1})] = (dy/dz) a + [d^2 y/dz^2] a^2/2$$

$$(y_p - y_{p+1}) = - (dy/dz) a + [d^2 y/dz^2] a^2/2$$

Συνεπώς, η Εξ. (1) δίνει

$$d^2y/dt^2 = (Ka^2/M) [d^2y/dz^2] - \omega_0^2 y \quad \text{Εξίσωση Klein -Gordon}$$

Αν τώρα δοκιμάσουμε σα λύση μία μορφή

$y(z,t) = A(z) \cos(\omega t + \theta)$, θα έχουμε

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) A(z) = (Ka^2/M) d^2A(z)/dz^2$$

Διερεύνηση της ως άνω εξίσωσης

A) $\omega > \omega_0$

Τότε, έχουμε δυνατότητα διάδοσης κυμάτων ενώ η λύση για το $A(z)$ είναι της μορφής

$A(z) = A \sin kz + B \cos kz$, ενώ τα A και B προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες.

B) $\omega < \omega_0$

Τότε, βάζουμε, $\kappa \equiv (\omega^2 - \omega_0^2) M / (Ka^2)$, οπότε:

$d^2A/dz^2 = \kappa^2 A(z)$, άρα έχουμε γενική λύση:

$$A(z) = A e^{-\kappa z} + B e^{+\kappa z}$$

61

Άσκηση 1 Δύο όμοιοι ταλαντωτές a και b , μάζας m , και ιδιοσυχνότητας ω_0 είναι συζευγμένοι κατά τέτοιο τρόπο ώστε η δύναμη σύζευξης που ασκείται στον ταλαντωτή a , να είναι $\alpha m (d^2\psi_b/dt^2)$, ενώ εκείνη που ασκείται στον ταλαντωτή b , να είναι $\alpha m (d^2\psi_a/dt^2)$, όπου α η σταθερά σύζευξης, με $\alpha < 1$. Να βρείτε τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος, και τις κανονικές συντεταγμένες.

Λύση:

Είναι

$$\psi_A = A e^{i(\omega t + \alpha)} \quad \text{και} \quad \psi_B = B e^{i(\omega t + \alpha)}$$

με πραγματικές συντεταγμένες τις πραγματικές τιμές των ως άνω μιγαδικών παραστάσεων

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος του μηδενισμού της ορίζουσας

Πράξεις:

$$(-\omega^2 \psi_a + \omega_0^2 \psi_a) + \alpha \omega^2 \psi_b = 0$$

και

$$\alpha \psi_a \omega^2 + (-\omega^2 + \omega_0^2) \psi_b = 0$$

και, από τη συνθήκη μηδενισμού της ορίζουσας έχουμε:

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 - \alpha^2 \omega^4 = 0 \quad \text{ή} \quad (-\omega^2 + \omega_0^2) = \alpha \omega^2, \quad \text{και συνεπώς, οι τρόποι ταλάντωσης είναι}$$

$\omega_{1,2} = \omega_0 / (1 \pm \alpha)^{1/2}$. Αντικαθιστούμε πίσω στην εξίσωση που προκύπτει από τις παραγωγίσεις και προκύπτει $-\omega_1^2 A + \omega_0^2 A = -\alpha B \omega_1^2$ και θέτοντας την έκφραση του ω_1 , παίρνουμε $A_1/B_1 = +1$.

Θέτοντας την έκφραση για το ω_2 , καταλήγουμε μετά από πράξεις σε $A_2/B_2 = -1$.

Επαγωγική σύζευξη:

Η συνολική ροή που διαρρέει όλες τις σπείρες του πρωτεύοντος ενός μετασχηματιστή, είναι

$$L_p = n_p^2 \phi$$

Όπου L_p είναι η αυτεπαγωγή του πρωτεύοντος πηνίου. Αν η μονάδα του ρεύματος σε μια μοναδική σπείρα του δευτερεύοντος παράγει ροή ϕ , τότε η ροή που διασχίζει κάθε σπείρα του δευτερεύοντος είναι $n_s \phi$, και η ολική ροή που διασχίζει όλες τις σπείρες του δευτερεύοντος πηνίου είναι $L_s = n_s^2 \phi$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Οδεύοντα κύματα

Lecture 10 Οδεύοντα κύματα

Ιδείτε και:

http://www.ucy.ac.cy/~phyweb/phy213_1.pdf

http://www.phys.uwosh.edu/lattery/mpe/docs/f_vib.pdf

Εγιναν και ανάκλαση κυμάτων σε χορδή

Κύματα

Τα κύματα είναι ένα φαινόμενο με το οποίο είμαστε λίγο πολύ εξοικειωμένοι.

Αν θέλουμε να ορίσουμε ένα κύμα μπορούμε να πούμε το εξής:

Κύμα είναι ένα φαινόμενο κατά το οποίο ένα φυσικό μέγεθος (διαταραχή)

μεταβάλλεται στο χώρο και το χρόνο ενώ τα "πλάτη;" της χωρο-χρονικής εξάρτησης της διαταραχής μεταδίδονται στο χώρο με την ταχύτητα φάσης εκάστης κυματικής συνιστώσας. Το συνολικό στιγμιότυπο της χωρο-χρονικής εξάρτησης της διαταραχής μεταδίδεται με την ταχύτητα ομάδας.

Όπως είναι φυσικό, τα πράγματα μπορούν να γίνουν κατανοητά μόνο με απλά και συνθετότερα παραδείγματα.

63

Παράδειγμα 1 Εγκάρσια Κύματα σε χορδή πολύ μεγάλου μήκους

Ας υποθέσουμε πως εφαρμόζουμε αρμονική ταλάντωση στο ένα άκρο μίας τεταμένης χορδής που το άλλο άκρο τερματίζεται σε ένα δοχείο απορρόφησης των μηχανικών διαταραχών στη χορδή. Έτσι, δεν θα έχουμε "ανακλώμενο κύμα".

Η διαταραχή θα προκύψει από τη λύση της κλασικής κυματικής εξίσωσης που μπορείτε να βεβαιώσετε ότι είναι

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx) \quad (1)$$

με $\omega/k = v$ να είναι η ταχύτητα της φάσης ίση με $(T/\mu)^{1/2}$ όπως έχουμε δει στις ταλαντώσεις σε χορδές. Το ότι η Εξ. (1) ικανοποιείται μπορεί να δειχθεί πειραματικά. Η (1) μπορεί να γραφεί εναλλακτικά και

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos[\omega(t - x/v)] = \psi_0 \cos[k(vt - x)] = F(t - x/v) = G(x - vt)$$

Η χωροχρονική συνάρτηση $\omega t - kx$ λέγεται φάση του κύματος, ενώ αν η διάδοση του κύματος γίνεται από δεξιά προς τα αριστερά, τότε η μορφή μιας αρμονικής διαταραχής είναι

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega t + kx),$$

που προκύπτει από την (1) βάζοντας $-k$ στη θέση του k .

Παράδειγμα 2 Ακτινοβολία λέιζερ

Το laser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) ανακαλύφθηκε κατά τα τέλη της δεκαετίας του 1950. Δίνει κατά κανόνα αρκετά μονοχρωματική ακτινοβολία, με πολύ καλή κατευθυντικότητα και ενίοτε μεγάλη ισχύ. Υπάρχουν λέιζερ παλμικής και λέιζερ συνεχούς λειτουργίας. ΟΙ παλμοί μπορεί να διαρκούν ακόμη και fempto-seconds (10^{-15} sec) ή και λιγότερο ! Η προκύπτουσα ισχύς είναι τρομακτική!!!

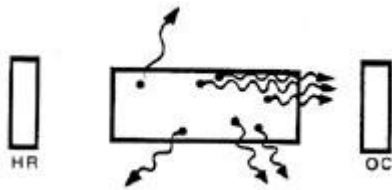
Ας δούμε ποιοτικά τον μηχανισμό παραγωγής ακτινοβολίας laser. Αν στο μέσον έχουμε πετύχει μία *αναστροφή πληθυσμών*, έχουμε μία διεγερμένη κατάσταση $|j\rangle$, ενώ η θεμελιώδης κατάσταση $|i\rangle$ είναι σχεδόν άδεια από άτομα. Η αναστροφή πληθυσμών δεν είναι κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, και προκύπτει όταν ο το μέσον στο οποίο θέλουμε να προκληθεί η κατάσταση αναστροφής πληθυσμών απορροφά (αντλεί) ισχύ με ένα ορισμένο μηχανισμό, όπως π.χ. με εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου και συνεπαγόμενη ηλεκτρική εκκένωση. Στην κατάσταση *αναστροφής πληθυσμών* ένα προσπίπτον φωτόνιο κατάλληλης συχνότητας, θα μπορούσε να προκαλέσει σκανδαλισμό καταιγισμού από *επαγόμενα φωτόνια* τα οποία βρίσκονται *όλα σε φάση*. Το αρχικά υπάρχον κύμα θα μπορούσε (θα μπορεί) να συνεχίζεται να ενισχύεται, σε πλάτος, εφ' όσον δεν θα υπήρχαν επικρατούντες ανταγωνιστικοί μηχανισμοί (όπως σκέδαση) και εφόσον η αναστροφή πληθυσμών θα μπορούσε να συντηρείται. Με άλλα λόγια, ενέργεια (ηλεκτρική, χημική, οπτική κλπ) θα μπορούσε να αντλείτε για την συντήρηση της αναστροφής, και συνεπώς μία δέσμη φωτός θα μπορούσε να εξάγεται μετά την διέλευση (φωτονίων) μέσα από το ενεργό μέσον.

Το δλ ή δκ των λέιζερ είναι πολύ μικρό αλλά η επιστημονικές και τεχνολογικές ανάγκες το θέλουν να γίνει ακόμη μικρότερο. Έτσι, τα τελευταία χρόνια έχουν προκύψει εφαρμογές της *μη-γραμμικής οπτικής* με τους λεγόμενους οπτικούς παραμετρικούς ταλαντωτές (Optical parametric oscillators). Είναι δυνατόν τότε ο συνδυασμός των λέιζερ με τα OPO να οδηγήσουν σε δκ πολύ μικρότερα από εκείνα που θα παίρναμε με μόνο τα λέιζερ. Από την πρόοδο αυτή αναμένεται να επωφεληθούν οι τηλεπικοινωνίες, μελέτη ρύπανσης περιβάλλοντος, αναλυτική χημεία καθώς και η βασική φυσική (Πρόοδος στην Κβαντική Οπτική).

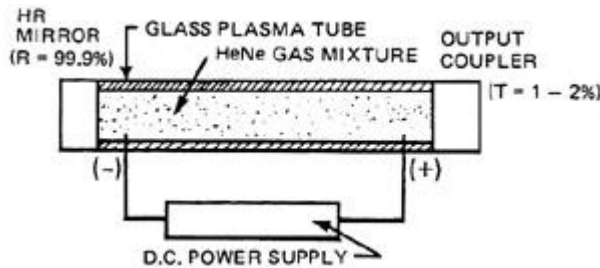
Ακτινοβολία λέιζερ υπάρχει και στη φύση σε ορισμένα φαινόμενα Αστροφυσικής.

Προκύπτει όποτε έχουμε αναστροφή πληθυσμών σε ορισμένες ενεργειακές στάθμες θερμοδυναμικών συστημάτων (απόκλιση από την κατανομή Boltzmann θερμοδυναμικής ισορροπίας). Έτσι, σε ένα αέριο άζωτο σε πίεση 1/10 της ατμόσφαιρας, μία ηλεκτρική εκκένωση διάρκειας μικρότερης των 10 nsec μπορεί να προκαλέσει την αναστροφή πληθυσμών πολύ εύκολα. Η μόνη λοιπόν τεχνολογική απαίτηση είναι να σχεδιασθεί κατάλληλο τροφοδοτικό της τάξης των 12kV με χρόνο ανόδου σε 10 nsec. Κατάλληλο διάκενο σπινθηρισμού (spark-gap, το γνωστό μπουζί) μπορεί να βοηθήσει στην επίτευξη της ταχείας ανόδου της τάσης στο κύκλωμα που θα αλληλεπιδράσει με το λέιζερ αζώτου. Η ταχέως μεταβαλλόμενη τάση θα πρέπει να διαδοθεί (κύμα) μέσα από

κατάλληλα σχεδιασμένη “γραμμή μεταφοράς” ώστε να έχει βέλτιστη επίδοση χωρίς ανεπιθύμητες ανακλάσεις.

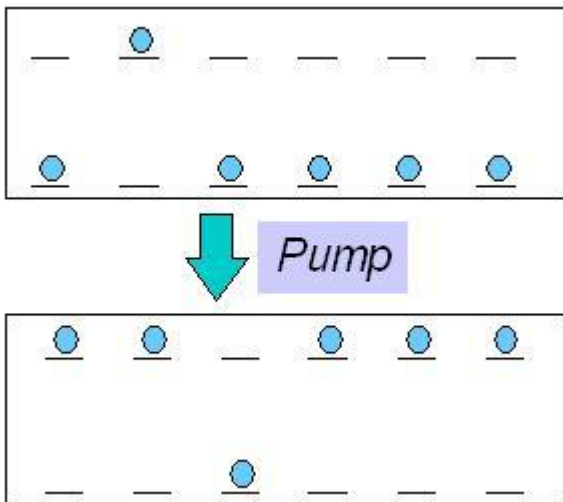


Σχήμα 4.1



Σχήμα 4.2

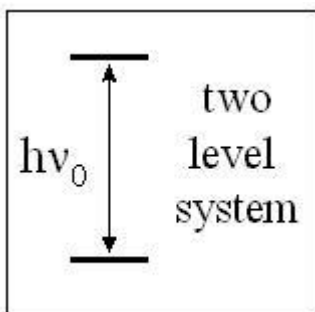
65



Σχήμα 4.3

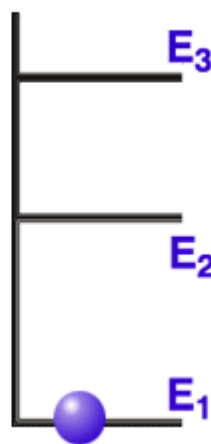
Stimulated Emission

The word "laser" is an acronym for Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation. The easiest laser model to understand is the two level system. In a two level system, the particles have only two available energy levels, separated by some energy difference which is typically referred to in terms of the photon energy, $h\nu_0$. These two levels are generally referred to as the upper and lower laser states. When a particle in the upper state interacts with a photon matching the energy separation of the levels, the particle may decay, emitting another photon **with the same phase and frequency as the incident photon**. Thus we have gotten two photons for the price of one. This process is known as stimulated emission.



Σχήμα 4.4

66



Σχήμα 4.5

Population Inversion

A fundamental concept in lasers is the idea of a "population inversion". A normal thermal population in any material will have most of the particles in the ground state. However, we would prefer to have most of the particles in the excited state so we can get free photons through stimulated emission. Thus in a laser we strive to create a "population inversion" where most or all of the particles are in the excited state. This is achieved by adding energy to the laser medium (usually from an electrical discharge or an optical source such as another laser or a flashlamp); this process is called pumping .

Gain

Another fundamental concept in lasers is the idea of gain, which is basically a short way of referring to the "free" photons described earlier. Suppose we have just pumped our laser medium so that all of the particles are in their excited state. One of those particles now spontaneously decays back down to its ground state, emitting a photon ($h\nu_0$). This photon is of the right frequency to stimulate emission from another excited state particle, which emits another photon which can stimulate another excited state particle, and so on. (see the figure below).

http://repairfaq.ece.drexel.edu/sam/CORD/leot/course01_mod01/mod01-01.html

Stimulated emission:

http://repairfaq.ece.drexel.edu/sam/CORD/leot/course01_mod01/mod01-01.html#content_1.3

Παράδειγμα 3: Ηλεκτρικοί λαμπτήρες.

Αυτοί κατά κανόνα δίνουν λευκό φως που είναι μία μορφή κύματος (Ηλεκτρομαγνητικό κύμα). Ωστόσο, υπάρχουν και άλλοι που δίνουν ωραίες μονοχρωματικές γραμμές του ορατού και του υπεριώδους. Οι τελευταίες μπορούν να φανούν μόνο μέσω του φθορισμού που προκαλούν π.χ. σε ένα πέτασμα.

Ετσι, είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε φαινόμενα με λάμπες που έχουν ατμοσφαιρικό αέρα αραιωμένο (Οξυγόνο+Αζωτο), ή Υδράργυρο.

Οι γραμμές που θα πάρουμε με τον αέρα, θα είναι κυρίως του αζώτου (από ιόντα ατόμων αζώτου, ιόντα μορίων αζώτου, ουδέτερα άτομα αζώτου). Οι ακτινοβολία του οξυγόνου μολονότι υπάρχει είναι λίγο πιο δύσκολο να ανιχνευθεί.

Η παρατήρηση με φασματόμετρο της ακτινοβολίας του αέρα μπορεί να μας εξηγήσει διάφορα φαινόμενα που συμβαίνουν στην ατμόσφαιρα που ενώ τα θεωρούμε αυτονόητα, εξηγούνται μόνο με την *Κυματική* φύση του φωτός. Ας σκεφθούμε αυτά παρακάτω.

67

Παραδειγμα 4 Οπτική ακτινοβολία (κύματα -φωτόνια) από την ατμόσφαιρα την ημέρα αλλά και τη νύχτα.

Την ημέρα, το ηλιακό φως σκεδάζεται από μόρια της ατμόσφαιρας χωρίς τις περισσότερες φορές να αλλάζει το μήκος κύματος. Ετσι, έχουμε σκέδαση τύπου Rayleigh.

Τα μόρια του αέρα γίνονται εξαναγκασμένοι ταλαντωτές . Αν το εξαναγκάζον αίτιο είναι ένα αρμονικό ηλεκτρικό πεδίο της ορατής περιοχής, τότε η λύση της διαφορικής εξίσωσης ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση είναι

$$x(t) = \frac{q E_x(t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Η κίνηση αυτή των ηλεκτρικών φορτίων αφού είναι επιταχυνόμενη, δίνει, όπως θα δούμε, ακτινοβολούμενη ισχύ

$$P = \text{σταθ.} \cdot \left[\frac{-e \langle E_x(t) \rangle}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2$$

Αν τώρα θεωρήσουμε φαινόμενα στα οποία $\omega_0 \gg \omega$, προκύπτει ότι

$$P = \text{σταθ.} \cdot \omega^4 = \text{σταθ.} \cdot \lambda^{-4} \quad (\text{Νόμος Σκέδασης Ράιλεϊ}) -$$

Εξήγηση του μπλε χρώματος του ουρανού. Τα μικρά μήκη κύματος σκεδάζονται περισσότερο.

Στο ηλιοβασίλεμα, όταν κοιτάζουμε προς τη Δύση, μόνο τα κόκκινα χρώματα επιζούν από την ισχυρή σκεδαση Ράιλεϊ και φτάνουν στα μάτια μας.

Παράδειγμα 5 Θέματα Μουσικής

(βιβλιογραφ. Αναφορά. Χαραλαμπος Σπυρίδης ΜΟΥΣΙΚΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ)

Ο Λόρδος Ράιλεϊ, το 1883 (!), μελετώντας παρασιτικούς συντονισμούς σε πνευστά όργανα (φλογέρες κλπ) θεώρησε τις συνέπειες της παρακάτω εξίσωσης

$$\ddot{x}(t) + \kappa \dot{x}(t) + (\omega_0^2 + 2\alpha \sin \omega_p t) x(t) = 0.$$

Δηλαδή προσέθεσε έναν ακόμη όρο που περιγράφει μία ημιτονική (παραμετρική) απομάκρυνση με συχνότητα ω_p . Η ανωτέρω εξίσωση που έχει αντίστοιχα ανάλογες εξισώσεις σε φαινόμενα των ηλεκτρικών εναλλασσομένων κυκλωμάτων, αλλά και άλλες σε φαινόμενα της μη γραμμικής οπτικής, δεν δίνεται εδώ σαν παράδειγμα κύματος, αλλά σαν παράδειγμα ενός *ταλαντωτή* που μπορεί να αλληλεπιδράσει με ένα εξωτερικό *οδεύον κύμα*. Τα φαινόμενα που μπορεί να παρατηρηθούν και οι εφαρμογές είναι εξαιρετικά σημαντικά.

68

Στην περίπτωση διαταραχών που εκτείνονται σε απεριόριστου μήκους μέσο, η κλασική κυματική εξίσωση που βρήκαμε στις εγκάρσιες ταλαντώσεις της χορδής εξακολουθούν να έχουν νόημα.

Σε αυτήν την περίπτωση, η λύση της ΚΚΕ είναι της μορφής, $f(x-ct)$ ή $f(x+ct)$ όπως εύκολα μπορείτε να βεβαιώσετε με αντικατάσταση στην ΚΚΕ.

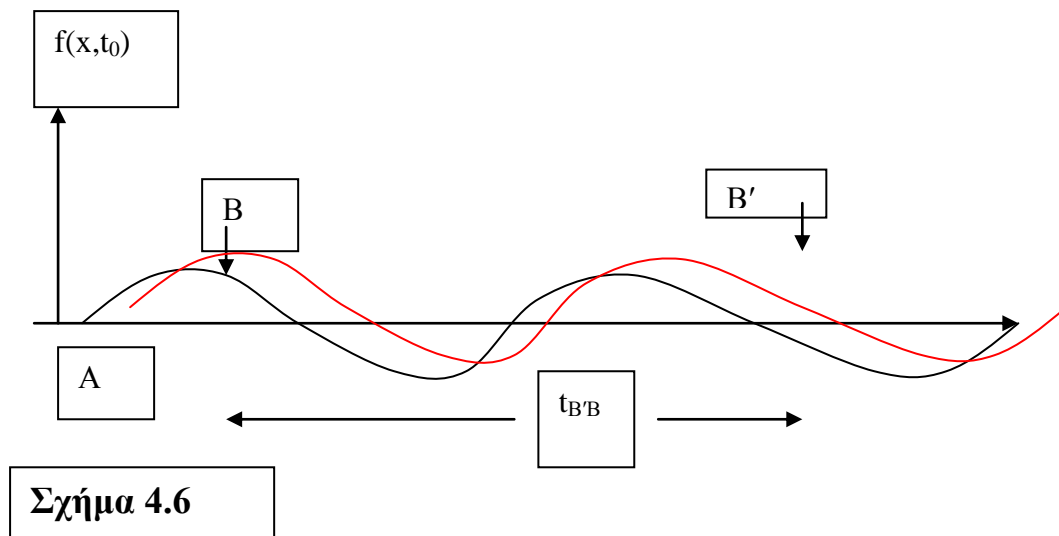
Μία ειδική λύση αντιπροσωπεύει μία ημιτονική ή συνημιτονική συνάρτηση του $x-ct$, όπως π.χ. η

$f = A \cos(ax - act)$, όπου η παράμετρος a έχει εισαχθεί ώστε το όρισμα να είναι καθαρός αριθμός.

Μπορεί τότε το a να είναι ο γνωστός κυματικός αριθμός k , οπότε επειδή $kc = \omega$, έχουμε

$$f = A \cos(kx - \omega t)$$

Μπορούμε να ονομάσουμε την κίνηση αυτή ως κυματική κίνηση, και για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, $t=t_0$, έχει τη μορφή του Σχήματος.



Το σχήμα αυτό παριστάνει ένα στιγμιότυπο ενός κύματος. Ένα σημείο B που είναι δεξιά του σημείου A, εκτελεί ταλαντώσεις (εγκάρσιες) αλλά καθυστερεί ως προς τη φάση σε σχέση με το A κατά μία ποσότητα

69

$$\varphi = (2\pi/\lambda) (x_B - x_A) \quad (2)$$

Αν λοιπόν στη θέση $x = x_A$ η ταλάντωση περιγράφεται από $f(x_A, t) = A \cos(kx_A - \omega t)$, τότε στη θέση x_B , η ταλάντωση θα περιγράφεται από

$$f(x_B, t) = A \cos(kx_A - \omega t - \varphi), \text{ όπου το } \varphi \text{ δίνεται από τη σχέση (2).}$$

Κατόπιν τούτου, μπορούμε να ορίσουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων κατά μήκος της διάδοσης του κύματος που απέχουν απόσταση x , ως $\varphi = (2\pi/\lambda)x$. Το λ (**μήκος κύματος**), ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ δύο σημείων που έχουν διαφορά φάσης 2π . Παρενθετικά μπορούμε να πούμε πως το μήκος κύματος ενός κατάλληλα πραγματοποιούμενου επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος χρησιμεύει για τον ορισμό του προτύπου του ενός μέτρου (δηλαδή του ορισμού της μονάδας μήκους). Η όποια αβεβαιότητα σε αυτή τη μονάδα μήκους έχει τεράστια σημασία για την έρευνα στην Επιστήμη και την τεχνολογία. Θα δούμε αργότερα, πως από τους νόμους της Κυματικής συνεπάγεται (Θεώρημα εύρους ζώνης) πως δεν μπορούμε να πετύχουμε πειραματικά επίπεδο κύμα με μηδενική αβεβαιότητα $\Delta\lambda$ στο μήκος κύματος.

Όταν η διάδοση του κύματος γίνεται προς τα αριστερά, τότε το πρόσημο του φ αλλάζει γιατί η ταλάντωση στο x αρχίζει πριν από αυτήν στο $x=0$. Έτσι, η παρένθεση $(ct-x)$ παριστάνει κύμα που οδεύει προς τα δεξιά, ενώ η $(ct+x)$ αντιστοιχεί σε κύμα που οδεύει προς τα αρνητικά x .

Ταχύτητα φάσης του κύματος

Υπάρχει μία παράμετρος που μας λέει πως κατά την κυματική διαταραχή, οι κοιλάδες ή οι κορυφές διαδίδονται με μία ορισμένη ταχύτητα σε ένα αρμονικό κύμα. Το χαρακτηριστικό αυτό προκύπτει αν θεωρήσουμε πως κατά την μεταβολή των x και t , η γωνία φάσης, $\omega t - kx$ παραμένει σταθερή:

Αρα, το διαφορικό ισούται με μηδέν:

$$d(\omega t - kx) = 0 \rightarrow \omega/k = dx/dt \equiv v_\phi = \text{φασική ταχύτητα}$$

Τούτο φαίνεται παραστατικά και στο ως άνω σχήμα, όπου είναι

$v_\phi = B'/t_{BB}$, όπου τα σημεία B' και B είναι εκείνα από τα οποία περνάει η ίδια φάση μετά από χρονικό διάστημα t_{BB}

Παραδείγματα ημιτονικών κυμάτων

Ένα διάσημο παράδειγμα αρμονικού κύματος με καθορισμένη σχεδόν απόλυτα συχνότητα (και άρα μήκος κύματος) είναι εκείνο που μας στέλνουν ειδικοί δορυφόροι που μας στέλνουν τη λεγόμενη συχνότητα που βασίζεται σε μεταπτώσεις ατόμων όπως Καισίου (ή άλλων προτεινομένων ατόμων) που εκπέμπουν μέσα από ατομικές δέσμες έτσι ώστε τα μήκη κύματος της συγκεκριμένης μετάπτωσης να έχουν την μικρότερη δυνατή αβεβαιότητα. Από την αντίστοιχη συνότητα, έχουμε την λεγόμενη συχνότητα του ατομικού ρολογιού (Atomic Clock).

Νόμοι διασποράς στα οδεύοντα κύματα

70

Κάθε αρμονικό κύμα, έχει μία χαρακτηριστική σχέση, $\omega = f(k)$. Σε μέσο με ιδανικά ελαστικές ιδιότητες, εκείνο δηλαδή που ικανοποιεί πλήρως την κλασική κυματική εξίσωση, είναι $\omega = \text{σταθ.} \cdot k = v_\phi k$

Τα οδεύοντα κύματα υπακούουν στην ίδια σχέση διασποράς με τα στάσιμα κύματα;

Στην περίπτωση περιοδικής διάταξης ίσων μαζών και ίδιου k ελατηρίων, βρέθηκε πως οι τρόποι ταλάντωσης έχουν συχνότητες που υπακούουν στη σχέση

$$\omega_n = 2 \omega_0 \sin \left(\frac{k_n a}{2} \right)$$

όπου

$$k_n = n\pi / (N+1)a$$

Η σχέση αυτή δεν εξαρτάται από τις συνοριακές συνθήκες αν και ορισμένες τιμές του k εξαρτώνται από αυτές. Μολονότι η σχέση διασποράς είναι ίδια τόσο στα στάσιμα όσο και στα οδεύοντα κύματα, στην περίπτωση των ελευθέρων και εξαναγκασμένων ταλαντώσεων, όλα τα κινούμενα μέρη έχουν την ίδια φάση, ενώ αυτό δεν ισχύει για οδεύοντα κύματα, όπως θα δούμε.

Ποια εξίσωση ικανοποιούν τα οδεύοντα κύματα σε μία συνεχή χορδή;

Θεωρούμε εδώ εγκάρσια κύματα. Μπορούμε να γράψουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για εγκάρσιες ταλαντώσεις ενός στοιχείου μήκους dx της χορδής και μάζας ρdx , όπου ρ η γραμμική πυκνότητα. Η κίνηση αυτού του τμήματος δεν εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες στα άκρα της χορδής, αλλά μόνο από την τάση T και το ρ . Αρα, μπορούμε να θεωρήσουμε πως η χορδή έχει άπειρο μήκος. Προφανώς, θα καταλήξουμε στην γνωστή ήδη από τις ταλαντώσεις χορδής, *Κλασική Κυματική Εξίσωση* και συνεπώς δεν χρειάζεται να κάνουμε ξανά την απόδειξη αυτού του τύπου.

Ωστόσο, οι λύσεις της εξίσωσης στην περίπτωση οδευόντων κυμάτων, θα δούμε ότι (χωρίς τυπικά να διαφέρουν από τις λύσεις στις ταλαντώσεις χορδής) δίνουν έμφαση σε διαφορετικές έννοιες. Μπορούμε λοιπόν να δοκιμάσουμε σαν λύση μία συνάρτηση της μορφής $y = f(z-ct)$.

Ανάκλαση και διάδοση κυμάτων σε χορδή που παρουσιάζει δύο περιοχές με διαφορετική γραμμική πυκνότητα

Αναφορές:

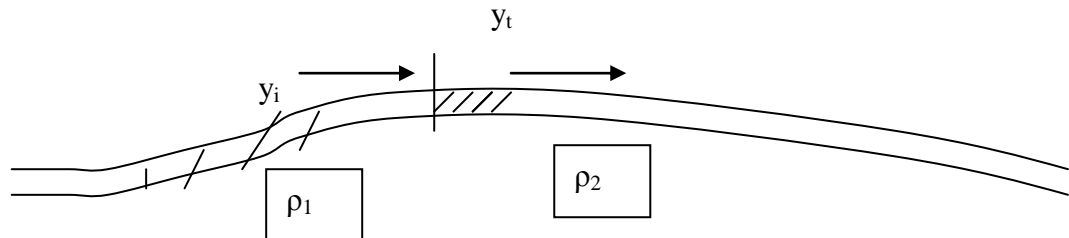
<http://hep.ph.liv.ac.uk/~hutchcroft/Phys258/CN4Boundaries.pdf>

Παράδειγμα: Δύο σύρματα με διαφορετικές πυκνότητες συνενώνονται στο $x=0$. Ένα προσπίπτον κύμα

$y_i = A_i \sin(\omega t - k_i x)$ διαδίδόμενο προς τα δεξιά ανακλάται και διαδίδεται μερικώς στο $x=0$. Να βρείτε το ανακλώμενο και διαδιδόμενο πλάτος συναρτήσει του προσπίπτοντος πλάτους A_i

71

Λύση



Σχήμα 4.7

Το ανακλώμενο κύμα στο $x=0$ είναι $y_r = A_r \sin(\omega t + k_r x)$, ενώ το διαδιδόμενο είναι $y_t = A_t \sin(\omega t - k_t x)$.

όπου το A_r ενδεχόμενα να είναι και αρνητικό, αντιστοιχόν σε 180° αλλαγή φάσης κατά την ανάκλαση. Η συνοριακές συνθήκες στο $x=0$ είναι ότι η απομάκρυνση y και η κλίση $\partial y / \partial x$ είναι συνεχείς.

Αρα,

$$y_i = y_r + y_t \rightarrow A_i = A_r + A_t$$

και

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y_r}{\partial x} \right|_{x=0} + \left. \frac{\partial y_t}{\partial x} \right|_{x=0}$$

άρα,

$$-k_1 A_i = k_1 A_r - k_2 A_t$$

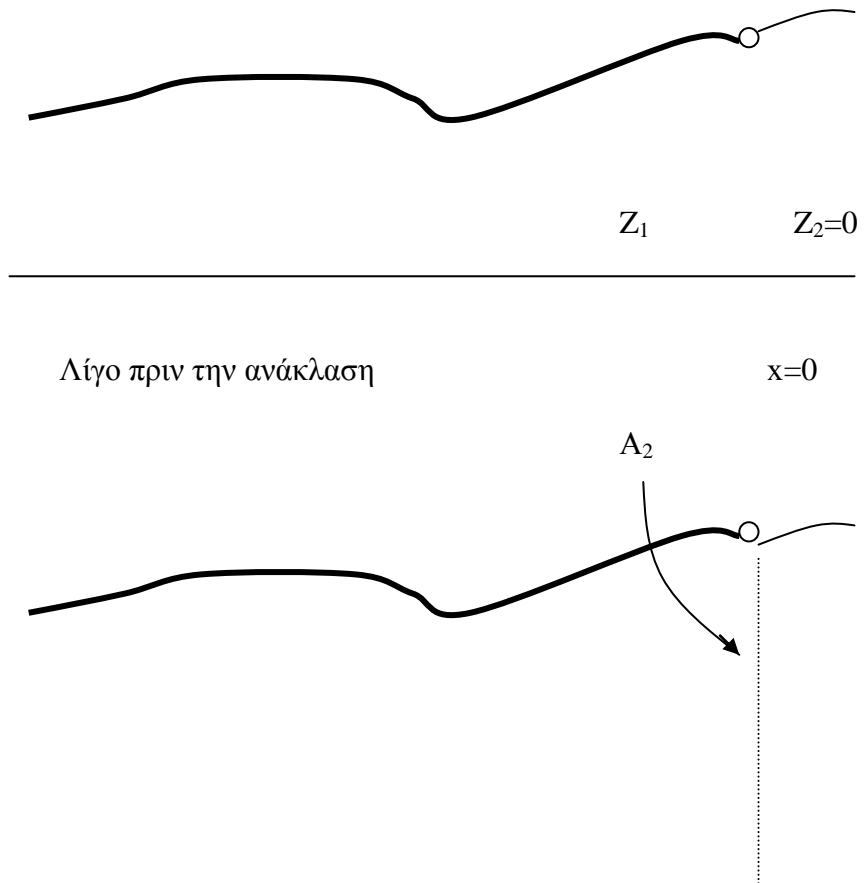
Λύνοντας το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων,

$$A_r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_i$$

$$A_t = \frac{2 k_1}{k_1 + k_2} A_i$$

Αυτό εξηγεί και το "τίναγμα" που παρατηρείται στο ελεύθερο άκρο ενός μαστιγίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα.

72



Σχήμα 4.8

Λίγο μετά την ανάκλαση

$x=0$

Φαίνεται πως A_r είναι πράγματι αρνητικό αν το μέσο 2 είναι πυκνότερο από το μέσο 1, και έτσι έχουμε αλλαγή φάσης 180 μοίρες στην ανάκλαση αυτή.

Επίσης συζητήθηκε πάλι η άσκηση 3) με την οπτική γωνία ότι η δημιουργούμενη ξαφνικά "προεξοχή" είναι δυνατόν να διαδίδεται και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Ζητείται να

διερευνήσετε το φαινόμενο αυτό.

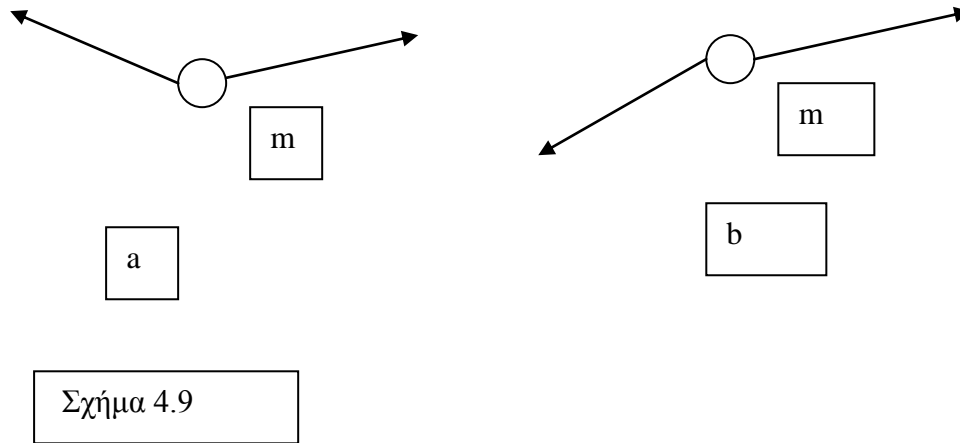
73

Lecture 11 3 November 2005

-Βιβλιογραφικές αναφορές διαδικτύου:

http://online.physics.uiuc.edu/courses/phys498pom/Lecture_Notes/Waves/PDF_Files/Waves_2.pdf Physics of Music/Physics of Musical Instruments

Πρόβλημα 4.6 Pain



Αν έχουμε μία μάζα, m , ανάμεσα σε 2 τμήματα χορδών, τότε η συνθήκη για την οριακή θέση αυτή είναι ότι η διαφορά των δύο κατακόρυφων συνιστωσών, λίγο αριστερά και λίγο δεξιά της μάζας, δίνει:

74

$T \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{\text{left}} - T \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{\text{right}} = m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$
 Με άλλα λόγια, η διαφορά των δύο κατακόρυφων δυνάμεων ισούται με την μάζα επί επιτάχυνση. Γιατί η διαφορά των κλίσεων και όχι το άθροισμα; Διότι, αν η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης δεξιά είναι ίδιου προσήμου με την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης αριστερά (περίπτωση a στο Σχήμα), τότε προκύπτει το σωστό αποτέλεσμα αφαιρώντας τις δύο κλίσεις (με άλλα λόγια προκύπτει πως οι δύο συνιστώσες παίρνουν ίδιο πρόσημο όπως θα έπρεπε). Αντίστοιχα, αν η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης δεξιά είναι αντίθετου προσήμου με την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης αριστερά (περίπτωση b στο Σχήμα), τότε πάλι πρέπει οι δύο κλίσεις να αφαιρεθούν. Αρα, το μέτρο της συνολικής δύναμης προκύπτει από την αφαίρεση των μέτρων των κλίσεων και πολλαπλασιασμό επί το T . Τούτο ισοδυναμεί με το να προσθέταμε αλγεβρικά τις δύο συνιστώσες των δυνάμεων προς τα δεξιά και τα αριστερά της μάζας.

Ετσι, αν $\psi_1 = A_1 e^{i(\omega t - kx)}$ και $\psi_2 = A_2 e^{i(\omega t - kx)} = \psi_t$
 μπορούμε να γράψουμε για το συνολικό κύμα, αριστερά της μάζας:
 $\psi_1 = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + B_1 e^{i(\omega t + kx)}$

Συνεπώς,

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \quad (1), \text{ και}$$

$$M \ddot{\psi}_1(x=0) = T \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) |_{x=0} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει

$$A_1 + B_1 = A_2$$

και

$$-\omega^2 M A_2 = ik (A_2 + A_1 - B_1)$$

αν τώρα, $q \equiv \omega M / (2\rho c)$

$$i\omega^2 M$$

$$\text{-----} (A_1 + B_1) = -2B_1$$

$$kT$$

και λόγω του ορισμού του q,

$$-iq(1 + B_1/A_1) = B_1/A_1$$

→

$$B_1/A_1 = \frac{-iq}{1 + iq}$$

Επίσης,

$$A_2/A_1 = 1 + B_1/A_1$$

$$= 1/(1 + iq)$$

75

Μάθημα 12^ο : 14-11-2005 Αρχή

Εξαναγκασμένες αρμονικές ταλαντώσεις μιάς τεντωμένης χορδής

Εδώ κατ αρχήν μας ενδιαφέρει η μόνιμη κατάσταση. Μπορούμε να φαντασθούμε ότι το ένα άκρο της, στο $L=0$ είναι ακλόνητο ενώ το άλλο υφίσταται εγκάρσιες ταλαντώσεις με τυχούσα κυκλική συχνότητα ω και πλάτος B . Υποθέτουμε λοιπόν ότι στη μόνιμη κατάσταση όλοι οι τρόποι ω_i έχουν αποσβεσθεί και η λύση είναι της μορφής

$$y(x,t) = f(x) \cos \omega t \quad (1)$$

αλλά με τις ακόλουθες συνθήκες

$$\alpha) y(0,t) = B \cos \omega t$$

$$\beta) y(L,t) = 0$$

As απαιτήσουμε την ικανοποίηση της κλασικής κυματικής εξίσωσης :

$$f''(x) \cos \omega t$$

$$= -(1/v^2)\omega^2 f(x) \cos \omega t$$

Αρα, το $f(x)$ θα πρέπει να είναι ημιτονική συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = A \sin(kx + c) \quad (2)$$

με $A \sin(kL + c) = 0$, $kL + c = m\pi$. Βάζοντας και τη συνθήκη στο x ίσον μηδέν,

$$f(0) = A \sin(c) = B$$

Για την ικανοποίηση από τις (1) και (2) της κλασικής κυματικής εξίσωσης προκύπτει

Αρα,

$$A = \frac{B}{\sin(\pi - \omega L/v)} \quad (2)$$

και

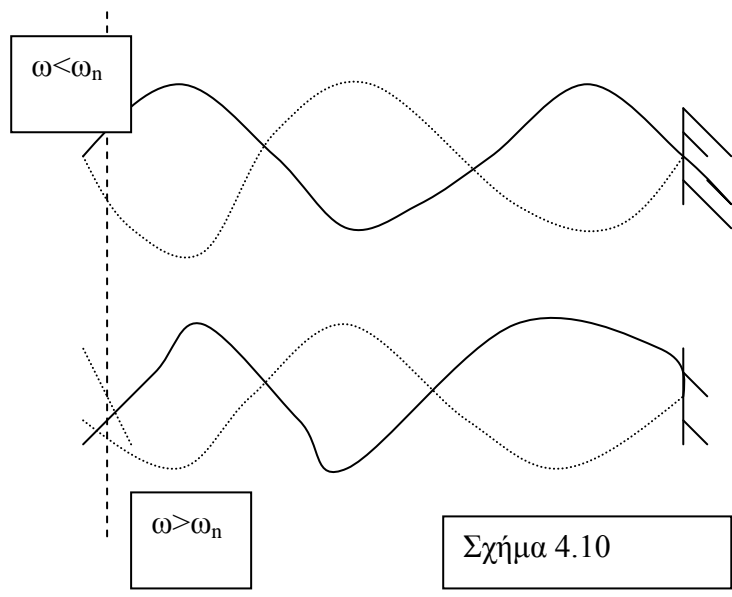
$$y(x,t) = \frac{B}{\sin(\pi - \omega L/v)} \sin((\omega x/v) + c) \cos \omega t$$

Αρα, η απόκριση της χορδής στην εξαναγκασμένη κίνηση του ενός άκρου της θα έχει ένα πλάτος A που θα εξαρτάται από την κυκλική συχνότητα ω σύμφωνα με την (1), δηλαδή μπορεί να παρουσιάζεται συντονισμός για $\pi/L = \omega$ ή για

$$v_n = n v / (2L) = (n/2L) (T/\mu)^{1/2}$$

Με άλλα λόγια, παρατηρείται συντονισμός όταν ταλαντώνουμε το ένα άκρο της χορδής με περίπου μία από τις φυσικές συχνότητες της. Τούτο είναι κάπως παράδοξο διότι σε εκείνη τη θέση όπου εφαρμόζουμε την εξαναγκασμένη ταλάντωση, θα έπρεπε να έχουμε και έναν κόμβο. Ωστόσο, δεν μπορεί να υπάρχει εκεί κόμβος αφού έχουμε εκεί εφαρμογή εξαναγκασμένης κίνησης! Γραφικά, η κατασταση για ω κοντά στο ω_n φαίνεται στο σχήμα:

76

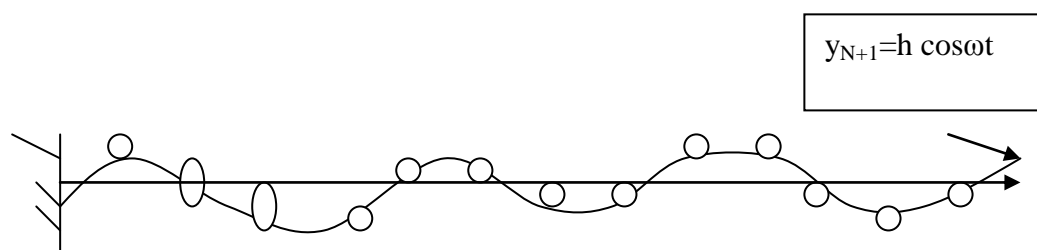


Σχήμα 4.10

Το σημαντικό που θα πρέπει να προσέξουμε αλλά και να προβληματιστούμε είναι πως από τη στιγμή που αρχίζουμε την εξαναγκασμένη ταλάντωση, δεν μπορούμε να δώσουμε άμεσα στο σύστημα όση ενέργεια επιθυμούμε αλλά πρέπει να περάσει αρκετός χρόνος. Κατά τη διάρκεια αυτού του χρόνου, λόγω των τριβών που αναπόφευκτα υπάρχουν, φθίνουν οι φυσικές ταλαντώσεις του συστήματος και επικρατούν οι εξαναγκάζουσες συχνότητες (ω ή το φάσμα $\Delta\omega$). Μπορεί κανείς να μελετήσει γιατί ένας μουσικός πατάει απότομα τη χορδή του πιάνου (με το σφυράκι του) στο $1/7$ του ολικού μήκους της ώστε να *σβήσει την δυσάρεστου ήχου 7^η αρμονική και όχι να την ενισχύσει!* Τούτο δεν είναι ασυμβίβαστο με την προηγούμενη συζήτηση διότι ο μουσικός με τον τρόπο του εφαρμόζει έναν μοναδικό παλμό και όχι μία περιοδική δύναμη στο σημείο που είναι ο κόμβος για την 7^η αρμονική.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ενός γραμμικού συστήματος ίσων μαζών και ελατηρίων (Προβλημα 5.16 A.P. French)

77



Σχήμα 4.11

Λύση:

Δεχόμαστε πως στη μόνιμη κατάσταση θα είναι $y_p = A_p \cos \omega t$. Το A_p υποθέτουμε πως θα πρέπει να ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στο $x=0$, αλλά και στο δεξί άκρο, και έστω πως

$$A_p = C \sin a \quad (2), \text{ με προσδιοριστέα τα } a \text{ και } C.$$

Λογω και της $y_{N+1} = h \cos \omega t$, θα δίνει προφανώς η Εξ. (2):

$$A_{N+1}=h \quad (3)$$

Και από την (2):

$$A_{N+1}=h = C \sin \{ \alpha [N+1] \}, \text{ οπότε,}$$

$$C = h / \sin \{ \alpha [N+1] \} \quad (3)$$

Αλλά και από τη δυναμική του συστήματος, για 3 τυχούσες διαδοχικές μάζες του είναι:

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = 2 \cos \alpha$$

Από αυτήν προκύπτει, όπως έχουμε δει

$$2 \cos \alpha = (-\omega^2 + 2\omega_0^2) / \omega_0^2$$

Από αυτήν παίρνουμε:

$$\alpha = \cos^{-1} [1 - \omega^2 / (2\omega_0^2)] \quad (4)$$

Από την έκφραση (3), σε συνδυασμό με την (4) φαίνεται πως για ορισμένες τιμές του ω θα έχουμε συντονισμό. Αυτό θα συμβαίνει όταν το

78

$\cos^{-1} [1 - \omega^2 / (2\omega_0^2)] (N+1) = m\pi$, όπου $m=1,2,3,\dots$ (βρείτε πόσους συντονισμούς έχουμε).

$$y_p = \frac{h}{\sin \{ \cos^{-1} [1 - \omega^2 / (2\omega_0^2)] [N+1] \}} \sin \{ \cos^{-1} [1 - \omega^2 / (2\omega_0^2)] p \} \cos \omega t$$

Μάθημα 14-11-2005 Τέλος

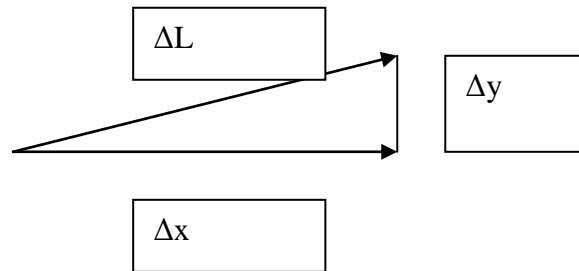
Μάθημα 13^ο : 21-11-05 αρχή

Πως το κύμα μεταφέρει ενέργεια;

Κινητική ενέργεια $E_{\text{κιν}} = 1/2 \Delta m u_y^2$

Δυναμική ενέργεια: Εξαρτάται από το πόσο τεντώνεται η χορδή (έργο παραγόμενο για το τέντωμα της χορδής)

$$E_{\text{δυν}} = T (\Delta L - \Delta x)$$



79

Σχήμα 4.12

$$E_{\text{δυν}} = T [(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} - \Delta x] \quad \Delta y \ll \Delta x$$

$$E_{\text{δυν}} = T \Delta x [(1 + (\Delta y/\Delta x)^2)^{1/2} - 1] \approx T \Delta x (\Delta y/\Delta x)^2/2 = 1/2 T \Delta x (\Delta y/\Delta x)^2$$

Τελικά, ας υπολογίσουμε την ολική ενέργεια της μάζας Δm :

$$E_{\text{ολ}} = 1/2 \Delta m u_y^2 + 1/2 T \Delta x (\Delta y/\Delta x)^2 =$$

$$1/2 \mu \Delta x [(\Delta y/\Delta t)^2 + v^2 (\Delta y/\Delta x)^2]$$

και ας εφαρμόσουμε την έκφραση αυτή σε ένα οδεύον αρμονικό κύμα

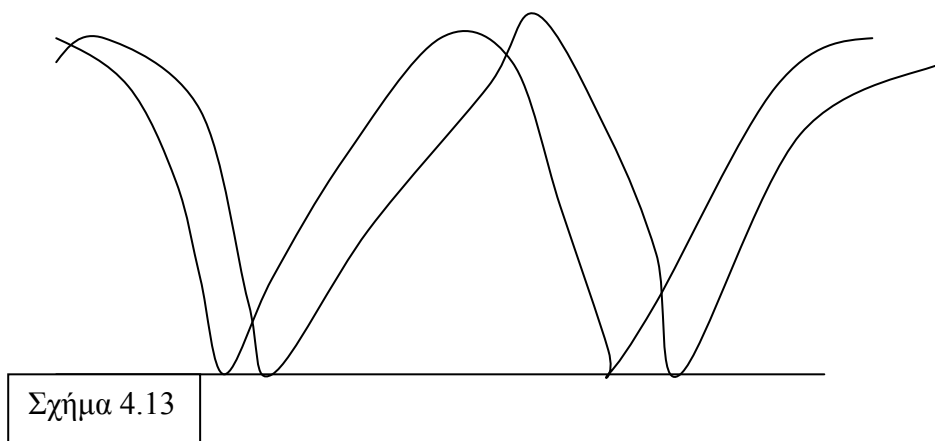
που λόγω της $y = y_m \cos(kx - \omega t)$ γίνεται

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} \mu \Delta x y_m^2 [\omega^2 + v^2 k^2] \cos^2(kx - \omega t)$$

Αρα, η ενέργεια στοιχείου μάζας $\Delta m = \mu \Delta x$ δίνεται από την ως άνω έκφραση και είναι πάντα ≥ 0 .

Η λύση μας για το $E_{ολ}$ της μάζας Δm είναι συνάρτηση των x και t . Μπορούμε να σχεδιάσουμε στιγμιότυπα σε 2 συγκεκριμένες αλλά διαφορετικές χρονικές στιγμές για να δούμε που βρίσκεται η ενέργεια:

80



Ενθετο:

Πρωτοπορεί το ελληνικό... χάος

Απαραβίαστη «χαστική κρυπτογράφηση» δοκιμάζεται σε δίκτυο της Αθήνας



Δημήτρης Συβρίδης

Σχήμα 4.14 Ο επικεφαλής της ομάδας Δημήτρης Συβρίδης εργάζεται στην πειραματική διάταξη στο Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα

Ένα κρυπτογραφικό σύστημα που μεταδίδει δεδομένα κρύβοντάς τα μέσα σε χάος δοκιμάστηκε για πρώτη φορά υπό πραγματικές συνθήκες σε μητροπολιτικό δίκτυο οπτικών της Αθήνας, στο πλαίσιο ευρωπαϊκού ερευνητικού προγράμματος.

Η έρευνα, που περιγράφεται στο έγκριτο περιοδικό Nature και μάλιστα έγινε εξώφυλλο στο περιοδικό New Scientist, βασίζεται σε έναν οπτικό πομπό λέιζερ, ο οποίος εκπέμπει χαοτική ακτινοβολία μέσα στην οποία κωδικοποιείται η προς μετάδοση πληροφορία.

81

Στην άλλη άκρη της οπτικής ίνας, μια πανομοιότυπη συσκευή αντιστρέφει τη διαδικασία και αναλαμβάνει να διαχωρίσει το χάος από την πληροφορία, εξηγεί στο in.gr/news ο καθηγητής Δημήτρης Συβρίδης του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Αθηνών, επικεφαλής της ομάδας.

Η δεύτερη αυτή συσκευή είναι ουσιαστικά το κλειδί για την αποκρυπτογράφηση, καθώς η λειτουργία της εξαρτάται από τα μοναδικά φυσικά της χαρακτηριστικά. Ακόμα και αν κάποιος ωτακουστής κατάφερνε να υποκλέψει τη μετάδοση, χωρίς το κλειδί το μόνο που θα μπορούσε να διαβάσει θα ήταν χάος.

Αν και η τεχνολογία αυτή είχε φανεί υποσχόμενη σε θεωρητικό επίπεδο, το πείραμα στην Αθήνα επιβεβαιώνει για πρώτη φορά ότι είναι δυνατή η εφαρμογή της σε εμπορικά δίκτυα οπτικών ινών.

Η μετάδοση έγινε στο μητροπολιτικό δίκτυο οπτικών ινών της «Αττικές Τηλεπικοινωνίες ΑΕ». Το σήμα ξεκίνησε από το εργαστήριο των ερευνητών στην Πανεπιστημιούπολη Ζωγράφου και κατέληξε πάλι εκεί έχοντας διανύσει συνολική απόσταση 120 χιλιομέτρων.

Χαοτικός ταλαντωτής

Τα λέιζερ, που χρησιμοποιούνται ως οπτικοί πομποί στις τηλεπικοινωνίες, κανονικά είναι αρμονικοί ταλαντωτές, δηλαδή παράγουν ένα σύμφωνο, μονοχρωματικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Κάτω από κατάλληλες ειδικές συνθήκες, το λέιζερ μπορεί να γίνει ασταθές και να μετατραπεί σε χαοτικό ταλαντωτή, ο οποίος παράγει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μεγάλου φασματικού εύρους.

Στην τελευταία έρευνα οι επιστήμονες μπόρεσαν να κρύψουν την πληροφορία μέσα σε αυτή την χαοτική ταλάντωση, αξιοποιώντας ένα πολύ μικρό, δυσδιάκριτο τμήμα του

φάσματός της.

Τα δεδομένα δεν χάνονται, καθώς το χάος εμπεριέχει οργάνωση και δεν είναι θόρυβος. Το λέιζερ-δέκτης αντιστρέφει τη διαδικασία και έτσι ο παραλήπτης του μηνύματος μπορεί να αφαιρέσει το χάος από το σήμα και να ανακτήσει την αρχική πληροφορία.

Το τελευταίο πείραμα έδειξε ότι η διάταξη είναι αποτελεσματική στην αξιόπιστη μετάδοση δεδομένων με ταχύτητες έως και 2,4 gigabit/sec.

«Τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι πληροφορία μπορεί να μεταδοθεί σε υψηλούς ρυθμούς χρησιμοποιώντας ντετερμινιστικό χάος» αναφέρει η δημοσίευση, με πρώτο συγγραφέα τον υποψήφιο διδάκτορα Απόστολο Αργύρη.

Επόμενο βήμα των ερευνητών είναι να αναπτύξουν ολοκληρωμένα φωτονικά κυκλώματα χαοτικής κρυπτογράφησης, δηλαδή να ενσωματώσουν την τεχνολογία στις συσκευές της βασικής υποδομής του Διαδικτύου.

news.in.gr

[*Επιστήμη - Τεχνολογία: Περισσότερες ειδήσεις*](#)

Μάθημα 21-11-05 τέλος

Κεφάλαιο 5

Επαλληλία Κυμάτων

Μάθημα 14^ο : 22-11-05 αρχή Lecture 9 Modern Optics Επαλληλία Κυμάτων

Δύο κύματα που οδεύουν προς την ίδια κατεύθυνση σε ένα ιδανικό ελαστικό μέσο, ικανοποιούν την αρχή της υπέρθεσης, δηλαδή αν $y_1(x,t)$ και $y_2(x,t)$ είναι τα δύο κύματα στη θέση x και χρόνο t , τότε το συνολικό αποτέλεσμα της δράσης των θα είναι:

$$y_{ολ}(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

Το αποτέλεσμα αυτό πρέπει να το δεχθούμε με κάποια δόση επιφύλαξης, που αφορά περιπτώσεις όπου στα κυματικά φαινόμενα υπεισέρχονται μη γραμμικές συμπεριφορές. Ωστόσο, την ενδιαφέρουσα αυτή περίπτωση δεν πρόκειται να τη συζητήσουμε στα πλαίσια αυτού του μαθήματος. Ιδείτε για παράδειγμα στην αναφορά Klein-Gordon

Στην περίπτωση αρμονικών κυμάτων μπορούμε να διακρίνουμε αρκετές υποπεριπτώσεις που καθιστούν την όλη συζήτηση αρκετά ενδιαφέρουσα.

83

- A) Τα δύο κύματα έχουν ίδια κυκλική συχνότητα
- B) Τα δύο κύματα έχουν διαφορετική συχνότητα
- Γ) Διαφορετικά Μήκη κύματος
- Δ) Έχουν διαφορετικά πλάτη
- E) Διαφοερτικές σταθερές φάσης
- ΣΤ) Διαφορετικές κατευθύνσεις

Ας πάρουμε την περίπτωση διαφορετικών σταθερών φάσης:

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t + \phi_1) \quad \text{και} \quad y_2 = y_m \sin(kx - \omega t + \phi_2)$$

Τότε,

$$y_{ολ}(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

και η ανάλυση στο $t=0$ δίνει:

$$= 2 y_m \sin \left(kx + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)$$

Αν ορίσουμε ,

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$$

και

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

τότε

$$y_{\text{ολ}} = 2 y_m \sin(kx + \bar{\varphi}) \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

Ποιο είναι το συνιστάμενο οδεύον κύμα;

Προκύπτει εύκολα:

$$y_{\text{ολ}} = 2 y_m \sin(kx - \omega t + \bar{\varphi}) \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

84

Μπορούμε έτσι να επεκτείνουμε την συζήτηση όταν έχουμε πολλά κύματα με σταθερές φάσης, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$. Στην περίπτωση όπου οι φάσεις διαφέρουν μεταξύ των κατά μία σταθερά ποσότητα, τότε είναι δυνατόν να έχουμε μία αναλυτική έκφραση: Αναλυτική έκφραση μπορεί να προκύψει, ακόμη και σε περίπτωση σαν την προηγούμενη, αλλά με τα πλάτη των κυμάτων διαρκώς ελαττούμενα όπως στην περίπτωση του Συμβολομέτρου Fabry-Perot (**προτεινόμενο θέμα προς παρουσίαση**).

ΥΠΕΡΘΕΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

Εδώ, μπορούμε να σκεφθούμε πως ένας *ταλαντωτής* μερικές φορές δονείται από Επαλληλία περισσοτέρων της μίας διεγέρσεων (δηλαδή εκτροπών από τη θέση ισορροπίας). Αν, π.χ., έχουμε ένα σώμα, μάζας m , που δέχεται τις δυνάμεις (στη χρονική στιγμή t), F_1, F_2, F_3 έτσι ώστε οι απομακρύνσεις να είναι αντίστοιχα,

$$\psi_1(x) = A \cos(\omega t + \theta_0), \quad \psi_2(x) = A \cos(\omega t + \theta_0 + \delta), \quad \text{και}$$

$$\psi_3(x) = A \cos(\omega t + \theta_0 + 2\delta), \quad \text{αντίστοιχα, με } \delta \text{ μία σταθερά διαφορά φάσης,}$$

τότε είναι φανερό πως ο ταλαντωτής θα κάνει μία συνολική κίνηση που με τη χρήση της μιγαδικής αναπαράστασης θα είναι

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = A \{ \exp[j(\omega t + \theta_0)] + \exp[j(\omega t + \theta_0 + \delta)] + \exp[j(\omega t + \theta_0 + 2\delta)] \}$$

$$= A \exp[j(\omega t + \theta_0)] [1 + \exp(j\delta) + \exp(2j\delta)]$$

$$= A \exp [j(\omega t + \theta_0)] \frac{1 - \exp (3\delta)}{1 - \exp (\delta)}$$

Η συνέχεια περιγράφεται στη σελίδα 31 του Pain, δίνει δε το

$$= A \exp [j(\omega t + \theta_0 + [2 \delta/2])] \frac{\sin(2\delta/2)}{\sin(\delta/2)} = A \exp [j(\omega t + \theta_0 + [2 \delta/2])] 2 \cos(\delta/2)$$

Τελικά, μπορούμε να πάρουμε το πραγματικό μέρος της έκφρασης αυτής

$$x(t) = \text{re} (z) = A \cos (\omega t + \theta_0 + \delta) 2 \cos(\delta/2)$$

Στο μάθημα αυτό έγινε ο υπολογισμός της επαλληλίας η το πλήθος κυμάτων που οδεύουν προς την ίδια κατεύθυνση, και έχουν σταθερή διαφορά φάσης το καθένα από το επόμενο, ενώ όλα έχουν το ίδιο πλάτος:

Επαλληλία η απλών αρμονικών ταλαντώσεων.

Ας υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της επαλληλίας η απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιου πλάτους αλλά με σταθερές διαδοχικές διαφορές φάσεις.

85

Θα έχουμε, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας,

$$x = a \cos \omega t + a \cos (\omega t + \delta) + a \cos (\omega t + 2\delta) + \dots + a \cos [\omega t + (n-1)\delta]$$

Αν τώρα κάνουμε χρήση μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων

$$x = \text{Re} [a (e^{i \omega t} + e^{i (\omega t + \delta)} + e^{i (\omega t + 2\delta)} + \dots + e^{i [\omega t + (n-1)\delta]})]$$

Το άθροισμα αυτό εύκολα δίνει

$$x = a \text{Re} e^{i \omega t} \{ 1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(n-1)\delta} \} = a \text{Re} e^{i \omega t} \frac{1 - e^{i n \delta}}{1 - e^{i \delta}} = a \text{Re} e^{i \omega t} \frac{e^{in\delta/2} (e^{-in\delta/2} - e^{-i\delta/2})}{e^{i\delta/2} (e^{-i\delta/2} - e^{-i\delta/2})}$$

$$= a e^{i\{\omega t + [(n-1)/2]\delta\}} \frac{\sin n\delta/2}{\sin \delta/2}$$

Τα παραπάνω βρίσκουν εφαρμογές στην “πολλαπλή συμβολή” (επιστημονικά όργανα, συστήματα κεραιών που συλλέγουν σε φάση κλπ).

Ειδική περίπτωση είναι εκείνη των δύο πηγών σε φάση ή συμβολή που οφείλεται σε ένα μονοχρωματικό κύμα και περνάει από δύο σχισμές.

Τότε εύκολα προκύπτει η σχέση

$$I=4a^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

Τότε είναι

$$I=I_0 =4a^2 , \text{ αν } \cos^2 (\delta/2)= 1$$

όταν δηλαδή είναι

$$d(z/R) = 0, +\lambda, \dots, +2m\lambda$$

Μάθημα 22-11-05 τέλος

Μάθημα 15^ο : 24-11-05 Αρχή

86

Έγινε περιγραφή της επαλληλίας 2 αρμονικών κυμάτων ίσης κυκλ. Συχνότητας και διαφορετικού πλάτους.

Αναφορές:

- <http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-013Electromagnetics-and-ApplicationsFall2002/71E96EAE-609D-4F69-B1EC-751EFE477610/0/Lecture06.pdf>

- <http://hep.ph.liv.ac.uk/~hutchcroft/Phys258/CN9Beats.pdf>

- parent cite: <http://hep.ph.liv.ac.uk/~hutchcroft/Phys258/>

- Διασπορά: <http://hep.ph.liv.ac.uk/~hutchcroft/Phys258/CN18Dispersion.pdf>

- Cornell: <http://www.physics.cornell.edu/p214/Superposition.pdf>

Ομαδική ταχύτητα

Ας δούμε τι συμβαίνει όταν δύο ή περισσότερα αρμονικά κύματα συναντώνται και έχουμε την συνέργειά των. Το αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό τύπο:

«sinA + sinB»:

$$y(x,t)=y_m \sin(\bar{k}x-\bar{\omega}t) \sin(\Delta k x - \Delta \omega t)$$

Η περιβάλλουσα του συνιστάμενου κύματος μεταβάλλεται αργά, και χαρακτηρίζεται από το ότι είναι ένα κύμα που έχει ταχύτητα διάδοσης της φάσης ίση με

$$\Delta \omega / \Delta k$$

Αυτή είναι γνωστή ως ταχύτητα της ομάδας.

Τα κυματίδια μικρού μήκους κύματος οδεύουν με ταχύτητα $\bar{\omega} / \bar{k}$.

Η σχέση $v_g = \Delta \omega / \Delta k = d\omega / dk$ ισχύει και για παλμούς κυμάτων οποιασδήποτε μορφής, και έτσι για τον προσδιορισμό της ομαδικής ταχύτητας χρειάζεται να γνωρίζουμε τη

σχέση διασποράς, $\omega = \omega(k)$, και από την παραγωγή της οποίας ως προς k προκύπτει η v_g για μία περιοχή κυματικών αριθμών εύρους Δk .

Έγινε η περιγραφή επαλληλίας n το πλήθος κυμάτων ίσου πλάτους, και συχνοτήτων που καλύπτουν ένα εύρος $\Delta\omega$, με βήμα, $\delta\omega = \Delta\omega/n$, με ακραίες τιμές ω_1 και ω_2 .

Περιγράφηκε το θεώρημα εύρους ζώνης.
Έγιναν 2 ασκήσεις από 4^ο Κεφ. Του Pain, dhl. 4.15 και 4.16.

Αναφορές

1. The effect of digitisation on the signal-to-noise ratio of a pulsed radio signal

M. L. A. Kouwenhoven¹ - J. L. L. Voûte²

(<http://aanda.u-strasbg.fr:2002/papers/aa/full/2001/41/aah3011/aah3011.html>)

87

Μάθημα 24-11-05 Τέλος

Μάθημα 16^ο : 28 -11-05 Αρχή

Κεφάλαιο 6

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Εγινε εισαγωγή στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

(Σημείωση από διαδίκτυο):

Maxwell's Equations in empty space (free of charges and currents) are:

Gauss's Law for Electricity

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (\text{εννοούμε κλειστό ολοκλήρωμα παντού στη συνέχεια})$$

Gauss's Law for Magnetism:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (\text{εννοούμε κλειστό ολοκλήρωμα})$$

Faraday's Law of Induction

88

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B / dt$$

Ampere's Law

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \epsilon_0 d\Phi_E / dt$$

According to Faraday's Law changing magnetic fields make electric fields and according to Ampere's Law changing electric fields make magnetic fields. This is the essence of the propagation of electromagnetic waves. The fields produce each other as they change in space and time. All the properties of EM waves listed above can be explained by applying Maxwell's Equations.

Ασκηση:

Example 5: Sunlight strikes earth with an average intensity of 1400W/m². Find the peak electric and magnetic fields.

The intensity of EM waves is, $I = E_m^2 / 2\mu_0 c$

$$\Rightarrow E_m = (2\mu_0 c I)^{1/2} = 1060 \text{ v/m.}$$

The ratio of the peak fields gives, $E_m = cB_m \Rightarrow B_m = E_m / c$
 $= 3.53\mu\text{T.}$

Example 6: Find the total power radiated by the sun.

There are 1400W/m² landing on the earth which is 1.50×10^{11} m away. Since the sun radiates EM waves uniformly in all directions this intensity will be the same over the surface area of a sphere that is 1.50×10^{11} m away.

Using the definition of power and the definition of intensity, $I \equiv dU / Adt = P/A$
 $= P / 4\pi r^2.$

Solving for the power, $P = I^2 \pi r^2 = (1400)(4\pi)(1.50 \times 10^{-11})^2 = 3.96 \times 10^{26} \text{ W}$.

Θεωρία Φωτός (Κλασική)

Σε κάθε σημείο στον κενό χώρο, η ηλεκτρομαγνητική κατάσταση του κενού περιγράφεται από δύο διανύσματα \mathbf{E} και \mathbf{H} .

Οι χρονικές εξαρτήσεις είναι

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Ενώ οι χωρικές εξαρτήσεις θα είναι

89

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

Ας πάρουμε τον στροβιλισμό εκάστου μέλους στην πρώτη εξίσωση αυτών και την χρονική παράγωγο της δεύτερης

Επειδή είναι όμως

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

και άρα,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

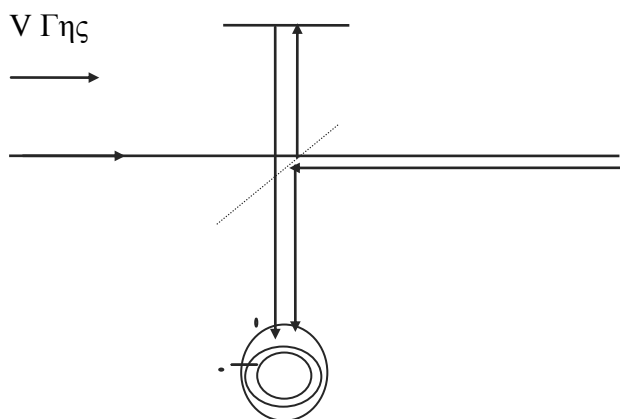
όπου $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ και για το μαγνητικό πεδίο

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

90

Ο Romer μέτρησε την ταχύτητα του φωτός με την βοήθεια των εκλείψεων των δορυφόρων του Δία το 1676. Η σχέση αυτή είναι για διανύσματα. Αργότερα θα προκύψει ότι μόνο εγκάρσια κύματα υπάρχουν.

Ο Μίκελσον με το περίφημο πείραμα του απέδειξε την σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.



Εαν η ταχύτητα κύματος άλλαζε λόγω της παρουσίας της ταχύτητας V της γής, τότε αν στρέψαμε την συσκευή κατά 90 μοίρες, το αποτέλεσμα τω κροσσών

συμβολής θα μεταβάλλετο. Τέτοια μεταβολή δεν παρατηρήθηκε. Έτσι, καταρρίφθηκε η ιδέα του “αιθέρα”.

Τα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα ικανοποιούν την ειδική θεωρία της σχετικότητας ως προς τους κανόνες μετασχηματισμού του E και B σε διάφορα αδρανειακά συστήματα

$$\text{Αποδεικνύεται } \Delta t' - \Delta t = -(1/c) (d_1+d_2) (v^2/c^2)$$

Με $(d_1+d_2) = 300$ εκατοστομετρα, $(v^2/c^2) = 10^{-8}$, η διαφορά χρόνου είναι 10^{-16} sec.

$$\text{Άρα, } c(\Delta t' - \Delta t) = 30 \text{ nm.}$$

Η ακρίβεια του πειράματος Μίκελσον-Μόρλεϊ ήταν 3 φορές καλύτερη από αυτό.

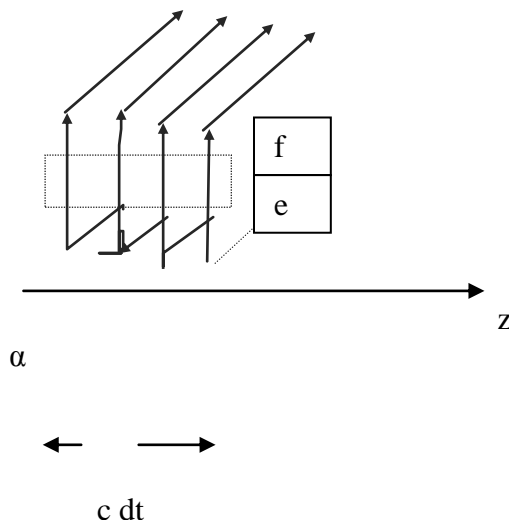
(Κεφάλαιο 11 στου Jackson , Classical Electrodynamics)

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

91

Η εξίσωση του Φαραντέι υπό ολοκληρωτική μορφή είναι

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$



Ας εφαρμόσουμε στην κλειστή διακεκομμένη διαδρομή τη σχέση (1). Το κύμα διανύει σε χρόνο dt διάστημα $c dt$

Αρα, αν το εμβαδό διακεκομένου ορθογωνίου είναι

$$a \, c \, dt,$$

τότε η μεταβολή ροής, $d\Phi = B (a \, c \, dt)$. Συνεπώς $d\Phi/dt = B a c$ και η εξίσωση (1) δίνει

$$\oint \vec{E} \, dl = - B a c$$

Το πρώτο σκέλος προκύπτει ότι είναι ίσο με $E a$, μία και στο τμήμα fe το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν αφού το κύμα δεν έχει φθάσει ακόμα. Αρα, $E = cB$ από το νόμο Φαραντέι

Δείξτε ότι τα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια

Είναι

$$\text{div } \vec{B} = 0 \text{ και } \text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

92

Θεωρούμε τώρα ένα κύμα που διαδίδεται στον άξονα z , και έστω ότι διαλέγουμε να είναι πάνω στον άξονα x το διάνυσμα του \vec{E} . Αφού όλες οι παράγωγοι του \vec{E} ως προς x και y είναι μηδέν, άρα όπως φαίνεται από την (2), θα είναι

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad \&$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

Αρα, είναι σταθερές οι συνιστώσες H_z και συνεπώς δεν υπάρχει διαμήκης κύμα. Παρόμοια προκύπτει ότι το E_z είναι σταθερό (Δείξτε το).

Αν εκλέξουμε την ταλάντωση του \vec{E} να είναι κατά την διεύθυνση του άξονα x , τότε από την (1) προκύπτει

$$-\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\rightarrow \text{Ενώ η } \text{curl } \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

->

$$\rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} H_y \quad (3)$$

Επειδή όμως

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial z}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial t}$$

93

παίρνοντας τη παράγωγο ως προς χρόνο της (2) και την μερική παράγωγο ως προς z της (3),

$$-\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_x}{\partial z} - 0$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial E_x}{\partial t} = - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$$

Ένταση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων- Διάνυσμα Poynting

Είναι γνωστόν ότι η πυκνότητα ενέργειας για στατικό ή μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δίνεται από:

$$\text{Πυκνότητα ενέργειας} = \varepsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0$$

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε μία επιφάνεια εμβαδού A , κάθετη προς τη διάδοση ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, η ενέργεια που θα περιέχεται σε ένα στοιχείο μήκους Δz κατά μήκος της διάδοσης του κύματος θα είναι:

$$w(z,t) = A \Delta z \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0 \right)$$

Συνεπώς, η ένταση της ακτινοβολίας, οριζόμενη ως $(1/A) \partial w/\partial t$ θα είναι για επίπεδα κύματα οδεύοντα κατά τον άξονα z ,

$$\partial w/\partial t = A \Delta z \left(\epsilon_0 E_x \partial E_x/\partial t + B_y \partial B_y/\partial t/\mu_0 \right) \quad (1)$$

και κάνοντας χρήση των 2 εξισώσεων του Maxwell για επίπεδα κύματα στο κενό:

$$(1/c^2) \partial E_x/\partial t = - \partial B_y/\partial z \quad \text{και} \quad \partial B_y/\partial t = - \partial E_x/\partial z$$

προκύπτει από την (1)

$$\partial w/\partial t = - A \Delta z \left(\epsilon_0 E_x \partial B_y/\partial z + (1/\mu_0) B_y \partial E_x/\partial z \right)$$

=

$$\begin{aligned} & - (A \Delta z/\mu_0) \partial (E_x B_y) / \partial z \\ & = (\text{Αναπτ. Taylor της } \partial (E_x B_y) / \partial z) = \\ & - (A \Delta z/\mu_0) \left[\frac{(E_x B_y)_{z+\Delta z} - (E_x B_y)_z}{\Delta z} \right] \end{aligned}$$

→

$$(1/A) \partial w/\partial t = S_z(z,t) - S_{z+\Delta z}(z,t),$$

όπου

$$S_z(z,t) = (1/\mu_0) (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_z$$

Με άλλα λόγια, ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας σε ένα στοιχειώδη όγκο $A\Delta z$, ισούται με την διαφορά $S_z(z,t) - S_{z+\Delta z}(z,t)$, δηλαδή τη διαφορά των δύο ροών ενέργειας στο αριστερό και το δεξί μέρος του όγκου (δεδομένου πως δεν έχουμε ροή ενέργειας προς τα πάνω – κάτω). Η ποσότητα $S_z(z,t)$ θα πρέπει να παριστάνει τον στιγμιαίο ρυθμό ροής ενέργειας στην κατεύθυνση $+z$, ανά μονάδα επιφανείας στη θέση z τη χρονική στιγμή t .

Ο ορισμός του διανύσματος S_z δεν περιορίζεται στην κατεύθυνση z . Το διάνυσμα \mathbf{S} είναι γνωστό ως **διάνυσμα Poynting**.

Παραδείγματα Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων

-
- Ραδιοφωνικά κύματα AM και FM (περιλαμβάνονται και σήματα TV)
 - Links επικοινωνίας κινητών τηλεφώνων

- Μικροκύματα
- Υπέρυθρη ακτινοβολία
- Φως
- Ακτίνες X
- Ακτίνες Gamma
- Ακτινοβολία laser
- Laser τύπου Free Electron Laser

Χρήσεις Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων

- Συστήματα επικοινωνιών
- Ραντάρ
- Μαγείρεμα (με microwaves)
- Ιατρική απεικόνιση (X rays)
- “Νυχτερινή όραση” (infrared)
- Αστρονομία (radio, μwave, IR, visible, UV, gamma)

95

Τρόποι παραγωγής Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων

Αξίζει τον κόπο να αναφέρουμε ένα τύπο ηλεκτρομαγνητικού κύματος, εντελώς μονοχρωματικού, γνωστό ως laser.

Σύνθετη αντίσταση διηλεκτρικού σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Από τη σχέση

$$-\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

αν αντικαταστήσουμε την λύση αρμονικού κύματος

$$E_x = E_0 \eta \mu \frac{2\pi}{\lambda} \cos(2\pi(vt - z))$$

και

$$H_y = H_0 \eta \mu \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z)$$

όπου

$$-\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

τότε προκύπτει, αν αναλογισθούμε και τη σχέση $\omega^2 = 1/(\mu\epsilon)$

$$-\mu v H_y = -E_x,$$

→

$$\mu^{1/2} H_y = \epsilon^{1/2} E_x, \text{ και το } E_x / H_y = (\mu/\epsilon)^{1/2} = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 376,7 \Omega$$

96

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε ένα μέσο με αγωγιμότητα, σ , διάφορης του μηδενός.

Αν ξεκινήσουμε από τη δεύτερη εξίσωση του Μάξγουελ

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1)$$

και παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο και τα δύο μέλη της, θα προκύψει, αν λάβουμε υπόψη ότι $\mu \partial \mathbf{J} / \partial t = \mu \partial (\sigma \mathbf{E} / \partial t)$

(για επίπεδο κύμα που διαδίδεται κατά τον άξονα των z, με ηλεκτρικό πεδίο κατά τον άξονα των x)

$$\partial^2 \mathbf{E}_x / \partial z^2 = \mu \epsilon \partial^2 \mathbf{E}_x / \partial t^2 + \mu \sigma \partial \mathbf{E}_x / \partial t \quad (2)$$

Η απόδειξη μπορεί να γίνει αν γράψουμε την x συνιστώσα της Εξ. (1) ως

$$-\partial H_y / \partial z = \epsilon \partial E_x / \partial t + \sigma E_x$$

μαζί με την

$$-\mu \partial H_y / \partial t = \partial E_x / \partial z \text{ (από την)}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \partial \mathbf{H} / \partial t$$

Αρα, η παρουσία του ρεύματος αγωγιμότητας προσθέτει στην κυματική εξίσωση έναν όρο διάχυσης και έχει διαστάσεις $L^2 T^{-1}$.

Ποιά είναι η συμπεριφορά ενός επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος του οποίου το ηλεκτρικό πεδίο βρίσκεται πάνω στον άξονα των x ;

$$\text{Αν } E_x = E(z) e^{i\omega t}$$

Τότε παίρνουμε από την εξ. (2), αν διώξουμε για απλότητα το (z)

$$\partial^2 E_x / \partial z^2 - (i \omega \mu \sigma - \omega^2 \mu \epsilon) E_x = 0$$

Ονομάζοντας ,

$$\gamma^2 \equiv i \omega \mu \sigma - \omega^2 \mu \epsilon, \text{ έχουμε}$$

$$\partial^2 E_x / \partial z^2 - \gamma^2 E_x = 0$$

Η λύση της είναι , $E_x = E_0 e^{i\omega t} e^{-\gamma z}$ (1)

Στο γ παίζει εν γένει ρόλο, τόσο το μ και σ όσο και το ω .

Ειδικά το γ είναι μιγαδικό, αν θέσουμε $\gamma = \alpha + \beta i$, προκύπτει εύκολα ότι

για έναν αγωγό, ($\epsilon \approx 0$), $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, $\gamma^2 = i \omega \mu \sigma$, $\alpha = \beta = \sigma \omega \mu / 2$,

καθώς επίσης

$$\alpha = \beta = (\sigma \omega \mu / 2)^{1/2}.$$

97

Αρα,

$$\gamma = (1+i) (\sigma \omega \mu / 2)^{1/2}$$

και λόγω της Εξ. (1),

$$E_x = E_0 \exp[-(\sigma \omega \mu / 2)^{1/2} z] \exp\{i[\omega t - (\sigma \omega \mu / 2)^{1/2} z]\}$$

Παρατηρούμε πως το ηλεκτρικό πεδίο μειώνεται εκθετικά με το z , δηλαδή με το βάθος διείσδυσης στον αγωγό ενώ φαίνεται να διατηρείται και η μοφή του οδεύοντος κύματος ως ένα βάθος που το πλάτος του πεδίου είναι αμελητέο.

Ονομάζουμε “επιδερμικό βάθος” το μήκος, $\delta \equiv (2 / \sigma \omega \mu)^{1/2}$

δηλαδή το μήκος στο οποίο το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου ελαττώνεται στο $1/e$ της αρχικής τιμής.

Παράδειγμα εφαρμογής του διανύσματος Poynting

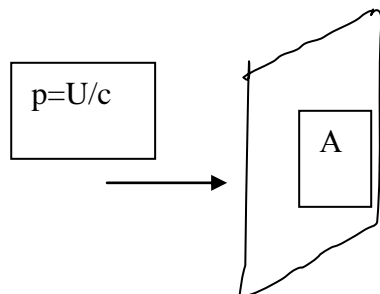
Το γινόμενο $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ έχει μέτρο $E_x H_y$ και διεύθυνση z . Οι διαστάσεις του είναι σε $W m^{-2}$. Το εξωτερικό αυτό γινόμενο, $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, λέγεται διάνυσμα Poynting. Μετράει τη ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και μονάδα επιφάνειας.

Πως μεταβάλλεται η διαδιδόμενη ένταση ακτινοβολίας με το βάθος z ;

Πίεση Ακτινοβολίας και Μεταφορά Ορμής

Όταν ΗΜ κύματα απορροφώνται από μία επιφάνεια, όχι μόνο εναποθέτουν ενέργεια, αλλά ταυτόχρονα μεταφέρουν στην επιφάνεια και ορμή.

98



Το σχήμα, πάνω, δείχνει φως που πέφτει κάθετα στην επιφάνεια Α. Η πίεση ισούται με

$$p=U/c \quad (1)$$

, όπου U η ενέργεια του κύματος. Στη συνέχεια, αντιμετωπίζουμε το θέμα ως εξής: Θεωρούμε, όπως και στην μηχανική, πως η πίεση ισούται με $p=F/A$, ενώ η δύναμη F δίνεται από την χρονική παράγωγο της μεταβολής της ορμής:

$$F=dp/dt \quad (2)$$

Και λόγω της (1):

$p = dU / (A c dt) = I/c$ *Πίεση ακτινοβολίας για πλήρη απορρόφηση* (3)
Για ολικώς ανακλώμενα κύματα, η μεταφορά ορμής και η πίεση ακτινοβολίας διπλασιάζονται όπως συμβαίνει και με τελείως ανακλώμενα σώματα.

Διασπορά

Διάδοση Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων μέσα στην ύλη-Διασπορά

Τα πειράματα αποκάλυψαν ότι οι ταχύτητες διάδοσης των μέσα στην ύλη είναι διαφορετικές από εκείνη μέσα στο κενό. Όταν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται μέσα στην ύλη, ακόμα και αν δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία, επάγονται ορισμένα φορτία και ρεύματα στην ύλη ως αποτέλεσμα της πόλωσης και μαγνήτισης του μέσου από το ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Για ομογενές και ισότροπο μέσο, αποδεικνύεται η σχέση

$$v = 1/(\epsilon\mu)^{1/2}$$

Ο λόγος $n=c/v$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό ορίζεται ως “δείκτης διάθλασης του μέσου στο μήκος κύματος της ακτινοβολίας που θεωρούμε”. Εύκολα προκύπτει η σχέση

100

$$n = 1/[(\epsilon\mu)/(\epsilon_0\mu_0)]^{1/2} \\ = (\epsilon_r\mu_r)^{1/2}$$

όπου ϵ_r και μ_r η σχετική διηλεκτρική και μαγνητική σταθερά του μέσου αντίστοιχα. Γενικά η μ_r είναι πολύ κοντά στη μονάδα, και συνεπώς $n \approx (\epsilon_r)^{1/2}$

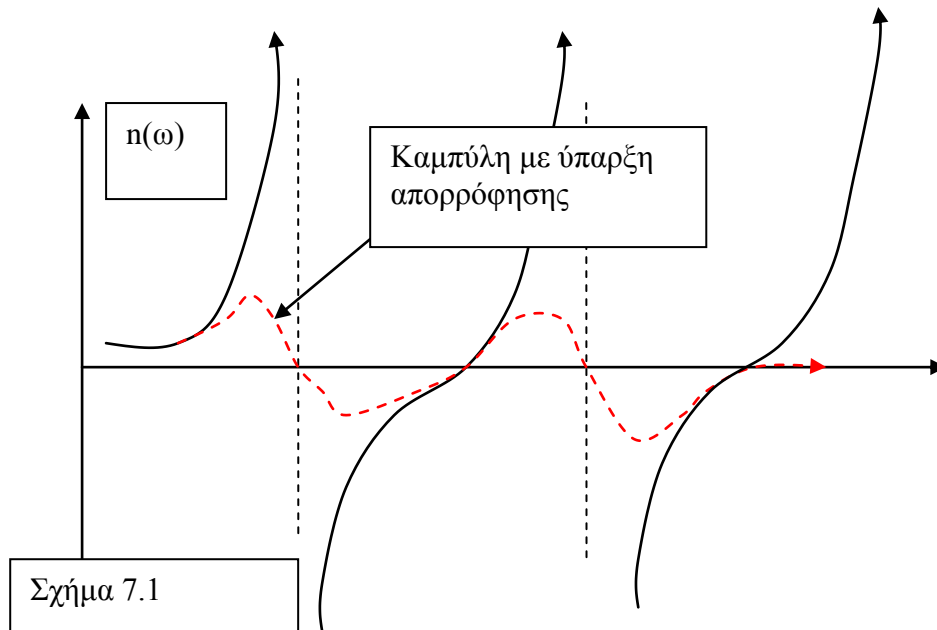
Από την μελέτη της διηλεκτρικής σταθεράς (Βλέπε Παράγ. 16.7, Alonso-Finn, Vol. 2) προκύπτει

$$\epsilon_r = 1 + \chi_r = 1 + \frac{n e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

όπου τα f_i ονομάζονται εντάσεις ταλαντωτή της ουσίας. Τα f_i είναι θετικά μικρότερα του 1 και έχουν άθροισμα τη μονάδα.

Παρατηρούμε ότι η σχετική διηλεκτρική σταθερά γίνεται άπειρη για ορισμένες τιμές της κυκλικής συχνότητας ω_i . Το αφύσικο αυτό αποτέλεσμα προκύπτει επειδή για την εξαγωγή της σχέσης (3) δεν ελήφθη υπ όψη και η τριβή, η οποία πάντοτε υπάρχει σε μικρό ή μεγάλο βαθμό.

Η γραφική παράσταση της εξάρτησης του ϵ_r από το ω φαίνεται ποικίλα στο παρακάτω διάγραμμα, όπου με εστογμένες γραμμές φαίνεται η ιδανική καμπύλη (χωρίς τριβές)



Η ταχύτητα ομάδας σε οπτικά κύματα

Η εκφραση για το δείκτη διάθλαση γράφεται, αν για λόγους καλύτερης

$$n^2 = \epsilon_r = 1 + \chi_r = 1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

101

εποπτείας αντικαταστήσουμε, το n (πυκνότητα ηλεκτρονίων) με N .
 Συνεπώς η ταχύτητα φάσης, $v=c/n$, εξαρτάται από τη συχνότητα. Επομένως, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα υφίστανται διασπορά.

Η ταχύτητα ομάδας,

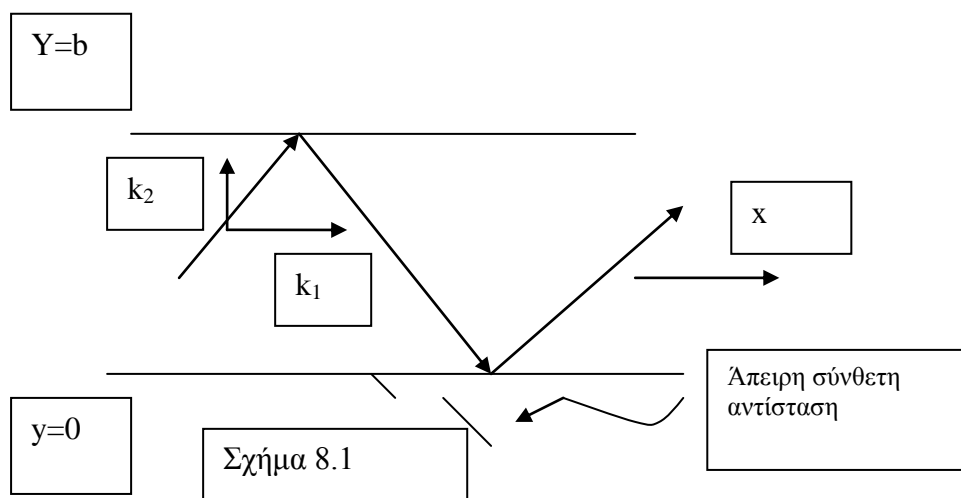
Μαθημα 28 -11-05 Τέλος

Κεφάλαιο 8

Κύματα σε δύο διαστάσεις

Μάθημα 17° : 29-11-05 αρχή

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τη διάδοση ενός κύματος σε δύο διαστάσεις που περιορίζεται από δύο σταθερά όρια



102

Τότε, το συνολικό κύμα πάνω στη μεμβράνη (στη μόνιμη κατάσταση) θα είναι

$z = A_1 \sin [\omega t - (k_1 x + k_2 y)] + A_2 \sin [\omega t - (k_1 x - k_2 y)]$ μαζί με τις οριακές συνθήκες στα $y=0$ και $y=b$ που δίνουν:

$$0 = A_1 + A_2 \rightarrow A_1 = -A_2 \text{ (στο } y=0\text{)}$$

και

$$z = -2 A_1 \sin (k_2 y) \cos (\omega t - k_1 x) = 0 \text{ (στο } y=b\text{)}, \text{ άρα : } k_2 b = m \pi, m = 0, +1, +2, \text{ κλπ.}$$

(ίδτετε πρόβλημα 8.2)

Διάδοση κύματος σε γραμμή μεταφοράς τύπου δι-διάστατου κυματοδηγού:

Περίπτωση σαν την πιο πάνω υπάρχει για ένα κύμα που διαδίδεται κατά την κατεύθυνση x με φασική ταχύτητα:

$$v_\phi = \omega/k_1 = (k/k_1) v \quad (1),$$

όπου v η ταχύτητα σε ένα μέσο άπειρης έκτασης ($v = \omega/k$), η οποία προφανώς είναι μικρότερη του v_ϕ , επειδή

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2$$

$$\text{Τώρα, } k^2 = k_1^2 + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}$$

Μετά πράξεις:

$$k_1 = \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad (2)$$

Τώρα, αφού η διάδοση γίνεται μόνο παράλληλα προς τον άξονα των x, η ταχύτητα ομάδας, v_g (διαφορίζοντας την Εξ-(2) αφού πάρουμε πρώτα το τετράγωνο της)

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_1} = \frac{k_1}{\omega} v^2 = (k_1/k) v$$

Αρα, και λόγω της Εξ.(1)

$$v_g v_\phi = [(k_1/k) v] [(k/k_1) v] = v^2$$

Για να έχουμε διάδοση πρέπει να είναι το k_1 πραγματικό, άρα

$\omega/v \geq m \pi / b$, και άρα η συχνότητα ν ικανοποιεί τη σχέση $\nu \geq m \pi v / (2b)$, όπου ο ακέραιος m έχει μία μέγιστη τιμή:

$$m_{\max} \leq 2b \nu / v$$

Αρα, για κάθε τρόπο με αύξοντα αριθμό m υπάρχει μία συχνότητα αποκοπής ίση με $m \pi v / (2b)$.

Συνεπώς, ο κυματοδηγός δρά ως φίλτρο συχνότητας.

Ανάλυση Fourier

Στη συνέχεια έγινε εισαγωγή σε σειρές Fourier

Fourier Analysis

Η γενική κίνηση χορδής

Δίνεται από

$$\psi(z,t) = A_1 \sin k_1 z \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin k_2 z \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \dots$$

Τα A_n και οι σταθερές φάσης ϕ_n καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή στιγμιαία μετατόπιση $\psi(z,t)$ και στιγμιαία ταχύτητα για $t=0$.

Ανάλυση κατά Φουριέ Παλμού

Ανάλυση Φουριέ Έγινε 25-11-03 ΣΕ και ΕΕ

Στην περίπτωση χορδής που εκτελεί ένα συγκεκριμένο τρόπο ταλάντωσης

$$y_n(x,t) = A_n \exp[i(\omega_n t - \delta_n)] \sin(n\pi x/L)$$

104

Μπορούμε να φανταστούμε ότι μία αυθαίρετη σύνθεση (επαλληλία) από τρόπους ταλάντωσης είναι επιτρεπτή! Πάρτε ένα στιγμιότυπο για την αρχή των χρόνων.

Τότε

$$y_n(x,0) = A_n \exp[i(-\delta_n)] \sin(n\pi x/L) \text{ ---} \rightarrow$$

$$y_n(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\pi x/L) \quad (F1)$$

$$\text{Με } B_n = \cos(\omega_n t_0 - \delta_n)$$

Ισχύει και το αντίστροφο της (F1)

Μπορεί μια αυθαίρετη κυματομορφή με κάποια περιοδικότητα να αναλυθεί σε άπειρη σειρά ημιτονικών συναρτήσεων όπως εκείνες της (F1).

Αυτό φαίνεται αρκετά αυθαίρετο, οστόσο όμως η αυθαιρεσία εξαφανίζεται όταν πάμε στο όριο $N \Rightarrow \infty$ της περίπτωσης συζευγμένων σφαιριδίων N το πλήθος που εκτελούν εγκάρσιες μικρού πλάτους ταλαντώσεις. Εκεί έχουμε N το πλήθος τρόπους ταλάντωσης. Η περιγραφή εκάστου τρόπου περιλάμβανε εκεί δύο σταθερές ρυθμιζόμενες

(1) πλάτος και (2) φάση. Αρα έχουμε 2N προς προσδιορισμό σταθερές. Αυτές μας επιτρέπουν να προσδιορίσουμε αυθαίρετες τιμές αρχικής απομάκρυνσης και ταχύτητας εκάστου σωματιδίου. Ο προηγούμενος ισχυρισμός είναι λογική συνέπεια της εφαρμογής του αποτελέσματος των N σφαιριδίων σε αυθαίρετα μεγάλο αριθμό συνδεδεμένων σωματιδίων.

Αναφορές

1. <http://biology-web.nmsu.edu/twright/BIOL450/Lectures/Hand03.ppt#1>

Μάθημα 29-11-05 τέλος

Μάθημα 18^ο : 1 -12-05 αρχή

Επανάληψη των περί ανάλυσης Φουριέ.

Στην πραγματικότητα, έχουμε περιπτώσεις όπου η ταλαντωτική κίνηση χορδής δεν αντιστοιχεί σε συνοριακές συνθήκες με ακλόνητα τα δύο άκρα. Π.χ. έχουμε το ένα άκρο ακλόνητο, ενώ το άλλο άκρο μπορεί να συνδέεται με ένα γλιστερό και αβαρή κρίκο που να μετακινείται χωρίς τριβή κατά μήκος ενός στήλου. Τέλος, αυτός ο κρίκος θα μπορούσε να έχει πεπερασμένη μάζα.

Με βάση το θεώρημα του J. Fourier το 1822, οποιαδήποτε πολύπλοκη περιοδική ταλάντωση μπορεί να αναλυθεί σε ένα σύνολο απλών αρμονικών ταλαντώσεων με συχνότητες που είναι πολλαπλάσια της περιόδου της περιοδικής αυτής κίνησης. Οι διάφορες συνιστώσες κινήσεις με τα σχετικά των πλάτη και φάσεις, όταν προστίθενται σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, μπορεί να δώσουν την αρχική πολύπλοκη περιοδική κίνηση.

Μία συνάρτηση είναι περιοδική όταν ικανοποιεί τη σχέση $f(t+\tau)=f(t)$ διά κάθε t , όπου τ είναι η περίοδος της. Το t μπορεί να είναι μία μεταβλητή που να αντιστοιχεί σε θέση, x , δηλαδή να έχουμε στην υπό θεώρηση συνάρτηση χωρική περιοδικότητα.

Το θεώρημα του Fourier (Μοιράσθηκαν σχετικές σημειώσεις)

Σύμφωνα με αυτό, οποιαδήποτε μονοσήμαντη περιοδική συνάρτηση $f(x)$ που είναι είτε συνεχής είτε κατά τμήματα συνεχής, και έχει έναν πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών (στο f ή στην κλίση df/dx), μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα όρων της μορφής:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

Υπολογισμός των συντελεστών, a_0 , a_n , και b_n

Για να βρούμε τον συντελεστή a_n πολλαπλασιάζουμε την Εξ.(1) επί $\cos nx$, και στα δύο σκέλη της, και στη συνέχεια κανονίζουμε, και στα δύο σκέλη, ολοκλήρωση πάνω σε όλη την περίοδο του x (0 ως 2π).

Τότε, μπορεί να δειχθεί ότι

$$a_n = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

Ανάλογα, μπορεί να δειχθεί ότι:

$$b_n = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Τέλος, αποδεικνύεται εύκολα πως

$$a_0 = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

Στις σχέσεις για τα a_n και b_n σημαντικό ρόλο παίζουν οι ιδιότητες

$$(1/\pi) \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \text{ και}$$

$$(1/\pi) \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \delta_{nm}$$

Μιγαδική αναπαράσταση των σειρών Fourier

106

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Θέτοντας, $a_n = c_n \sin \theta_n$, και $b_n = c_n \cos \theta_n$, οπότε προκύπτει

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx + \theta_n)$$

όπου

$$c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \text{ και } \theta_n = \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n}$$

Πράγματι, από τις σχέσεις

$$a_n = c_n \sin \theta_n, \text{ και } b_n = c_n \cos \theta_n$$

υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε : $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$

Επίσης, διαιρώντας κατά μέλη τις:

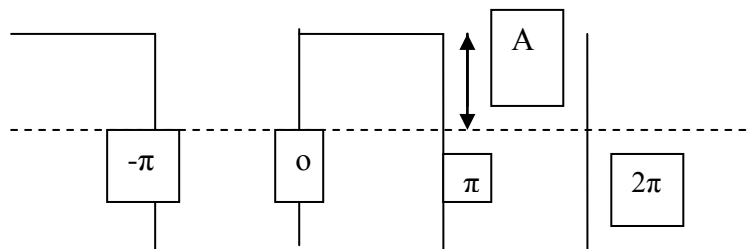
$$a_n = c_n \sin \theta_n, \text{ και } b_n = c_n \cos \theta_n$$

παίρνουμε την

$$\tan \theta_n = a_n / b_n$$

Προβλήματα

1. Τετραγωνικός παλμός, περιοδικός



Σχήμα 9.1

107

$$a_0 = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(x) dx = (1/\pi) 0 = 0$$

$$a_n = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = (1/\pi) \left[\int_0^{\pi} A \cos nx dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-A) \cos nx dx \right] = 0$$

διότι,

$$\int_0^{\pi} A \cos nx dx = + \int_{\pi}^{2\pi} \cos nx dx = 0$$

$$b_n = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= (1/\pi) \left[\int_0^\pi A \sin nx \, dx + \int_0^\pi (-A) \sin nx \, dx \right] = (2/\pi) A \int_0^\pi \sin nx \, dx =$$

$$(2/n\pi) A [\cos nx]_\pi^0 = (2/n\pi) A (1 - \cos n\pi)$$

Άρα, $b_n=0$, για άρτια n , και είναι ίσο με $4A/(n\pi)$, για περιττό n .

Έτσι,

$$f(x) = (4A/\pi) \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

Αναφορές

1. Fast Fourier Transforms:
<http://www.library.cornell.edu/nr/bookcpdf/c12-0.pdf>
2. Crash course on Fourier Transforms:
http://www.astro.psu.edu/users/mce/A451_2/A451/downloads/notes2.pdf
3. **Tutorial on Fourier Theory**
http://www.cs.otago.ac.nz/cosc453/student_tutorials/fourier_analysis.pdf
4. Fast Fourier Transform (60 σελίδες):
<http://asl.umbc.edu/pub/strow/p640/fftall.pdf>
5. Introduction to Optics and Spectroscopy (Univ. Delaware)
<http://asl.umbc.edu/pub/strow/p640/fftall.pdf>
6. Introduction to Optics and Spectroscopy , Wirth
www.udel.edu/chem/sneal/sntch/Resources/Chi.pdf
- 7 <http://www.complextoreal.com/chapters/fft1.pdf>
8. <http://www.complextoreal.com/fft3.htm>
9. <http://cnyack.homestead.com/files/afourtr/fourtr1.htm> (ωραίο φροντιστήριο)
10. Μετασχηματισμός Φουριέ αποσβενύμενης ημιτονικής συνάρτησης:
<http://cnyack.homestead.com/files/afourtr/ftdsoid.htm>
11. **Short time Fourier transform**
<http://cnyack.homestead.com/files/artran/stft2t1.htm>
12. **Nice sound Fourier analysis:**
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/viewtopic.php?t=33>
13. **Συνελίξεις:**
http://artemmis.univ-mrs.fr/cybermeca/Formcont/Traisig/Convol/java_convolution.htm
14. <http://math.haifa.ac.il/robotics/Background/Convolution/node4.html>

Γραμμές μεταφοράς

Μάθημα 19^ο : 5 – 12- 2005 αρχή

Έχουμε ως τώρα παρουσιάσει αρκετά θέματα γύρω από κύματα σε 2 διαστάσεις. Η πρόθεση μας είναι να γίνει κατανοητή η θεωρία που περιγράφει τους μηχανισμούς διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα σε κατάλληλα μέσα, γνωστά ως γραμμές μεταφοράς, τουλάχιστον όσον αφορά τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

Μία γραμμή μεταφοράς είναι ένα μέσο που επιτρέπει την ελεγχόμενη διάδοση του κύματος από ένα σημείο A σε ένα σημείο B, με χρήση ενός ζεύγους αγωγών.

Στην γραμμή μεταφοράς, υπάρχει ένας ορισμένος ρυθμός μεταβολής της τάσης, κατά μήκος της. Αυτή οφείλεται στην υπάρχουσα αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους, ίση με L_0 . Δηλαδή έχουμε σύμφωνα με τον νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής:

$$(\partial V/\partial x) dx = - (L_0 dx) \partial I/\partial t \quad (1)$$

Σε ένα τμήμα της γραμμής μεταφοράς στο οποίο αντιστοιχεί χωρητικότητα $C_0 dx$, προκύπτει απώλεια ρεύματος, ίση με

$$-(\partial I/\partial x) dx$$

109

Αυτή πρέπει σύμφωνα με ένα από τους Νόμους του Kirchhoff να αντιστοιχεί στο ρεύμα που φορτίζει τον πυκνωτή, άρα θα έχουμε ένα φορτίο $q = (C_0 dx)V$, και ένα αντίστοιχο ρεύμα:

$$I' = \partial[(C_0 dx)V]/\partial t$$

Θα είναι λοιπόν,

$$I' = \partial[(C_0 dx)V]/\partial t = -(\partial I/\partial x) dx \quad (2)$$

Η

$$-(\partial I/\partial x) = C_0 \partial V/\partial t \quad (3)$$

Επειδή είναι $\partial^2/(\partial x \partial t) = \partial^2/(\partial t \partial x)$ (γιατί;), παίρνουμε παίρνοντας το $\partial/\partial x$ της Εξ. (1) και το $\partial/\partial t$ της σχέσης (3):

$$(\partial^2 V/\partial x^2) dx = - (L_0 dx) \partial^2 I/(\partial x \partial t) \quad \text{και} \quad -(\partial^2 I/(\partial t \partial x)) = C_0 \partial^2 V/\partial t^2$$

Άρα,

$$\partial^2 V/\partial x^2 = L_0 C_0 \partial^2 V/\partial t^2 \quad (4)$$

Ομοίως, παίρνοντας το $\partial/\partial t$ της Εξ. (2) και το $\partial/\partial x$ της Εξ. (3), παίρνουμε τελικά

$$\partial^2 I/\partial x^2 = L_0 C_0 \partial^2 I/\partial t^2 \quad (5)$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις, (4) και (5) δείχνουν πως τα κύματα τάσης και ρεύματος διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα, $v^2 = 1/(L_0 C_0)$

Εδώ, πρέπει να θυμηθούμε, ελέγχοντας τις διαστάσεις, ότι τα L_0 και C_0 ορίζονται ανά μονάδα μήκους.

Αρα, η ταλαντωτική κίνηση των φορέων φορτίου (των σωματιδίων ενός μέσου) οδηγεί στη διάδοση κυμάτων τάσης και ρεύματος με ταχύτητα που καθορίζεται από το γινόμενο της μαγνητικής αυτεπαγωγής του μέσου και της ικανότητας του να αποθηκεύει δυναμική ενέργεια (ηλεκτρική).

Υπάρχουν πολλοί τύποι γραμμών μεταφοράς:

- Μία από αυτές, με πολλά πλεονεκτήματα συζητάμε παρακάτω:

Ομοαξονικά καλώδια

Αυτές κατασκευάζονται από ένα κύλινδρο από διηλεκτρικό υλικό όπως το πολυαιθυλένιο, που έχει ένα αγωγό κατά μήκος του άξονα του και έναν άλλο που περιβάλλει την εξωτερική επιφάνεια.

Οι γραμμές μεταφοράς είναι κατάλληλες για εφαρμογές χαμηλών συχνοτήτων. Σε υψηλές συχνότητες, χρησιμοποιούμε ομοαξονικά καλώδια. Ανάμεσα στους 2 αγωγούς, μπορεί να έχουμε αέρα ή ένα άλλο διηλεκτρικό.

Η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους δίνεται από:

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon}{\log_e(r_2/r_1)}$$

ενώ η αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους είναι

$$L_0 = \frac{\mu}{2\pi} \log_e(r_2/r_1)$$

Συνεπώς, η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων τάσης και ρεύματος εντός της γραμμής μεταφοράς είναι:

$$v = \frac{1}{(2\pi\epsilon\mu/2\pi)^{1/2}} = \frac{1}{(\mu\epsilon)^{1/2}}$$

Ομοαξονικά καλώδια μπορούν να κατασκευαστούν με πολύ μεγάλο βαθμό πιστότητας και, επειδή η ταχύτητα v είναι γνωστή, ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει ένα ηλεκτρικό σήμα ένα ορισμένο μήκος είναι γνωστός με μεγάλη ακρίβεια.

Ένα τέτοιο καλώδιο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως “γραμμή καθυστέρησης”, ώστε να καταστεί δυνατόν να έλθουν σε χρονική σύμπτωση δύο σήματα που λόγω της διαδικασίας παραγωγής των θα διέφεραν ως προς τον χρόνο άφιξης.

Μάθημα 5 -12-05 τέλος

Μάθημα 20^ο Δεκέμβριος : 6- 2005 (Τρίτη) Σελίδες 86-105 με εξαίρεση τις σελίδες 99-103.

Επαναλήψεις σημαντικών σημείων των προηγούμενων εδαφίων

- Περιγράφηκε το διάνυσμα Poynting (ίδτε σημειώσεις στο αντίστοιχο εδάφιο για τα Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα)

- Χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση μιάς γραμμής μεταφοράς

Λύσεις των εξισώσεων (4) και (5) είναι:

$$V_+ = V_{0+} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt-x) \quad (6.1)$$

και

$$I_+ = I_{0+} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt-x) \quad (6.2)$$

Ο δείκτης + αντιστοιχεί σε ένα κύμα που οδεύει προς την κατεύθυνση x.

Η Εξ.(1), δίνει με εφαρμογή των (6.1) και (6.2)

111

$V_+ = vL_0I_+$
αφού η σταθερά ολοκλήρωσης δεν έχει σημασία επειδή θεωρούμε μόνο ταλαντώνομενες τιμές τάσης και ρεύματος. Η σταθερά, θα αλλάξει απλώς την θέση του μηδενός (d.c.).

Υπάρχουν όμως και οι λύσεις:

$$V_- = V_{0-} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt+x) \quad (6.3)$$

και

$$I_- = I_{0-} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt+x) \quad (6.4)$$

Αυτές παριστάνουν τα κύματα τάσης και ρεύματος, αντίστοιχα, που οδεύουν προς τα αριστερά αφού ανακλαστούν στο τέλος της γραμμής μεταφοράς, που υποθέτουμε πως βρίσκεται στο $x=0$.

Για ευκολία σε υπολογισμούς γραμμών μεταφοράς, δείτε στην ιστοσελίδα:

<http://www.vk1od.net/tl/tlce.php>

<http://transcalc.sourceforge.net/>

Ο λόγος

V_+ / I_+

και η τιμή του, $\sqrt{L_0/C_0}$
είναι γνωστός ως σύνθετη χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής μεταφοράς, και συμβολίζεται με Z_0 .

Μπορούμε να δείξουμε ότι η τιμή Z_0 για το ως άνω ομοαξονικό καλώδιο είναι

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu/\epsilon} \log_e (r_2/r_1)$$

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο κενό αισθάνονται μία σύνθετη αντίσταση ίση με $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376 \Omega$

Στα κύματα που οδεύουν προς την κατεύθυνση των $-x$, ο λόγος

$$V/I = -vL_0 = -Z_0$$

εχει αρνητικό πρόσημο.

Όταν τα κύματα οδεύουν και προς τις 2 κατευθύνσεις, κατά μήκος μίας γραμμής μεταφοράς, η ολική τάση και το ολικό ρεύμα σε κάθε σημείο της δίνονται από:

$$V = V_+ + V_- \quad \text{και} \quad I = I_+ + I_-$$

Ανακλάσεις σε γραμμές μεταφοράς:

Ιδετε την αναφορά: [TransmissionLinesIntroduction-dianci8.pdf](#)

Οι οριακές συνθήκες στην ανάκλαση είναι $V_+ + V_- = V_L$, και $I_+ + I_- = I_L$

$$\text{Είναι, } V = V_0 e^{j(\omega t - kx)} + KV_0 e^{j(\omega t + kx)}$$

όπου K ο συντελεστής ανάκλασης της τάσης.

Λόγω της

$$\partial V / \partial x = -L_0 \partial I / \partial t$$

προκύπτει:

$$I = \frac{1}{j\omega L} (-jk) [V_0 e^{j(\omega t - kx)} - KV_0 e^{j(\omega t + kx)}] = \frac{k}{\omega L} [V_0 e^{j(\omega t - kx)} - KV_0 e^{j(\omega t + kx)}]$$

$$= \frac{1}{Z_0} [V_0 e^{j(\omega t - kx)} - KV_0 e^{j(\omega t + kx)}]$$

Αρα,

$$Z = \frac{V(x=0)}{I(x=0)} = \frac{A e^{j\omega t} (1+K)}{(A/Z_0) e^{j\omega t} (1-K)} = Z_0 \frac{1+K}{1-K}$$

Αρα,

$$K = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

$$Z+Z_0$$

Είναι τώρα,

$$\frac{I_-}{I_+} = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_0 - Z}{Z + Z_0}$$

και άρα

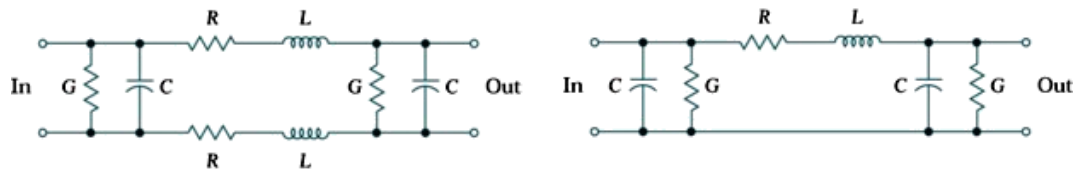
$$V_-/V_+ = 2 Z_L / (Z_L + Z)$$

και

$$I_-/I_+ = 2 Z / (Z_L + Z)$$

Πραγματικές Γραμμές μεταφοράς:

Αυτές χαρακτηρίζονται από το ότι έχουμε, μαζί με την αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους, και κάποια ωμική αντίσταση ανά μονάδα μήκους, εν σειρά με τη χωρητικότητα. Επίσης, μαζί με την χωρητικότητα έχουμε εν παραλλήλω και ωμική αντίσταση, G, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση στην περίπτωση αυτή δίνεται, όπως αποδεικνύεται, από τη σχέση:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

-Electronic Communication Systems , Roy Blake, Αρχείο Ch14 Transmision Lines...

-Πολύ καλή περιγραφή γραμμών μεταφοράς : Ch9-nenu-TransmissionLines.pdf

Άσκηση Φ3. Χορδή με αρχική συνθήκη ταχύτητας (δεν έγινε)

Διεγείρουμε τη χορδή στη χρονική στιγμή $t=0$ η αρχική απομάκρυνση είναι μηδέν και η αρχική ταχύτητα επίσης μηδέν εκτός από το διάστημα $((L-a)/2, (L+a)/2)$ που αποκτά αμέσως ταχύτητα v_0 . Υπολογίστε τα πλάτη των αρμονικών συνιστωσών που συμβάλουν στη κίνηση της χορδής.

Λύση

Έχουμε για τη γενική κίνηση της χορδής

$$\psi(z,t) = \cos(\omega_n t + \phi_n) [A_n \sin k_n z + B_n \cos k_n z] \quad (1)$$

Η (1) απλοποιείται ακόμη λόγω των αρχικών συνθηκών ($\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0 \forall t$) $\rightarrow B_n = 0$
Η δεύτερη από τις (2) δίνει $\sin k_n L = 0 \rightarrow \lambda_n = 2L/n$. Αλλά επειδή η ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων στη χορδή είναι $v = (T_0/\mu)^{1/2}$ και ισχύει η σχέση διασποράς, $\omega = vk$, τότε

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} (T_0/\mu)^{1/2}$$

Τώρα, επειδή

$$\psi(z,0) = 0 \text{ για } t=0 \quad (2)$$

$$\partial\psi/\partial t = 0 \text{ για } t=0 \text{ είτε } 0 \text{ είτε } v_0$$

Από την πρώτη των (2), $\cos\phi_n = 0$ ή $\phi_n = \pi/2$, άρα

$$\psi(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \pi/2) [A_n \sin k_n z] \quad (1)$$

$$\psi(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \pi/2) [A_n \sin(2\pi n z/\lambda)] \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας την δεύτερη συνθήκη των (3),

$$v_0 = - \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n A_n \sin(2\pi n z/\lambda) \text{ ή } = 0 \quad (4) \text{ ανάλογα σε ποίο διάστημα του } z \text{ είμαστε}$$

Τα $-\omega_n A_n$ είναι η συντελεστές της σειράς Φουριέ (4) στην οποία αναπτύσσεται η συνάρτηση

$$F(z) = \partial\psi/\partial t |_{t=0}$$

Ετσι,

$$C_n = -\omega_n A_n = (2/\lambda) \int_{z_0}^{z_0+\lambda} F(z) \sin(nkz) dz$$

$$= (2v_0/\lambda) \int_{(L-a)/2}^{(L+a)/2} F(z) \sin(nkz) dz$$

Τα A_n υπολογίζονται τότε εύκολα (να ευρεθούν).

Εφαρμογή στην ενέργεια των κανονικών τρόπων ταλάντωσης παλλομένης χορδής

Ο τυχόν τρόπος n γράφεται ως:

$$y_n = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin(\omega_n x/c)$$

Τετραγωνικό φάσμα συχνοτήτων (επανάληψη)

Προέκυψε ότι το συνολικό αποτέλεσμα είναι:

$$\psi(t) = A(t) \cos \omega_{av} t,$$

και

$$A(t) = A \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta \omega t}{\sin \frac{1}{2} \delta \omega t}$$

Για N παρα πολύ μεγάλο, $N \delta \omega \approx (N-1) \delta \omega = \Delta \omega$

και

$$A(t) = A \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta \omega t}{\frac{1}{2} \Delta \omega t}$$

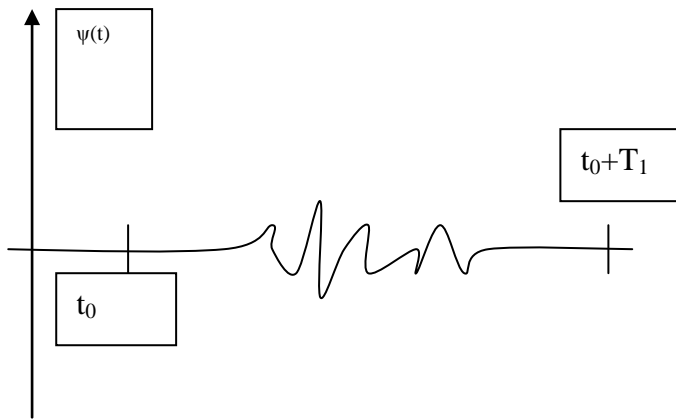
Τελικά,

$$\psi(t) = \frac{A(0)}{\Delta \omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega t \, d\omega \quad (1)$$

116

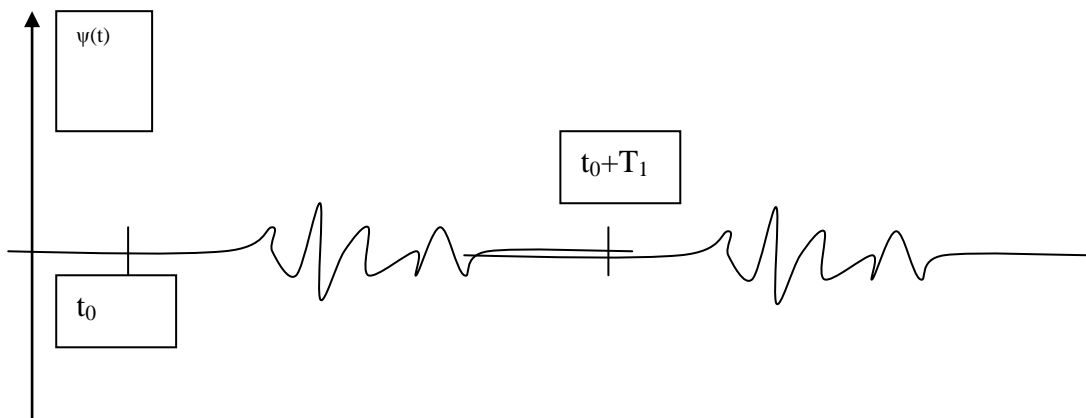
Ολοκλήρωμα Fourier Ανάλυση παλμών κατά Fourier Παλμός περιορισμένης διάρκειας

Αν θεωρήσουμε έναν παλμό περιορισμένης διάρκειας, όπως αυτός που φαίνεται στο Σχήμα, τότε είναι δυνατόν να τον επεκτείνουμε ώστε να γίνει μία περιοδική συνάρτηση του χρόνου (Σχήματα α και β, αντίστοιχα)



Σχήμα 11.1α

117



Σχήμα 11.1β

Ας θεωρήσουμε ένα παλμό που στον απώτερο χρόνο t_0 και πριν από αυτόν έχει μηδενικό πλάτος, όπως επίσης έχει μηδενικό πλάτος μετά έναν απώτερο χρόνο $t_0 + T_1$. Ενώ έχει μία μικρή χρονική περιοχή μη μηδενικού πλάτους στον ενδιάμεσο διάστημα όπως δείχνει στο Σχήμα. Τότε, ο παλμός θα μπορούσε να αναλυθεί κατά Φουριέ αν επεκτείναμε τη συνάρτηση $\psi(t)$ κατασκευάζοντας μία συνάρτηση $F(t)$ που αποτελείται από διαδοχικές περιόδους σαν εκείνη της $\psi(t)$, έτσι ώστε η $F(t)$ να είναι περιοδική με περίοδο T_1 .

Χωρίς να μπούμε στη διαδικασία της απόδειξης, ο παλμός $\psi(t)$ αναλύεται σύμφωνα με την παρακάτω σχέση (2)

Η εξίσωση (2) μας λέει ότι κάθε (αρκετά) ομαλή συνάρτηση $f(t)$ μπορεί να εκφρασθεί σαν μία συνεχής (σε αντίθεση με την διάκριτη των σειρών Fourier) υπέρθεση της γενικής μορφής

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \, d\omega \quad (2)$$

118

Οι συναρτήσεις $A(\omega)$ και $B(\omega)$ ονομάζονται **συντελεστές Fourier** της συνάρτησης $\psi(t)$

Αποδεικνύεται ότι:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \sin \omega t \, dt$$

και

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \cos \omega t \, dt$$

Μπορούμε έτσι να θεωρήσουμε εφαρμογή σε διάφορα προβλήματα όπως στην επίδραση ενός παλμού που οφείλεται σε ένα σεισμό.

Μπορούμε έτσι να θεωρήσουμε έναν παλμό διαρκείας από t_1 ως $t_1 + \Delta t$, σταθερού ύψους. Σύμφωνα με τα ανωτέρω, αυτός μπορεί να αναλυθεί υπό τη μορφή ενός ολοκληρώματος Fourier. Στη συνέχεια, το αποτέλεσμα μπορεί να διερευνηθεί, ως προς τις συγκεκριμένες συχνότητες στις οποίες μηδενίζεται το πλάτος. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει:

$$1 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega \Delta t / 2$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cos \omega t dt = (\psi_0/\pi) \frac{\Delta t/2}{\omega}$$

Είναι λοιπόν $B(\omega)=0$ για $\sin \omega \Delta t/2=0 \rightarrow \omega_1=2\pi/\Delta t = 2\pi/2\text{sec}=\pi \text{ Hz}$

Οι συχνότητες εγκάρσιας ταλάντωσης του φράγματος είναι $\nu_1= 0.2 \text{ Hz}$, $\nu_2= 0.4 \text{ Hz}$, κλπ

Να βρείτε ποιά είναι η ελάχιστη χρονική διάρκεια του (τετραγωνικού) σεισμού ώστε όλες οι συχνότητες ελεύθερης ταλάντωσης του φράγματος να είναι έξω από το κύριο μέγιστο (δηλαδή είναι μεγαλύτερες από την πρώτη ρίζα) του συντελεστή Fourier $B(\omega)$ αυτού του σεισμού;

Λύση:

Είναι η συνθήκη, $\Delta \nu < 0.2 \text{ Hz}$, και λόγω του θεωρήματος εύρους ζώνης συνεπάγεται $\Delta t < 1/\Delta \nu = 5 \text{ sec}$. Άρα, πρέπει η διάρκεια του παλμού (σεισμού) να είναι μεγαλύτερη των 5 sec. Σε αντίθετη περίπτωση, θα έχουμε, λόγω του θεωρήματος εύρους ζώνης, συχνότητες στον κυματοσυρό, οι οποίες συμπίπτουν με ιδιοσυχνότητες του φράγματος με ενδεχόμενες βλαβερές συνέπειες για το φράγμα.

!!!Ακτινοβολία επιταχυνόμενο ηλεκτρικού φορτίου!!!

Μικροί σεισμοί καταγράφονται κάτω από το υψηλότερο κτίριο του κόσμου



ΑΠΕ

Το Taipei 101 ζυγίζει 700.000 τόνους



Η σεισμική δραστηριότητα στην πρωτεύουσα της Ταϊβάν έχει αυξηθεί μετά την ανέγερση του Ταιρει 101, του υψηλότερου κτιρίου του κόσμου, και δύο ασθενείς δονήσεις έχουν καταγραφεί ακριβώς κάτω από τα θεμέλια, ανακοίνωσε Ταϊβανός γεωλόγος. Οι ερευνητές αναρωτώνται αν η πόλη έχει γίνει πιο ευπαθής σε σεισμούς.

Σεισμοί που οφείλονται σε ανθρώπινες κατασκευές, όπως φράγματα, έχουν καταγραφεί στις ΗΠΑ, την Ιαπωνία και τον Καναδά, αναφέρει το Reuters. Ωστόσο μέχρι σήμερα δεν είχαν υπάρξει αναφορές για δονήσεις που προκαλούνται από ουρανοξύστες.

Ο Δρ Λιν Τσενγκ-Χορνγκ, γεωλόγος της έγκριτης Σινικής Ακαδημίας της Ταϊβάν, αναφέρει ότι στην περιοχή της Ταϊπέι οι μικροσεισμοί, έντασης 2.0 έως 2,5 Ρίχτερ, έχουν αυξηθεί μετά την έναρξη της κατασκευής του Ταιρει 101, ύψους 508 μέτρων, το 1997.

Επιπλέον, δύο δονήσεις, έντασης 3,8 και 3,2, εκδηλώθηκαν ακριβώς κάτω από το κτίριο τον Οκτώβριο του 2004 και τον Μάρτιο του 2005.

Το κτίριο έχει βάρος 700.000 τόνους και η πίεση από την κατακόρυφη φόρτωση στα θεμέλια φτάνει στα 4,7bar. «Υπάρχει ένα σαφές ενδεχόμενο σεισμών που πυροδοτούνται από την πρόσφατη ανέγερση του υψηλότερου κτιρίου στον κόσμο» γράφει ο ερευνητής στο Geophysical Research Letters.

Διευκρινίζει, πάντως, ότι προς το παρόν η υπόθεση αυτή είναι αδύνατο να επιβεβαιωθεί ή να διαψευστεί. Ιστορικά, στην Ταϊπέι εκδηλώνονται σχετικά λίγοι σεισμοί, παρόλο που η Ταϊβάν βρίσκεται στην άκρη της τεκτονικής πλάκας των Φιλιππίνων.

Προκειμένου να διερευνηθεί το φαινόμενο, προτείνει ο Λιν, η Ταϊβάν θα πρέπει να εγκαταστήσει ένα δίκτυο αισθητήρων εκατοντάδες μέτρα μέσα στο έδαφος, όπως έχει κάνει η Ιαπωνία.

Τα συμπεράσματα των μελετών ίσως αποδειχθούν χρήσιμα σε άλλα μεγάλα κατασκευαστικά έργα

news.in.gr

Προβλήματα

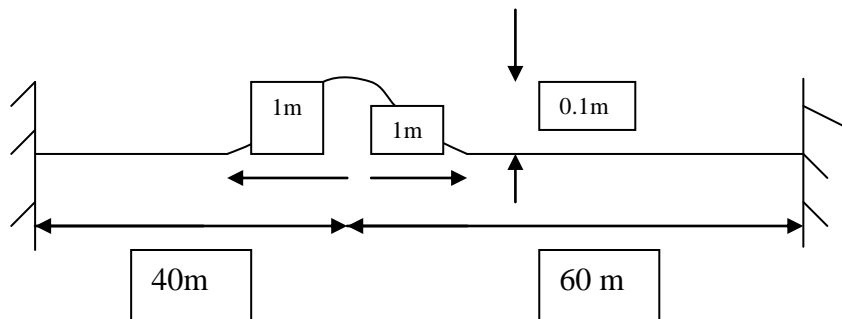
1. Το σχήμα δείχνει τον παλμό σε μία χορδή μήκους 100 m με τα δύο άκρα της ακλόνητα. Ο παλμός διαδίδεται προς τα δεξιά, με ταχύτητα 40 m/sec, χωρίς αλλαγή του σχήματός του.

(α) Κάνετε μία γραφική παράσταση που δείχνει πως η εγκάρσια ταχύτητα του παλμού μεταβάλλεται κατά μήκος της χορδής, κατά τη στιγμή που ο παλμός βρίσκεται στη θέση που φαίνεται στο σχήμα.

(β) Ποια είναι η μέγιστη κατακόρυφη ταχύτητα της χορδής (κατά προσέγγιση);

(γ) Αν η ολική μάζα της χορδής είναι 2 kg, ποια είναι η τάση T σε αυτήν;

(δ) Γράψετε μία εξίσωση για το $y(x,t)$ που περιγράφει αριθμητικά ημιτονικά κύματα, μήκους κύματος 5 m, και πλάτους 0.2 m που οδεύουν προς την αρνητική κατεύθυνση των x, σε μία χορδή πολύ μεγάλου μήκους, η οποία αποτελείται από το ίδιο υλικό, υπό την ίδια τάση T ως ανωτέρω.



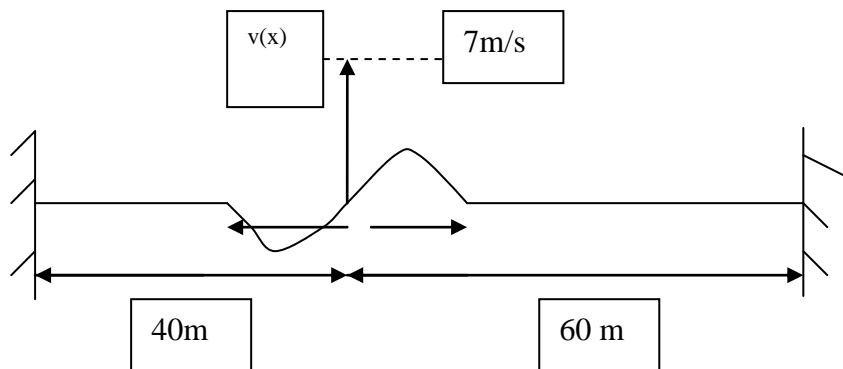
-
2. Οδεύων παλμός. Ένας παλμός που οδεύει κατά μήκος μιάς τεντωμένης χορδής, περιγράφεται από την εξής εξίσωση:

$$y(x,t) = \frac{b^3}{b^2 + (2x-ut)^2}$$

- a) Σχεδιάστε το y συναρτήσει του x για $t=0$
 b) Ποια είναι η ταχύτητα του παλμού και η κατεύθυνση διάδοσης;
 c) Υπολογίστε το v_y συναρτήσει του x για $t=0$, και δείξτε, μέσω αυτού του διαγράμματος, τι σημαίνει αυτό για την κίνηση αυτού του παλμού, για ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt
-
-

Λύση της 1:

(α) Αφού παλμός διαδίδεται προς τα δεξιά, το δεξί τμήμα του *ανέρχεται* ενώ το αριστερό τμήμα του *κατέρχεται* (η κάθοδος έπεται χρονικά της ανόδου). Το κεντρικό τμήμα του έχει μηδενική κατακόρυφη ταχύτητα αλλά έχει μέγιστη επιτάχυνση (αφού η απομάκρυνση είναι μέγιστη). Έτσι, έχουμε το σχήμα:



122

(β) Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τον παλμό με μία Gaussian συνάρτηση (για συγκεκριμένο t),

$$y(\eta) = A \exp(-\alpha \eta^2),$$

όπου $\eta = x - vt$, $A = 0.1 \text{ m}$, και $\alpha = 4 \text{ m}^{-2}$. Το γράφημα του παλμού μας πράγματι, ακολουθεί τη συνάρτηση αυτή. Η εγκάρσια ταχύτητα είναι τότε,

$$v_y = dy/dt = -A \exp(-\alpha \eta^2) 2 \eta \alpha (d\eta/dt)$$

$$= A \exp(-\alpha \eta^2) 2 \eta \alpha v$$

Μπορούμε να βρούμε το μέγιστο της ταχύτητας στο $t=0$ απαιτώντας:

$$(dv_y/dt)_{t=0} = 2 \alpha v^2 \exp(-\alpha \eta^2) (2 \alpha x_{\max}^2 - 1) = 0$$

$$\rightarrow (2 \alpha x_{\max}^2 - 1) = 0$$

$$\rightarrow x_{\max} = (1/(2\alpha))^{1/2}$$

Έτσι, η μέγιστη ταχύτητα στο $t=0$ είναι:

$$v_{y|\max} = dy/dt|_{x=x_{\max}} = A \exp(-1/2) 2 v (\alpha/2)^{1/2}$$

$$= 6.86 \text{ m/sec}$$

(γ) Είναι, $v=(T/\rho)^{1/2}$

Αρα, μπορούμε να βρούμε από αυτή τη σχέση το T:

$$T=\rho v^2 = 32 \text{ N}$$

(δ)

$$y(x,t)= A \cos (\omega t + k x)$$

με $\omega/k = v$ (1)

Για $\lambda=5\text{m}$, $k=2\pi/\lambda = 0.4 \pi \text{ m}^{-1}$

Και λόγω της (1)

$$\omega=k v =0.4 \pi \text{ m}^{-1} (40 \text{ m/sec}) = 16 \pi \text{ Hz}$$

Ετσι, η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y(x,t)= A \cos (\omega t + k x +\varphi)=$$

$$(0.2\text{m}) \cos (16 \pi (\text{s}^{-1}) t + 0.4 \pi (\text{m}^{-1}) x + \varphi)$$

Άσκηση 2:

Ένας παλμός οδεύει πάνω σε μία τεντωμένη χορδή και περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y(x,t)= \frac{b^3}{b^2+ (2x-ut)^2}$$

(α) Να σχεδιάσετε το y συναρτήσει του x για $t=0$

(β) Ποια είναι η ταχύτητα προς την κατεύθυνση διάδοσης

(γ) Η εγκάρσια ταχύτητα σε ένα ορισμένο σημείο ορίζεται ως $v_y=\partial y/\partial t$. Να υπολογίσετε το v_y συναρτήσει του x για $t=0$, και να δείξετε τι σημαίνει τούτο για την κίνηση του παλμού κατά τη διάρκεια ενός βραχέως χρονικού διαστήματος Δt .

Λύση της 2:

(α) Προκύπτει ένας συμμετρικός ως προς x παλμός

(b) Θυμηθείτε πως για οποιοδήποτε παλμό που οδεύει προς τη θετική κατεύθυνση των x, αυτός μπορεί να εκφρασθεί ως $y(\omega t -kx)$, για $k \geq 0$ και ότι η ταχύτητα διάδοσης είναι $\omega/k=v$. Τότε, βάζοντας $z= \omega t -kx$, και εκφράζοντας το y συναρτήσει και του z:

(α)

$$y(x,t)= \frac{b^3}{b^2+ z^2}$$

(β)

Ετσι, $z= 2x-ut$, και $v = u/2$. Γιαυτό, για θετικές τιμές του u, ο παλμός κινείται προς τα δεξιά.

Μετά χρονικό διάστημα Δt έχουμε το διάγραμμα:

(c)

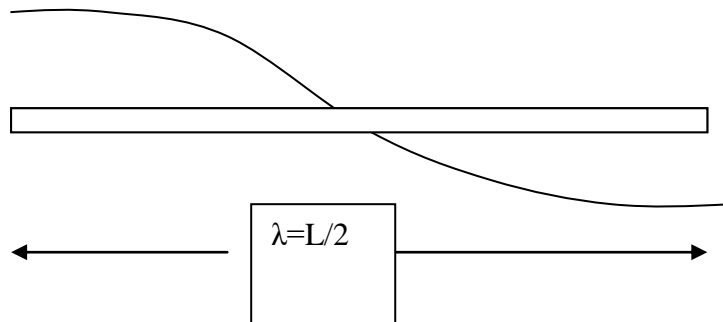
$$v_y|_{t=0} = \frac{4b^3 u}{(b^2 + 4x^2)^2}$$

3. Πρόβλημα

Μεταλική ράβδος στερεώνεται στο κέντρο της και συντονίζεται στα θεμελιώδη εγκάρσια κύματα συχνότητας 4 kHz. Ποια θα είναι η θεμελιώδης συχνότητα συντονισμού και οι δύο πρώτες ανώτερες αρμονικές όταν η θέση στήριξης μεταταθεί στο ένα άκρο;

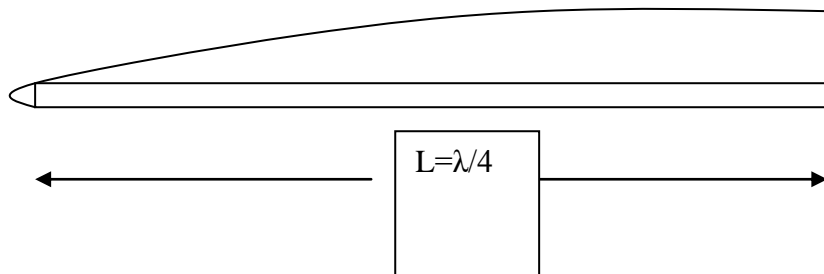
Λύση:

Όταν η στήριξη είναι στο μέσον, έχουμε την ακόλουθη εικόνα για την θεμελιώδη ταλάντωση:



124

Όταν η στήριξη είναι στο μέσον, θα είναι $\nu = v/\lambda = v/(L/2) = 4 \text{ kHz}$.
Στήριξη στο άκρο: Θα έχουμε την εξής εικόνα:



Είναι συνεπώς, $L = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots (2n-1)\lambda/4$ για $n=1, 2, 3, \dots$ Συνεπώς,

$\nu_1 = 2 \text{ kHz}, \nu_2 = (2n-1)[v/(4L)]$ για $n=2, 3, \dots$

Για $n=2$, προκύπτει, $\nu_2 = 6 \text{ kHz}$, για $n=3$, $\nu_3 = 10 \text{ kHz}$, κλπ.

Μετασχηματισμοί Fourier (Οι μιγαδικές εκφράσεις μπορούν να παραληφθούν σε πρώτη ανάγνωση)

Η εξίσ. (2) μας δίνει την έκφραση του μετασχηματισμού μίας επαρκώς ομαλής συνάρτησης $f(t)$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi\nu t) dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i\omega t) dt \quad (3)$$

Παρατηρήστε τα αντίθετα πρόσημα στους εκθέτες για τις εκφράσεις των $F(\nu)$ και $f(t)$. Αν έχουμε την κατανομή στο χρόνο μιας συνάρτησης, τότε μπορούμε να την εκφράσουμε σαν ένα φάσμα συχνοτήτων και αντιστρόφως. Ομοίως, μία ορισμένη κατανομή στο χώρο μπορεί να εκφρασθεί ως συνάρτηση κυματαριθμών (αυτό απαιτεί απλά έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα $1/2\pi$, επειδή $k = 2\pi/\lambda$).

Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι άρτια, μόνο το συνημίτονο του εκθετικού είναι ενεργό και έχουμε τότε ένα συνημιτονικό μετασχηματισμό Φουριέ:

$$f(t) = \int_0^{\infty} F(\nu) \cos 2\pi\nu t \, d\nu$$

και

$$F(\nu) = \int_0^{\infty} f(t) \cos 2\pi\nu t \, dt$$

Αντίστοιχα ισχύουν αν η $f(t)$ είναι περιττή. Σημειώστε, ότι εμφανίζονται μόνο θετικές συχνότητες.

Παραδείγματα μετασχηματισμών Φουριέ:

(Η μελέτη των μιγαδικών εκφράσεων μπορεί να παραληφθεί σε πρώτη ανάγνωση)

(1) Συνάρτηση της "σχισμής"

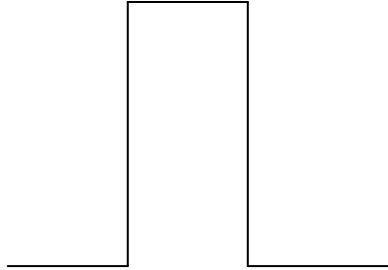
(2) Γκαουσιανή συνάρτηση

(1) Αυτή η συνάρτηση ορίζεται να έχει τιμή ίση με μηδέν για $|t| > d/2$, και ίση με h για $|t| < d/2$, άρα:

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt$$

$$= \int_{-d/2}^{d/2} h \exp(-i2\pi\nu t) dt$$

$$= \frac{-\hbar}{i2\pi\nu} [e^{-i2\pi\nu d/2} - e^{i2\pi\nu d/2}] = \hbar d \frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad \text{όπου } \alpha = \pi\nu d$$



127

Σχήμα Α

Εφαρμογή μετασχηματισμών Φουριέ στην οπτική περίθλαση από μία σχισμή

Το πλάτος του φωτός που περνάει μέσα από μία μοναδική σχισμή μπορεί να παρασταθεί στο χώρο από τον ορθογωνικό παλμό του Σχήματος Α

όπου το d είναι τώρα το εύρος της σχισμής, άρα αντί του χρόνου έχουμε τώρα ως μεταβλητή τη θέση x .

Λόγω της αρχής του Huygens έχουμε ένα σύστημα επιπέδων κυμάτων που οδεύουν προς όλες τις κατευθύνσεις και θα απεικονισθούν ή θα καταγραφούν στη θέση του πετάσματος.

Όταν τα κύματα αυτά εστιασθούν πάνω σε μία δεύτερη οθόνη, η κατανομή της έντασης (το τετράγωνο του πλάτους) μπορεί να υπολογισθεί συναρτήσει του d , λ , και της γωνίας περίθλασης θ :

Η εύρεση του πλάτους στη θέση P πάνω στην οθόνη PP_0 προϋποθέτει την πρόσθεση όλων των μικρών συνεισφορών των κυμάτων αφού λάβουμε υπόψη τη διαφορά φάσης των από το σημείο P ως τα διάφορα σημεία κατά μήκος της σχισμής

Είναι λοιπόν

$$F(k) = (1/2\pi) \int_{-d/2}^{d/2} \hbar e^{-i\varphi} dx$$

$$= (1/2\pi) \int_{-d/2}^{d/2} \hbar e^{-iklx} dx \quad (2)$$

όπου $l = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$

Άρα, η Εξ. (2) δίνει:

$$= \left[\frac{h}{-ikl2\pi} \right] (e^{-iklx} - e^{iklx})$$
$$\frac{d h \sin \alpha}{2\pi \alpha}$$

όπου $\alpha = kld/2 = \pi d \sin\theta/\lambda$

Η ένταση είναι

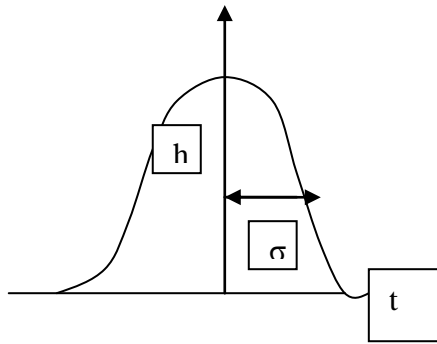
$$I = F(k) * F^*(k)$$

$$\frac{d^2 h^2 \sin^2 \alpha}{4\pi^2 \alpha^2}$$

(2) Gaussian Συνάρτηση:

Είναι

$$f(t) = h \exp(-t^2/2\sigma^2)$$



Ο μετασχηματισμός Fourier γίνεται $F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h \exp(-t^2/2\sigma^2) \exp(-i2\pi\nu t) dt$$

$$= h \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/2\sigma^2 - i2\pi\nu t + 2\pi^2\nu^2\sigma^2) \exp(-2\pi^2\nu^2\sigma^2) dt$$

$$= h \exp(-2\pi^2\nu^2\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(t/\sqrt{2}\sigma + i\sqrt{2}\pi\nu\sigma)^2) dt$$

Αλλά, $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$

Και αντικαθιστώντας

$$t/\sqrt{2}\sigma + i\sqrt{2}\pi\nu\sigma \equiv x \text{ και } dt = \sqrt{2}\sigma dx$$

άρα:

$$F(\nu) = h \sqrt{2\pi} \sigma \exp(-2\pi^2\nu^2\sigma^2)$$

Τα μονοχρωματικά κύματα δεν μπορούν να μεταφέρουν πληροφορία. Αυτή διαδίδεται με μία επαλληλία από μονοχρωματικά κύματα. Ας δούμε λοιπόν πως ένα μη-μονοχρωματικό κύμα διαδίδεται. Εστω ότι καλύπτει ένα εύρος συχνοτήτων

$$(\omega_0 - \Delta\omega/2 < \omega < \omega_0 + \Delta\omega/2)$$

και έστω ότι όλες οι συχνότητες στο παραπάνω διάστημα έχουν όλες το ίδιο πλάτος, E_0 . Στην περίπτωση συνεχούς κατανομής συχνοτήτων υποθέτουμε ότι έχουμε ένα κύμα με ισοκατανομή του πλάτους σε όλες τα διαστήματα συχνότητας, δηλαδή έστω

$$dE/d\omega = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

και συνεπώς

$$E = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} E_0 e^{i(kx - \omega t)} d\omega$$

όπου το κυματοδιάνυσμα k είναι συνάρτηση του ω . Αναπτύσσοντας το γύρω από το ω_0 .

Έτσι, θα έχουμε

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) (dk/d\omega)_0 + \dots$$

130

$$E = E_0 \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \exp \{ i [k_0 x + (\omega - \omega_0) (dk/d\omega)_0 x - \omega t] \} d\omega$$

και εύκολα προκύπτει ότι η έκφραση αυτή ισούται με

$$E = E_0 \exp(i[k_0 x - \omega_0 t]) \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \exp \{ i(\omega - \omega_0) [(dk/d\omega)_0 x - t] \} d\omega$$

όπου κάναμε χρήση της ιδιότητας $\omega = \omega_0 + \omega - \omega_0$.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα αυτό γίνεται εύκολα αν θέσουμε $\zeta = \omega - \omega_0$, οπότε τα όρια ολοκλήρωσης αλλάζουν, και εύκολα προκύπτει

| +Δω/2

$$E = (\Delta\omega E_0) \exp(i[k_0x - \omega_0 t]) \frac{\sin \left\{ \left[\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0 x - t \right] \zeta \right\}}{\left[\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0 x - t \right]}$$

|-Δω/2

$$E = E_0 \exp(i[k_0x - \omega_0 t]) \frac{2 \sin \left\{ \left[\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0 x - t \right] \Delta\omega/2 \right\}}{\left[\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0 x - t \right]}$$

Η αλλιώς

131

$$E = (\Delta\omega E_0) \exp(i[k_0x - \omega_0 t]) \frac{\sin \left[\left(\frac{x}{v_g} - t \right) \frac{\Delta\omega}{2} \right]}{\left(\frac{x}{v_g} - t \right) \frac{\Delta\omega}{2}}$$

$$= (\Delta\omega E_0) \exp(i[k_0x - \omega_0 t]) \frac{\sin(\theta)}{\theta}$$

Η παράσταση, $\sin(\theta)/\theta$, είναι μία συνάρτηση που δίνει την “περιβάλλουσα”. Παρατηρούμε ότι αυτή μετατοπίζει το μέγιστο της με ταχύτητα

$$dx/dt = (d\omega/dk)_0$$

Μάθημα 21^ο : 8 – 12- 2005 αρχή

Μηχανισμοί Παραγωγής Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων

Επιτάχυνση Ηλεκτρικών Φορτίων και Συνέπειες

Εστω ένα φορτίο που εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση ως εξής

$t < 0$ το φορτίο ηρεμεί

$0 \leq t < \tau$ το φορτίο έχει επιτάχυνση a

$t \geq \tau$ το φορτίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = a\tau$

Οι αρχικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου ξεκινούν από τη θέση του φορτίου. Σε μία μεταγενέστερη χρονική στιγμή οι γραμμές ξεκινούν από τη νέα θέση του φορτίου. Οι γραμμές δεν θα αλλάξουν στιγμιαία, αλλά με τη μορφή μίας διαταραχής που πρέπει να ξεκινήσει και να οδεύει προς τα έξω, και βαθμιαία να αλλάζει τις γραμμές πεδίου.

Η διαταραχή έχει τη μορφή κάμψης των δυναμικών γραμμών που ενώνει τις παλιές με τις νέες γραμμές πεδίου. Στο σχήμα 1, φαίνεται η κατάσταση σε κάποια χρονική στιγμή αφού έχει σταματήσει η επιτάχυνση. Η πρόσθια πλευρά της διαταραχής (η εξωτερική πλευρά της κάμψης) προχωρεί προς τα έξω από τη αρχική θέση του φορτίου και σε χρόνο t φθάνει σε απόσταση ct . Η οπίσθια πλευρά της διαταραχής (εσωτερική πλευρά της κάμψης των γραμμών) προχωρεί προς τα έξω από τη θέση που είχε το φορτίο τη χρονική στιγμή τ και σε ένα μεταγενέστερο χρόνο φθάνει σε απόσταση $c(t-\tau)$. Στο εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας $c(t-\tau)$ το πεδίο είναι το νέο ηλεκτρικό πεδίο με κέντρο τη θέση του ομαλά κινουμένου φορτίου.

Στην περιοχή κάμψης το ηλεκτρικό πεδίο έχει τόσο ακτινική όσο και εφαπτομενική συνιστώσα. Η εγκάρσια συνιστώσα είναι χαρακτηριστική ενός επιταχυνόμενου φορτίου. Για τον υπολογισμό, ας δούμε το σχήμα 2.

Το ορθογώνιο τρίγωνο με υποτεινούσα την κεκκαμένη δυναμική γραμμή E πάνω στο σπάσιμο και κάθετες πλευρές E_k και E_π

δηλαδή κάθετη και παράλληλη συνιστώσα, θα έχουμε ότι είναι όμοιο με το ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές $v_k t$ και $c t$

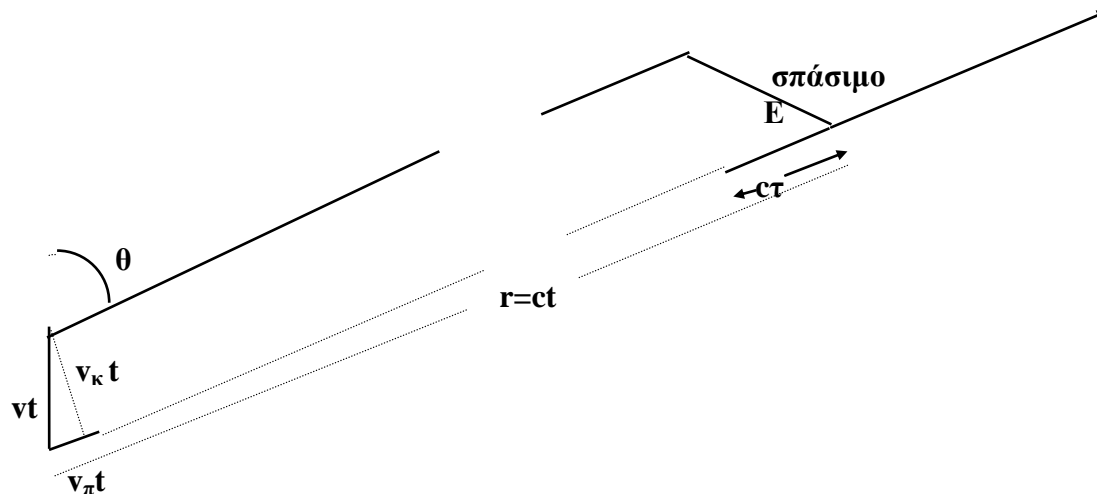
αρα

$$\frac{E_k}{E_\pi} = \frac{v_k t}{c t}$$

και, λαμβάνοντας υπόψη ότι $v_k = a_k \tau$ και $t = r/c$,

Έχοντας όμως υπόψη και την $E_\pi = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, προκύπτει

$$E_k = \frac{q a_k}{4\pi\epsilon_0 r c^2}$$



133

Για τον προσδιορισμό της κατεύθυνσης του εγκάρσιου πεδίου, παρατηρούμε ότι το E_{κ} στο σημείο r είναι αντίθετο στην κατεύθυνση που έχει το διάνυσμα a_{κ} στην προγενέστερη στιγμή t' , όπου $t' = t - r/c$.
 Άρα, για το πεδίο ακτινοβολίας θα έχουμε

$$E_{\text{ακτ}} = -E_{\kappa} = \frac{q a_{\kappa}(t')}{4\pi\epsilon_0 r c^2}$$

$t' = t - r/c.$

Διασπορά στο γυαλί

Ενας άλλος τρόπος μελέτης του θέματος βρίσκεται στον Μπέρκλεν, Παρ. 4.3. Ξεκινάμε από την ταχύτητα φάσης κυμάτων σε γραμμή μεταφοράς

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{(C/q)(L/a)}}$$

Η μαγνητική διαπερατότητα μ για το γυαλί είναι πολύ κοντά στη μονάδα (διαφέρει από αυτήν μόνο στο πέμπτο δεκαδικό ψηφίο). Αρκεί λοιπόν να δούμε πως εξαρτάται από τη συχνότητα το μέγεθος

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = c/n$$

Παράλληλα, γνωρίζουμε στο ηλεκτρισμό, για τα πεδία μέσα στην ύλη ότι

$$E(t) = E_0(t) - \frac{1}{\epsilon_0} P(t)$$

όπου $P(t)$ είναι η επαγόμενη ηλεκτρική διπολική ροπή, $P(t) = N q x(t)$

Αρα,

$$E(t) = E_0(t) - \frac{N q x(t)}{\epsilon_0}$$

Αφού η χωρητικότητα ορίζεται από τη σχέση $C = Q/V$, όπου V η διαφορά δυναμικών μεταξύ των πλακών σε μία γραμμή μεταφοράς, βλέπουμε ότι η εισαγωγή ενός διηλεκτρικού παρατηρείται μία μείωση του ηλεκτρικού πεδίου, λόγω της επαγόμενης ηλεκτρικής διπολικής ροπής. Παράλληλα, παρατηρείται και μία αύξηση της χωρητικότητας C . Ο παράγοντας αύξησης της χωρητικότητας λέγεται σχετική διηλεκτρική σταθερά.

$$\epsilon = \frac{E_0(t)}{E(t)} = 1 + \frac{P(t)}{\epsilon_0 E(t)} = 1 + \frac{N q x(t)}{\epsilon_0 E(t)}$$

134

Παράδειγμα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα στην ιονόσφαιρα και ταχύτητες φασής μεγαλύτερες του

Αποδεικνύεται ότι

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

Απόδειξη

Η εξίσωση κίνησης ενός μεμονωμένου ηλεκτρονίου είναι

$$M \ddot{x} = q E(t)$$

Στην περίπτωση ελευθέρων ταλαντώσεων, το E οφείλεται αποκλειστικά στην πόλωση ανά μονάδα όγκου, οπότε έχουμε

$$E(t) = - \frac{1}{\epsilon_0} P(t) = - \frac{N q x(t)}{\epsilon_0}$$

Αρα,

$$\ddot{x} = - \frac{N q^2}{\epsilon_0 M} x = - \omega_p^2 x$$

Η εξίσωση που περιλαμβάνει και την απορρόφηση και τις ελεύθερες ταλαντώσεις είναι

$$M\ddot{x} = q E(t) - M\omega_0^2 x - \Gamma M \dot{x}$$

Η λύση είναι

$$x(t) = A_{el} \cos \omega t + A_{ab} \sin \omega t$$

Στο Συμπληρωματικό θέμα 9 του Τόμου 3 Μπέρκελεου προκύπτει

$$A_{el} = \frac{qE_0}{M} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

Ο δείκτης διάθλασης δίνεται λοιπόν από τη σχέση

$$\epsilon_\omega = n^2 = E_0/E = 1 + Nq \frac{x(t)}{\epsilon_0 E(t)} = 1 + Nq \frac{A_{el}}{\epsilon_0 E_0}$$

135

Αν όμως $\Gamma=0$ (μακράν συντονισμού),

$$A_{el} = \frac{F_0}{M} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{qE_0}{M} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

και άρα μέσα σε ένα διηλεκτρικό,

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = n^2 = 1 + \frac{Nq^2}{\epsilon_0 M} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Η μελέτη των εγχρώμων φίλτρων, με παρουσία όρου απορρόφησης δεν εξετάζεται επί του παρόντος.

Ταχύτητα ομάδας

Αυτή ορίζεται ως,

$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dk} \quad (1)$$

Αν έχουμε ένα ζεύγος κυμάτων διαφορετικών συχνοτήτων

...

Αποδεικνύεται πως αν το μέσο στο οποίο διαδίδονται τα κύματα δεν παρουσιάζει διασπορά, τότε η ταχύτητα φάσης δια κάθε κυματική συνιστώσα, ισούται με την ταχύτητα της ομάδας. Αλλά σε ένα μέσο που παρουσιάζει διασπορά, η ταχύτητα ενός σήματος είναι η ταχύτητα ομάδας. Μολονότι η σχέση (1) προέκυψε για την περίπτωση δύο μόνο συχνοτήτων, ισχύει ακόμη και για την περίπτωση παλμού που περιέχει συχνότητες στην περιοχή από $\omega - \Delta\omega$ ως $\omega + \Delta\omega$. Πρέπει ωστόσο να αναφέρουμε πως το θέμα τούτο ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος μαθήματος.

Παράδειγμα

Επιφανειακά κύματα στην προσέγγιση μεγάλου μήκους κύματος. Εκεί, η σχέση διασποράς είναι

$$v = (g\lambda / 2\pi)^{1/2} \\ = (g/k)^{1/2}$$

Συνεπώς,

$$dv/dk = -(1/2k) (g/k)^{1/2}$$

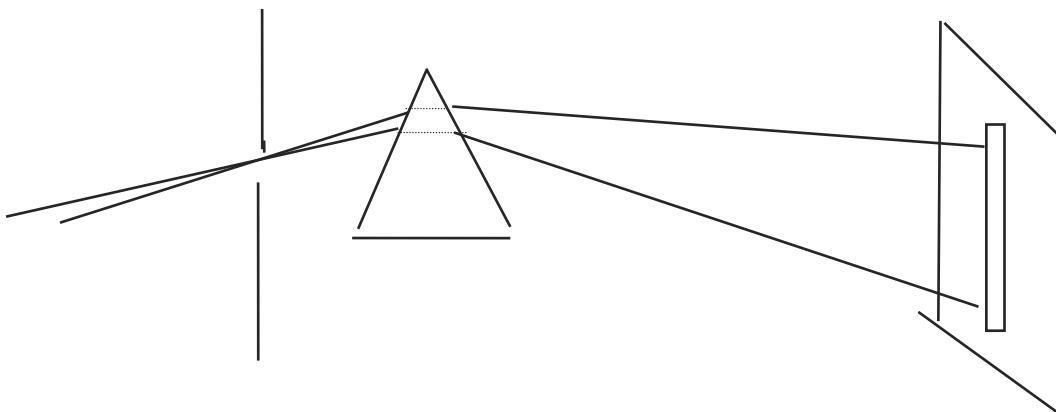
$$= -v/(2k)$$

και η Εξ.(1) δίνει, $v_g = 1/2 v$, δηλαδή η ταχύτητα ομάδας ισούται με το μισό της ταχύτητας φάσης. Τούτο σημαίνει πως αν δημιουργηθεί σε κάποιο σημείο, της λίμνης, ένα επιφανειακό κύμα ορισμένου εύρους συχνοτήτων, λόγω της συγκεκριμένης σχέσης διασποράς οι συνιστώσες μεγάλου μήκους κύματος θα κινούνται (οδεύουν) ταχύτερα από ότι η ταχύτητα της ομάδας που είναι και η ταχύτητα της κορυφής της διαταραχής. Ο δε αρχικός παλμός θα φαίνεται πως απλώνεται όσο απομακρύνεται από το σημείο δημιουργίας του, και θα παραμορφώνεται.

Φαινόμενα Διασποράς

Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό από πολύ παλαιά, Ουράνιο τόξο, διασπορά κυμάτων του ορατού φάσματος όπως την ανακάλυψε ο Νεύτων. Στο Βιβλίο του OPTICKS ,

“ **Theor . II, The Light of the Sun consists of Rays differently Refrangible** ”



Στο σχήμα Η ακτινοβολία του ηλίου εισέρχεται σε ένα σκοτεινό θάλαμο και αναλύεται το “λευκό φως στα συστατικά του”. Πρόκειται για ένα πείραμα πρωτοποριακό για την εποχή εκείνη. Η απήχηση του πειράματος αυτού στις επόμενες γεννεές είναι εξαιρετικά μεγάλη. Τα θέματα της διάθλασης και της διασποράς κυριαρχούν στην τεχνολογία (βλεπε οπτικές ίνες κλπ).

Σήμερα γράφουμε απλά ότι η ταχύτητα του φωτός σε ένα μέσο (γυαλί) ισούται με

$$v = c / n = c / \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

- δείκτης διάθλασης n όμως εν γένει δεν είναι ανεξάρτητος του μήκους κύματος ή του κυματο-διανύσματος k , ή της συχνότητας ω . Συχνά έχουμε την σχέση που προκύπτει από ένα κλασικό μοντέλο της διάδοσης της ακτινοβολίας μέσα από διηλεκτρικά:

137

$$n(\omega) = 1 + \sum_i \frac{A_i}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

Δηλαδή, υπάρχει ένα άθροισμα όρων που μεγαλώνει όταν το ω τείνει να είναι κοντά σε έκαστον από τους πόλους στα κλάσματα του δεξιού σκέλους. Οι παρανομαστές στην πράξη ποτέ δεν μηδενίζονται λόγω του ότι υπάρχει και ένα όρος απορρόφησης στον παρονομαστή.

Υπολογισμός της Ηλεκτρικής Επιδεκτικότητας

Αν \mathbf{p} είναι η ηλεκτρική διπολική ροπή, και \mathbf{E} ή εφαρμοζόμενη ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου, αποδεικνύεται πειραματικά ότι

$\mathbf{p} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}$, όπου α είναι χαρακτηριστική σταθερά κάθε ατόμου και ονομάζεται ατομική πολωσιμότητα. Αν υπάρχουν n άτομα ή μόρια ανά μονάδα όγκου, τότε η πόλωση του μέσου είναι $\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}$, ενώ συγκρίνοντας και με την σχέση που δίνει την ηλεκτρική επιδεκτικότητα του υλικού, παίρνουμε $\chi_e = n \alpha$. Όπως αποδεικνύεται, αν έχουμε μία εξωτερική εξαναγκάζουσα συχνότητα ω , τότε προκύπτει,

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Η εξάρτηση του n από το ω δεν πρέπει να μας εκπλήσσει. Απλά λέει ότι το “μέσο” δεν είναι τελείως “ελαστικό”. Τελείως ελαστικό μέσο θεωρείται το κενό.

Θυμηθείτε ότι στην περίπτωση γραμμικού συστήματος σφαιριδίων και χορδών καταλήξαμε στις σχέσεις.

Αναφορές:

1. Δείτε το applet :

http://galileo.phys.virginia.edu/classes/109N/more_stuff/Applets/sines/GroupVelocity.html

για καλύτερη κατανόηση της διαφοράς v_g και v_{ph}

2. Παράδειγμα MATHEMATICA :

<http://maxwell.ucdavis.edu/~cole/phy9b/movies/dispersion.html>

3. **Measurements of group velocity of light in the lake Baikal water** • ARTICLE
Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, Volume 502, Issue 1, 11 April 2003, Pages 168-171

B. K. Lubsandorzhev, P. G. Pokhil, R. V. Vasiliev and Y. E. Vyatchin

4. **Group velocity matching in type-III phase-matching geometry in BBO** •
Optics Communications, Volume 211, Issues 1-6, 1 October 2002, Pages 319-322
Dong-Qing Pang, Ruo-Bing Zhang, Jing Ma, Wei-Li Zhang and Qing-Yue Wang

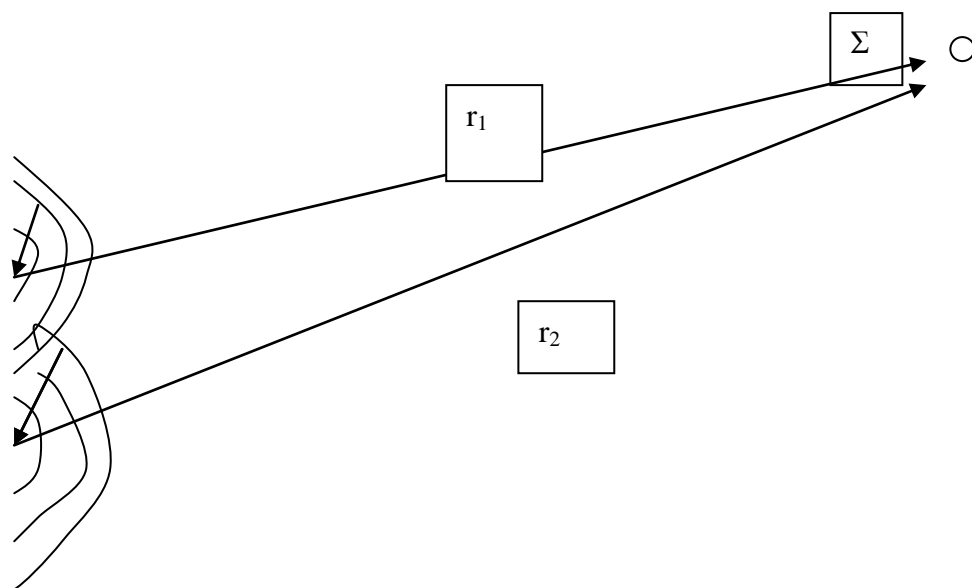
Κεφάλαιο 11

Συμβολή

Συμβολή

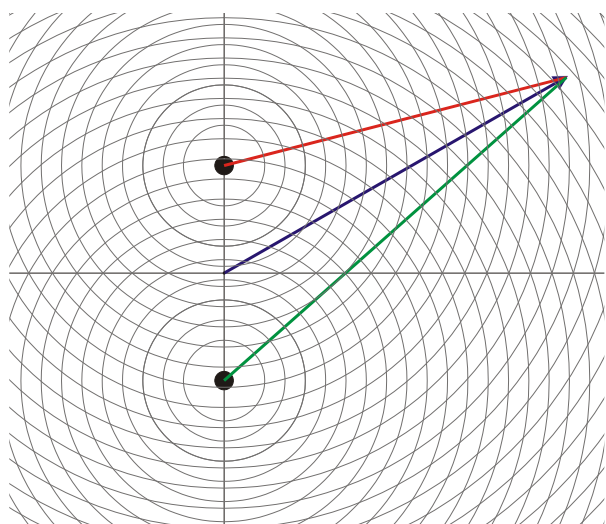
Στο εδάφιο αυτό μελετούμε το φαινόμενο της συμβολής από δύο ή περισσότερες πηγές με την ίδια συχνότητα. Εχουμε ήδη αντιμετωπίσει το θέμα αυτό υποθέτοντας πως οι δύο κυματικές συνιστώσες έχουν την ίδια συχνότητα, χωρίς να εξηγούμε με ποιόν μηχανισμό προκύπτουν οι ίδιες αυτές συχνότητες. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Θεωρούμε ένα ηχείο πάνω από την επιφάνεια μιάς λίμνης, που ταλαντώνομε με συχνότητα ν , ενεργοποιεί δύο ακίδες ίσου ύψους που απέχουν απόσταση d , με αποτέλεσμα να προκύπτει μία επαλληλία οδευόντων κυμάτων που τα αποτελέσματά των μπορούμε να τα παρατηρούμε σε κάποιο σημείο Σ στην επιφάνεια της λίμνης:

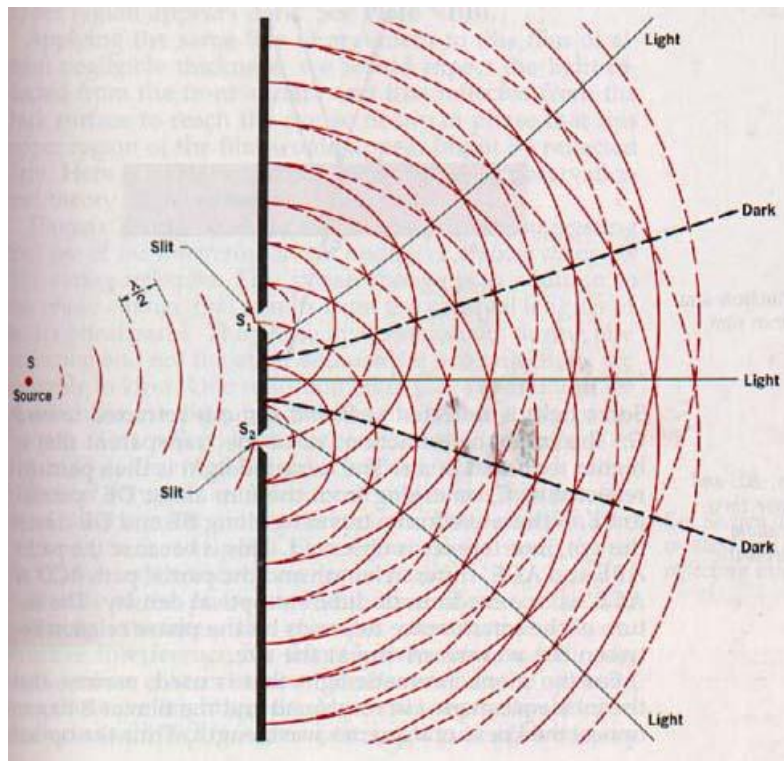


140

Η εικόνα συμβολής φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



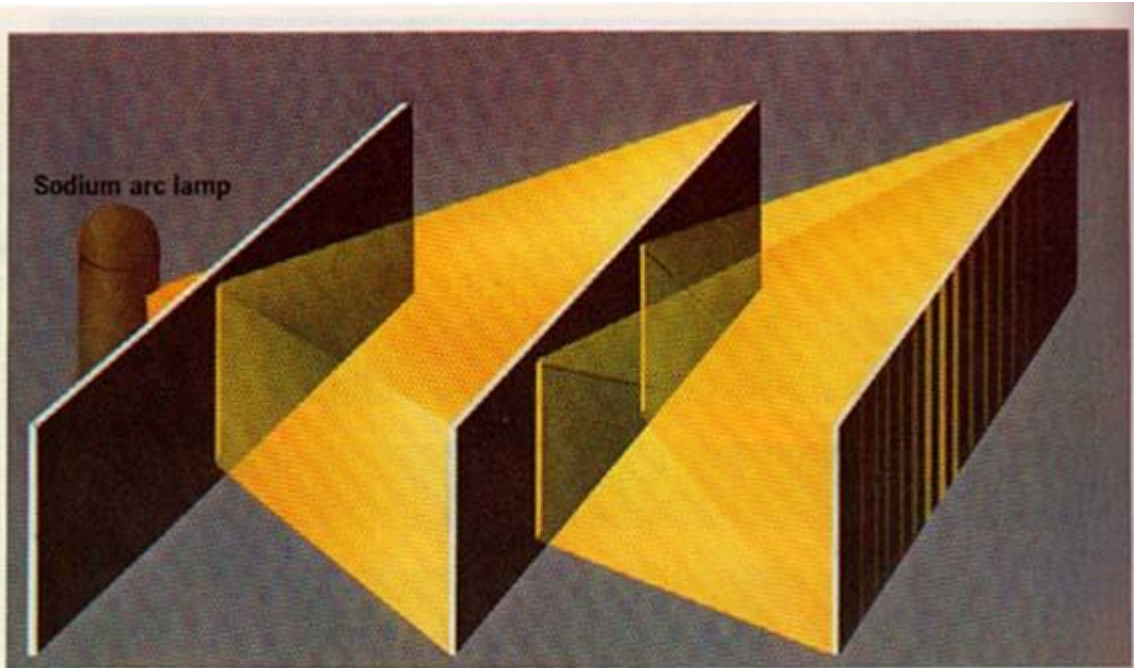
Σχήμα: Στις θέσεις όπου τέμνονται τα μέτωπα κύματος από τις δύο διαφορετικές πηγές, έχουμε ενισχυτική συμβολή



141

Σχήμα... Όπως φαίνεται, όπου συμβάλλουν μέτωπα κύματος με διαφορά φάσης πειυτό πολλαπλάσιο του π (συνεχείς γραμμές με διακεκομένες) έχουμε ενισχυτική συμβολή, ενώ όπου τέμνονται μεταξύ των διακεκομένες γραμμές ή συνεχείς γραμμές έχουμε διαφορά φάσης ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π , άρα ενισχυτική συμβολή.

Για την επίτευξη των στόχων ενός πειράματος του είδους αυτού πρέπει η δέσμη που προσπίπτει στις δύο σχισμές να αποτελείται από παράλληλες ακτίνες και να προσπίπτει κάθετα στην απόσταση των δύο σχισμών όπως δείχνει το σχήμα:



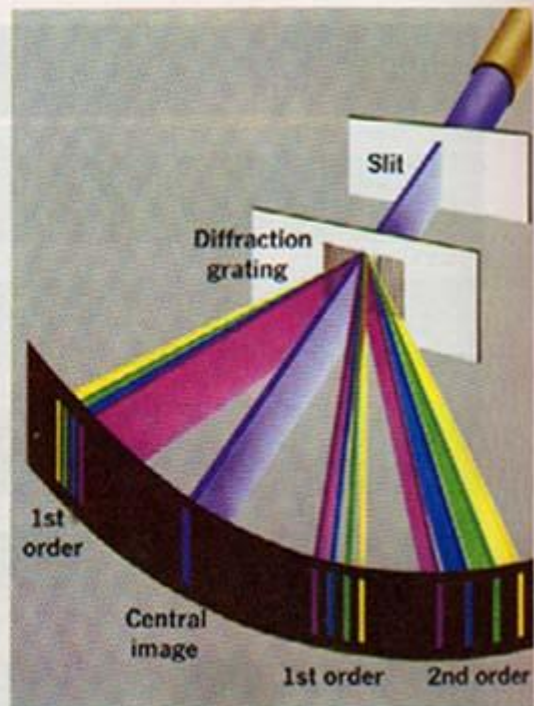
A. Interference pattern produced by light of a single spectral color passing through two narrow slits.



B. Passing white light through a single slit produces this diffraction pattern.

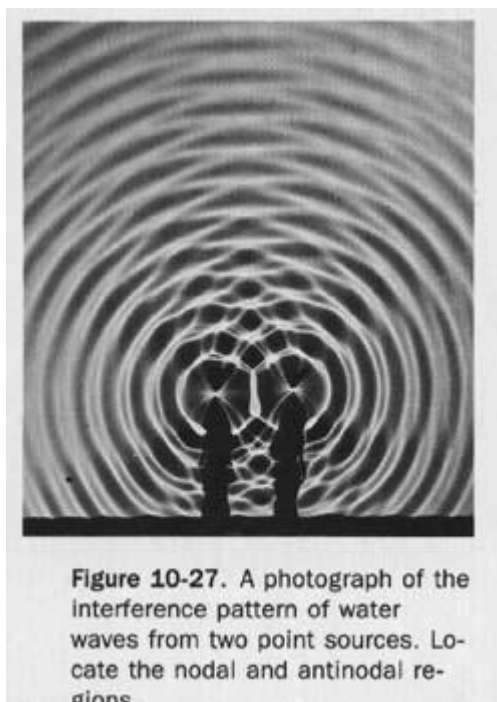


Red light passed through the same slit produces this pattern.



C. Mercury light through a diffraction grating. First and second order spectra appear to the right of the central image.

Μηχανικό παράδειγμα παραγωγής συμφώνων 2 κυμάτων, και εικόνα συμβολής των:



143

Μία δεύτερη περίπτωση με την οποία μπορούμε να δημιουργήσουμε δύο πηγές με την ίδια κυκλική συχνότητα αφορά το διάσημο πείραμα του Young. Σύμφωνα με αυτό, Αν δημιουργήσουμε ένα επίπεδο κύμα που προσπίπτει πάνω σε ένα τοίχωμα με δύο παράλληλες σχισμές που απέχουν μεταξύ τους κατά d , τότε στις σχισμές δημιουργούνται δύο δευτερογενή κύματα (ένα σε κάθε σχισμή) της ίδιας συχνότητας με το προσπίπτον. Αυτά, διαδίδονται τόσο προς τα δεξιά όσο και προς τα αριστερά. Αν εστιάσουμε την προσοχή μας σε εκείνοι που οδεύουν προς τα δεξιά, είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε το ολικό κύμα σε ένα τυχόν σημείο παρατήρησης, Σ , εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας. Το μόνο αβέβαιο στην διαδικασία αυτή είναι η τιμή του πλάτους εκάστου κύματος όπως εξέρχεται από τη σχισμή. Για να είναι τα αποτελέσματα του πειράματος ευκρινή, πρέπει το πάχος εκάστης σχισμής να μην είναι πολύ μεγαλύτερο του μήκους κύματος, ενώ η απόσταση d να μην είναι πολύ μεγαλύτερη του μήκους κύματος.

Ο υπολογισμός της επαλληλίας των κυμάτων είναι αρκετά απλός αν υποθέσουμε πως η απόσταση L ως το σημείο παρατήρησης Σ , είναι πολύ μεγαλύτερη του d και του λ . Σε αυτή την περίπτωση, η διαφορά φάσης των 2 κυμάτων ισούται με

$$k \Delta r = k d \sin\theta = (2\pi/\lambda) d \sin\theta = \delta$$

Ετσι,

$$y_{\text{ολ}} = 2y_0 \cos^2(\delta/2)$$

Αν $\delta = \pi$, $y_{\text{ολ}} = 0$. Αν $\delta = 2\pi$, $y_{\text{ολ}} = 2 y_0$

Πως εκδηλώνεται η συμβολή σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα;

Είναι,

$$E_1(t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q \ddot{y}_1(t_1')}{r_1 c^2}$$

και

$$E_2(t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q \ddot{y}_2(t_2')}{r_2 c^2}$$

Τότε προκύπτει:

$$E(r, \theta, t) = \{2A(r) \cos[\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{1}{2}\Delta\phi]\} \cos(\omega t + \phi_{\text{av}} - k r)$$

$$= A(r, \theta) \cos(\omega t + \phi_{\text{av}} - k r)$$

με

$$A(r, \theta) = 2 A(r) \cos[\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{1}{2}\Delta\phi], \text{ και } \Delta\phi = k(r_2 - r_1) = 2\pi d \sin\theta / \lambda$$

Να βρείτε την έκφραση της ροής φωτονίων στη συμβολή

Η ροή φωτονίων στο σημείο P παρατήρησης δίνεται από το διάνυσμα Poynting,
 $\langle S \rangle = c \epsilon_0 E^2$,

$$\hat{y} \\ \text{με } \mathbf{E} = \hat{y} E(r, \theta, t)$$

Τότε,

$$E^2 = \langle [A(r, \theta) \cos(\omega t + \phi_{\text{av}} - k r)]^2 \rangle = \frac{1}{2} A^2(r, \theta)$$

Με

$$A^2(r, \theta) = \{ 2 A(r) \cos[\frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2} \Delta\varphi] \}^2$$

και

$$I = I_{\mu\epsilon\gamma} \cos^2 [\frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2} \Delta\varphi]$$

Για 2 πηγές που ταλαντώνονται σε φάση,

Δηλαδή, αν η διαφορά φάσης των φ_1 και φ_2 είναι μηδέν, τότε

$$I(\theta) = I_{\mu\epsilon\gamma} \cos^2 [\frac{1}{2} \Delta\varphi] = I_{\mu\epsilon\gamma} \cos^2 (\pi \frac{d \sin\theta}{\lambda})$$

Για 2 πηγές που ταλαντώνονται σε διαφορά φάσης 180°,

Να δείξετε τότε πως

$$I(\theta) = I_{\mu\epsilon\gamma} \sin^2 (\pi \frac{d \sin\theta}{\lambda})$$

Συνθήκη Συμφωνίας (χωρικής)

145

Ένταση του κύματος συμβολής

Η ένταση είναι ανάλογη του $y_{ολ}^2$, και άρα $I \propto 4y_0^2$
 Γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν μηδενική ένταση του κύματος συμβολής:
 Αυτός ικανοποιεί τη σχέση:
 $k \Delta r = \delta = k (r_2 - r_1) = (2\pi/\lambda) (r_2 - r_1) = (2m+1)\pi = \text{σταθερή}$
 Γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν μέγιστη ένταση του κύματος συμβολής:
 $\delta = (2\pi/\lambda) (r_2 - r_1) = 2m\pi = \text{σταθερή}.$

Ετσι, για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις έχουμε μία οικογένεια υπερβολών.

Συμφωνία πηγών

Διακρίνουμε την **χωρική συμφωνία** και την **χρονική συμφωνία**.

Όταν η πηγή που δημιουργεί το επίπεδο κύμα που πηγαίνει στα S_1 και S_2 έχει πεπερασμένο μέγεθος, Τότε, από κάθε σημείο κατά μήκος της γραμμικής διάστασης AB της πηγής παράγεται μία εικόνα συμβολής, και έτσι έχουμε μία εικογένεια καμψύλων έντασης. Το συνολικό αποτέλεσμα προκύπτει από την άθροιση των καμψύλων αυτών των εντάσεων. Συνεπώς, προκύπτει μία ελάττωση της αντίθεσης μεταξύ μεγίστων και ελαχίστων στην εικόνα συμβολής. Η αντίθεση αυτή έχει το όνομα *Ορατότητα ή διακριτότητα των κροσσών*, και ορίζεται ως

$$\text{Διακριτότητα} = \frac{I_{\mu\epsilon\gamma} - I_{\epsilon\lambda\alpha\chi}}{I_{\mu\epsilon\gamma} + I_{\epsilon\lambda\alpha\chi}}$$

Όταν $A'B'$ είναι ίσο με $A'C$, δηλαδή ίσο με την απόσταση δύο διαδοχικών κροσσών μίας σημειακής πηγής (η ένα ακέραιο πολλαπλάσιο αυτής) το πεδίο φωτίζεται ομοιόμορφα, η διακριτότητα των κροσσών είναι μηδέν και οι κροσσοί εξαφανίζονται.

Η διακριτότητα των κροσσών είναι μηδέν όταν

$$AS_2 - BS_1 \approx AB \sin \gamma = \lambda, \text{ όπου } AS_1 = AS_2$$

Εναλλακτικός τρόπος παρουσίασης της Συμφωνίας από δύο πηγές:

ίδτετε αρχείο : AtomicLaserOptics....pdf

Παραγωγή κυμάτων με μεγάλη συμφωνία-Lasers

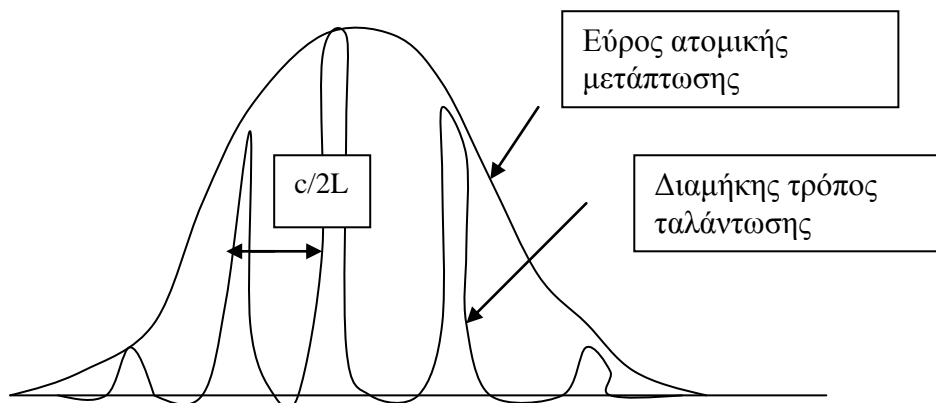
Έχουν αναζητηθεί, και αναζητούνται τρόποι επίτευξης μονοχρωματικών η περίπου μονοχρωματικών δεσμών (κυμάτων) για διάφορες επιστημονικές έρευνες και τεχνολογικές εφαρμογές. Τούτο μπορεί να επιτευχθεί με κοιλότητες laser και κατάλληλη επιλογή ώστε η λειτουργία του να αντιστοιχεί σε λειτουργία μοναδικού τρόπου. Τούτο φαίνεται στο Σχήμα:

146

Σχήμα : Λειτουργία laser σε μοναδικό τρόπο ταλάντωσης. Σελ. 581 Hecht

Από το σύνολο των laser modes που φαίνονται στο σχήμα, και που προφανώς έκαστος είναι στενότερος από της *σχετικώς ευρεία αντίστοιχη ατομική μετάπτωση (λόγω διευρύνσεων Doppler κλπ)*, μπορούμε να επιλέξουμε έναν μόνο με τις λεγόμενες τεχνικές mode locking. Ένας τέτοιος τρόπος είναι να έχουμε την απόσταση των modes να είναι μεγαλύτερη το εύρος ζώνης της μετάπτωσης. Αυτό φαίνεται από τη σχέση:

$$\nu_{m+1} - \nu_m = \Delta\nu = \nu / (2L)$$



Τότε, μόνο ένας τρόπος ταλάντωσης θα ταιριάζει στην περιοχή των διαθέσιμων συχνοτήτων που παρέχονται από την μετάπτωση.

Σε ένα λέιζερ ruby ένα μήκος κοιλότητας μερικών cm εύκολα εξασφαλίζει λειτουργία σε έναν διαμήκη mode.

1. Μέτρηση ύψους βράχου

3. A double-slit experiment has slit spacing 0.12 mm. (a) What should be the slit-to-screen distance L if the bright fringes are to be 5.0 mm apart when the slits are illuminated with 633-nm laser light?
 (b) What will be the fringe spacing with 480-nm light?

Solution (a) The spacing of bright fringes on the screen is $\Delta y = \lambda L/d$; so $L = (0.12 \text{ mm})(5 \text{ mm})/(633 \text{ nm}) = 94.8 \text{ cm}$.

(b) For two different wavelengths, the ratio of the spacings is $\Delta y'/\Delta y = \lambda'/\lambda$. Therefore $\Delta y' = (5 \text{ mm})(480/633) = 3.79 \text{ mm}$.

A 5-slit system with 7.5- μm slit spacing is illuminated with 633-nm light. Find the angular positions of (a) the first two maxima and (b) the third and sixth minima.

Solution

(a) Primary maxima occur at angles $\theta = \sin^{-1}(m/d)$: The first two (after the central peak, $m = 0$) are for $m = 1$ and 2 at $\theta_1 = \sin^{-1}(633 \text{ nm}/7.5 \mu\text{m}) = 4.84^\circ$ and $\theta_2 = \sin^{-1}(2 \times 633 \text{ nm}/7.5 \mu\text{m}) = 9.72^\circ$

(b) Minima occur at angles $\theta' = \sin^{-1}(m'\lambda/Nd)$; where $m' = \pm 1; \pm 2; \dots$; but excluding multiples of $N = 5$; in this case. The third minimum is for $m' = 3$, and the sixth for $m' = 7$ (because $m' = 5$ doesn't count). Then $\theta'_3 = \sin^{-1}(3\lambda/5d) = 2.90^\circ$ and $\theta'_7 = \sin^{-1}(7\lambda/5d) = 6.79^\circ$: (These minima would be difficult to observe because the secondary maxima between them are faint.)

Ακτινοβολία Διπόλου ($f \ll \lambda$)

Αν υποθέσουμε πως τα σήματα φεύγουν από τις δύο πηγές S_1 και S_2 με διαφορά φάσης δ_0 , τότε η διαφορά φάσης σε κάποιο απομακρυσμένο σημείο Σ θα είναι

$$\delta = \delta_0 + k f \sin\theta$$

Τότε, αν π.χ. $\delta_0 = \pi$,

$$I = 4 I_s \sin^2(kf \sin\theta / 2)$$

Δυο πηγές με διαφορά φάσης π αυτού του τύπου, αποτελούν ένα δίπολο, του οποίου η ένταση ακτινοβολίας είναι $I \ll I_s$, όπου I_s είναι η ένταση ακτινοβολίας από μία πηγή μόνο, όταν $kf \ll 1$. Τότε $I \approx I_s (kf \sin\theta)^2$

Η συζήτηση της ακτινοβολίας διπόλου γίνεται περισσότερο κατανοητή αν θεωρήσουμε πως έχουμε μία αρμονική ταλάντωση του φορτίου (αρμονική ταλάντωση και της διπολικής ροπής, $d = q x_0 \sin\omega t$), $x(t') = x_0 \sin\omega t'$, με συνεπαγόμενη επιτάχυνση

$$a(t') = \ddot{x}(t') = -\omega^2 \hat{x}(t')$$

Τελικώς, λόγω του τύπου της ακτινοβολίας επιταχυνόμενο ηλεκτρικού φορτίου, προκύπτει:

$$dP(r) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \omega^2 \langle x^2(t') \rangle \sin^2\theta \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Η ολοκλήρωση δίνει:

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4 \langle x^2(t') \rangle$$

Συμβολή από γραμμική διάταξη N πανομοιότυπων πηγών

Αναφορές

1. <http://physics.med.stu.edu.cn/teaching/7yearmed/chapter4b.ppt> Κίνα
Πολλαπλή συμβολή

Αναφορές:

http://staff.chess.cornell.edu/~shen/workshop2003/presentations/Talk_Paterson.pdf

<http://www.cmpmp.ucl.ac.uk/~ahh/teaching/1B24n/lect21.pdf>

Συμβολόμετρα :

Αναφορές :

<http://www.ruf.rice.edu/~dodds/Files231/expt08.pdf>

Μάθημα 8 – 12- 2005 τέλος

149

Μάθημα 12-12-05 αρχή

Ασκήσεις

Επανάληψη οδοντών κυμάτων:

Ένταση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων- Διάνυσμα Poynting

Είναι γνωστόν ότι η πυκνότητα ενέργειας για στατικό ή μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δίνεται από:

$$\text{Πυκνότη. ενέργειας} = \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0$$

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε μία επιφάνεια εμβαδού A, κάθετη προς τη διάδοση ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, η ενέργεια που θα περιέχεται σε ένα στοιχείο μήκους Δz κατά μήκος της διάδοσης του κύματος θα είναι:

$$w(z,t) = A \Delta z (\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0)$$

Συνεπώς, η ένταση της ακτινοβολίας, οριζόμενη ως $(1/A) \partial w/\partial t$ θα είναι για επίπεδα κύματα οδεύοντα κατά τον άξονα z ,

$$\partial w/\partial t = A \Delta z (\epsilon_0 E_x \partial E_x/\partial t + B_y \partial B_y/\partial t/\mu_0) \quad (1)$$

και κάνοντας χρήση των 2 εξισώσεων του Maxwell για επίπεδα κύματα στο κενό:

$$(1/c^2) \partial E_x/\partial t = - \partial B_y/\partial z \quad \text{και} \quad \partial B_y/\partial t = - \partial E_x/\partial z$$

προκύπτει από την (1)

$$\partial w / \partial t = - A \Delta z (\epsilon_0 E_x \partial B_y / \partial z + (1/\mu_0) B_y \partial E_x / \partial z)$$

=

$$\begin{aligned} & - (A \Delta z / \mu_0) \partial (E_x B_y) / \partial z \\ & = (\text{Αναπτ. Taylor της } \partial (E_x B_y) / \partial z) = \\ & (E_x B_y)_{z+\Delta z} - (E_x B_y)_z \\ & - (A \Delta z / \mu_0) \left[\frac{\quad}{\Delta z} \right] \end{aligned}$$

→

$$(1/A) \partial w / \partial t = S_z(z,t) - S_{z+\Delta z}(z,t),$$

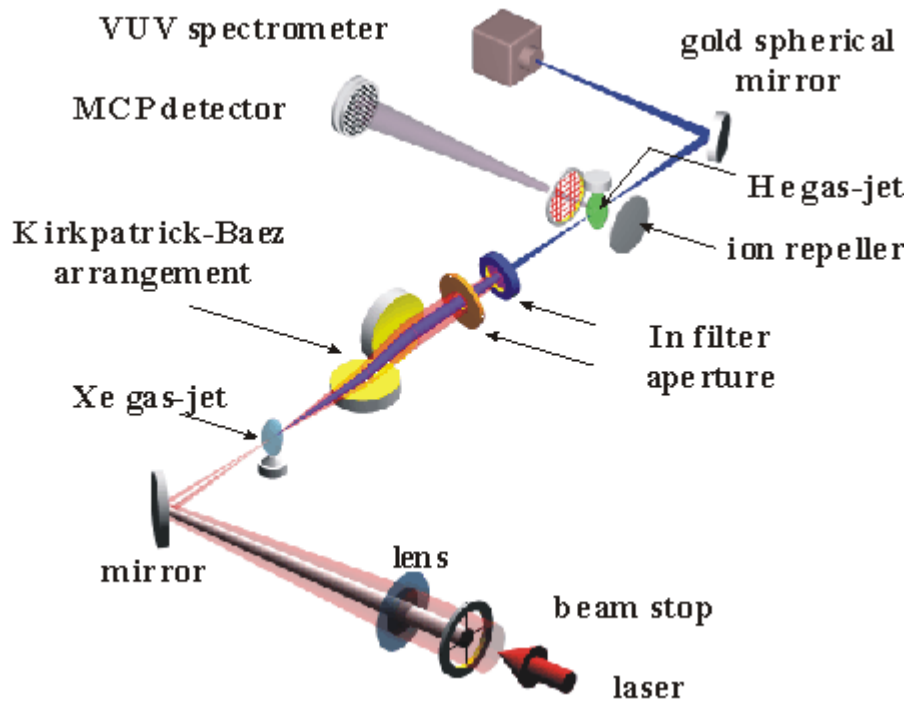
όπου

$$S_z(z,t) = (1/\mu_0) (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_z$$

Με άλλα λόγια, ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας σε ένα στοιχειώδη όγκο $A\Delta z$, ισούται με την διαφορά $S_z(z,t) - S_{z+\Delta z}(z,t)$, δηλαδή τη διαφορά των δύο ροών ενέργειας στο αριστερό και το δεξί μέρος του όγκου (δεδομένου πως δεν έχουμε ροή ενέργειας προς τα πάνω – κάτω). Η ποσότητα $S_z(z,t)$ θα πρέπει να παριστάνει τον στιγμιαίο ρυθμό ροής ενέργειας στην κατεύθυνση $+z$, ανά μονάδα επιφανείας στη θέση z τη χρονική στιγμή t .

Ο ορισμός του διανύσματος S_z δεν περιορίζεται στην κατεύθυνση z . Το διάνυσμα \mathbf{S} είναι γνωστό ως **διάνυσμα Poynting**.

Μας ενδιαφέρει στο σημείο αυτό να δούμε την έννοια της ισχύος ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος από τη σκοπιά της χρονικής διάρκειας ενός παλμού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Εφόσον έχει καταστεί δυνατόν να έχουμε πολύ βραχύβιους παλμούς, της τάξης των femtoseconds (10^{-15} sec) ή των attoseconds (10^{-18} sec), ενώ η ενέργεια του παλμού είναι πεπερασμένη, π.χ. 1 Joule ή 1 mJ, τότε η μέση ισχύς είναι εξαιρετικά μεγάλη, όπως προκύπτει διαιρώντας την ενέργεια διά της χρονικής διάρκειας. Με παλμικά lasers αυτού του είδους είναι δυνατόν να επιτύχουμε εντυπωσιακά αποτελέσματα και εφαρμογές (ίδτετε αρχείο : [Attosecond pulse generation and detection.htm](#) ή E. Goulielmakis et al., [Appl. Phys. B 74, 197\(2002\)](#))

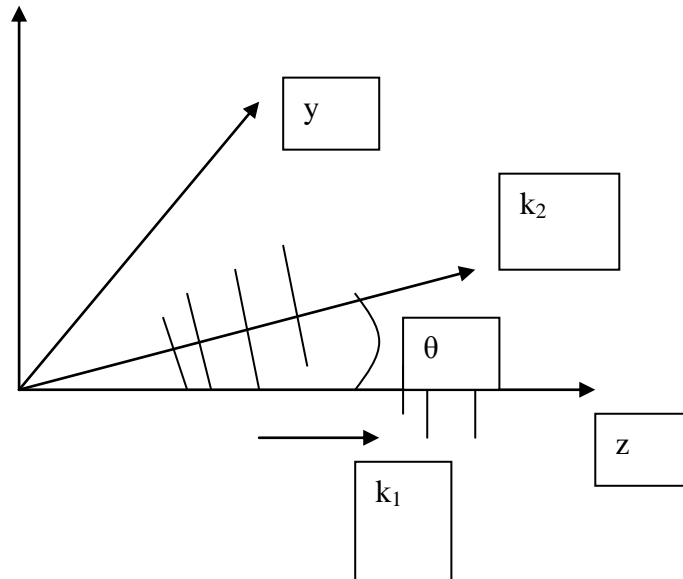


Εκπαίδευση με πειράματα στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με τα οποία μεταδίδονται οι πληροφορίες μέσω κινητών τηλεφώνων: (αναφορά: (Αρχείο : CellularPhoneExperiment13...pdf)

Άσκηση 1 . Στο σχήμα 1 να αποδείξετε πως αν δύο ηλεκτρομαγνητικά επίπεδα κύματα που σχηματίζουν γωνία θ έχουν το ίδιο πλάτος. E_0 , η προκύπτουσα εικόνα συμβολής στο επίπεδο xy αντιστοιχεί σε κατανομή έντασης ανάλογη τετραγώνου συνημιτόνου που δίνεται από:

$$I(y) = 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} y \sin\theta\right)$$

Να εντοπίσετε τις θέσεις μηδενισμού της έντασης. Ποια είναι η τιμή της απόστασης κροσσών. Συγκρίνετε την ανάλυση σας με εκείνη που οδηγεί στην εξίσωση $I = 2I_0 \cos^2\delta/2$.



Λύση:

$$y_1 = E_0 \exp [i(kz - \omega t)] , y_2 = E_0 \exp [i(k_y y + k_z z - \omega t)]$$

$$\rightarrow E_{\text{ολ}} = E_0 \exp (-i\omega t) \exp [i(kz + k_y y + k_z z)]$$

και

$$E_{\text{ολ}}(y, z=0) = E_0 \exp (-i\omega t) \exp [i(kz + k_y y + k_z z)]$$

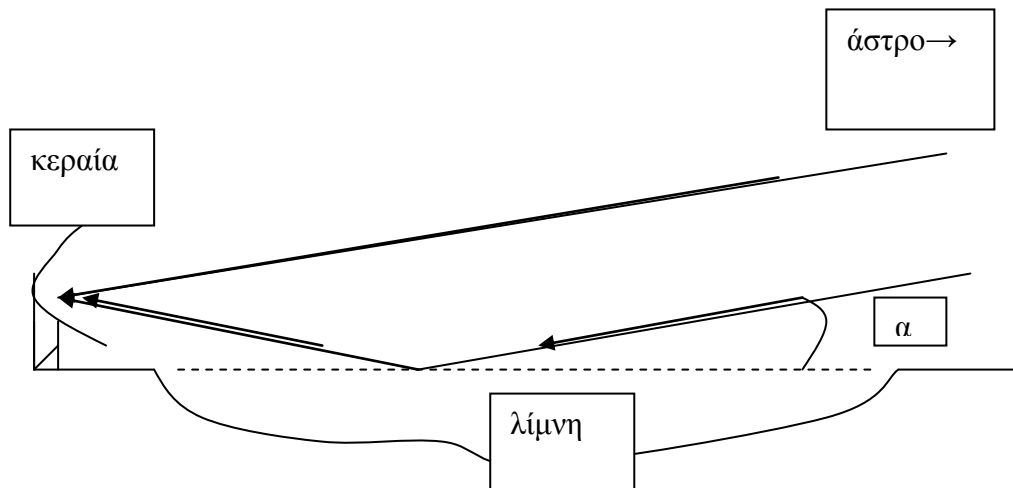
Συνεπώς,

$$I = \text{σταθ.} \times 4E_0^2 \cos^2 (k_0 + k_z \theta + k_y y) = \text{σταθ.} \times 4E_0^2 \cos^2 [(2\pi/\lambda) \sin \theta y]$$

(ερώτηση; Γιατί ο συντελεστής 2;)

Ασκηση 2:

Φαντασθείτε μία κεραία στο άκρο μιάς λίμνης η οποία συλλαμβάνει σήματα από ένα αστέρα εκπέμποντα ραδιοσήματα. Ο αστέρας βρίσκεται ακριβώς άνω του ορίζοντα. Γραψτε τις εκφράσεις για το δ , (διαφορά φάσης) και για τη γωνιακή θέση του άστρου όταν ο ανερχόμενος αστέρας προκαλεί στην κεραία να συλλαμβάνει το πρώτο μέγιστο.

**Λύση:**

Η ραδιοακτινοβολία έχει δύο εναλλακτικούς δρόμους για να φτάσει στην κεραία. Ο ένας κατευθείαν, ενώ ο άλλος μετά ανάκλαση στη επιφάνεια της λίμνης όπως στο σχήμα. Τα 2 κύματα συμβάλουν, και η κεραία μετράει το αποτέλεσμα της συμβολής. Η διαφορά φάσης των δύο ακτίνων είναι το άθροισμα της διαφοράς δρόμου, και της διαφοράς φάσης κατά π που προκύπτει κατά την ανάκλαση στην επιφάνεια της λίμνης. Έτσι είναι:

Αν $a/2$ το ύψος του μέσου της κεραίας, και λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρία (ορθογώνιο τρίγωνο κλπ), έχουμε για τη διαφορά φάσης λόγω διαφοράς δρόμου:

$k (a/2 (\cos 2\alpha / \sin \alpha - 1 / \sin \alpha))$
 Συνεπώς, η συνολική διαφορά φάσης γίνεται:

$$\delta = k (a/2 (\cos 2\alpha / \sin \alpha - 1 / \sin \alpha)) + \pi$$

Μέγιστο έχουμε για

$$\delta = 2\pi = (ka/2) (\cos 2\alpha / \sin \alpha - 1 / \sin \alpha) + \pi \rightarrow \alpha = \sin^{-1}(\lambda/2a)$$

Μαθημα 12 -12-05 τέλος

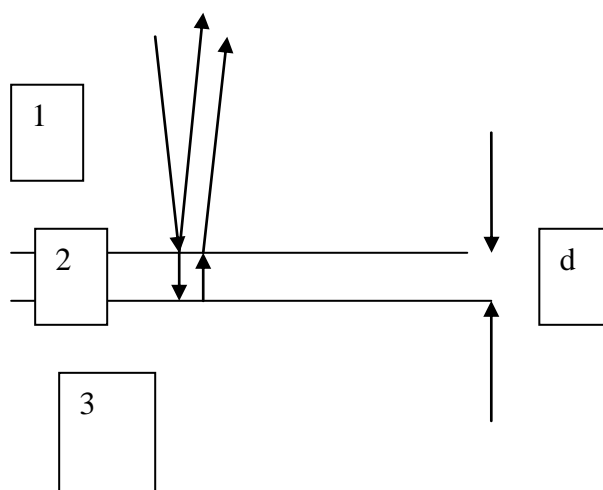
Μάθημα 21^ο :13-12-05 αρχή

Άσκηση 3

Ένα υμένιο από σαπονόφουσκα, που περιβάλλεται από τις 2 πλευρές του με αέρα, έχει δείκτη διάθλασης 1.34 . Αν μία περιχολή του υμενίου εμφανίζεται λαμπερή κόκκινη ($\lambda_0=633 \text{ nm}$) σε κάθετα προσπίπτον φως, ποιο είναι το ελάχιστο δυνατό πάχος του υμενίου;

Λύση:

154



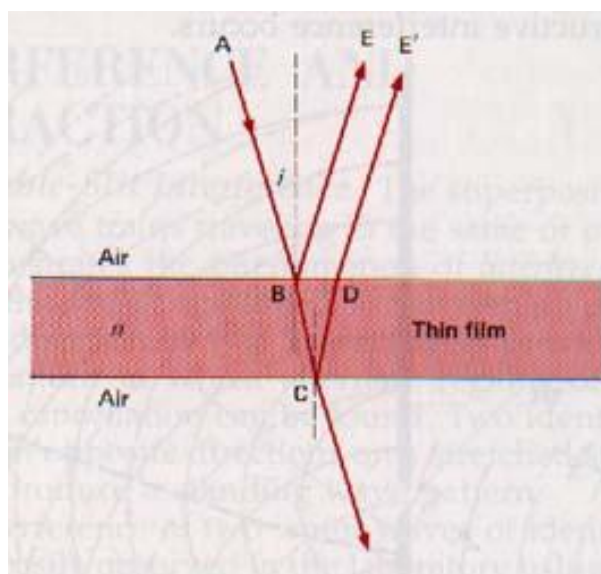
Κατά τη μετάβαση από το μέσο 1 στο μέσο 2 έχουμε μεταβολή φάσης π στο ανακλώμενο κύμα. Κατά την ανάκλαση από το μέσον 2 στο 3 η διαφορά φάσης είναι μηδέν. Άρα, η διαφορά φάσης μεταξύ των 2 ανακλώμενων δεσμών, βλέπε σχήμα, Είναι :

$$\Delta\phi = 2k d + \pi = 2k_0 n d + \pi = 2 \left(\frac{2\pi}{633 \text{ nm}} \right) \times 1.34 \times d + \pi = 2\pi m, m=1,2,\dots$$

Ετσι, είναι

$$d_{ελαχ} = 633\text{nm} / (4 \times 1.34) = 118 \text{ nm}.$$

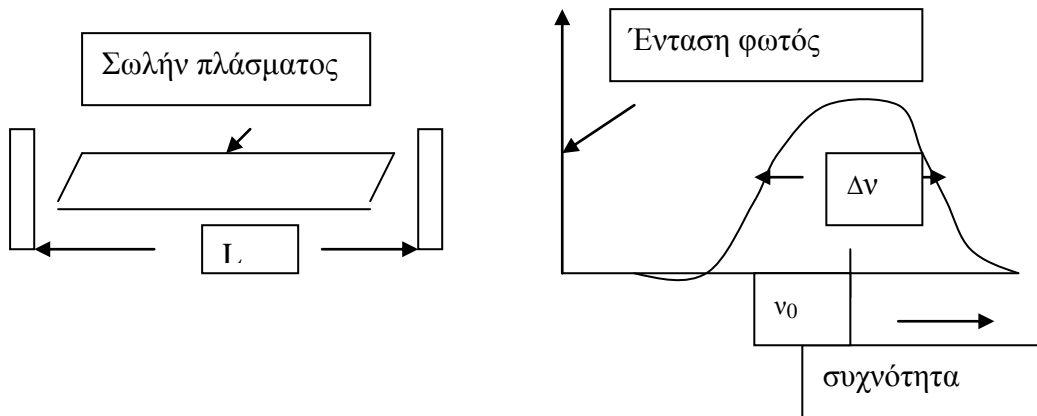
Η εικόνα συμβολής σε ένα λεπτό υμένιο όπου εκατέρωθεν υπάρχει αέρας, φαίνεται στο Σχήμα:



155

Άσκηση 4 Διαμήκεις τρόποι ταλάντωσης στο laser

Ένα laser κατασκευάζεται τοποθετώντας ένα σωλήνα πλάσματος σε μία οπτική κοιλότητα συντονισμού που σχηματίζεται από δύο καθρέπτες υψηλής ανακλαστικής ικανότητας, που δρουν σαν ακλόνητα τοιχώματα (σε ένα αντίστοιχο μηχανικό σύστημα χορδής με ακλόνητα τα δύο άκρα) για τα οπτικά κύματα. Ο σκοπός του σωλήνα πλάσματος είναι να παράγει φως με διέγερση που προκαλεί στους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης της κοιλότητας (το φως π.χ. είναι μία μεγάλη συλλογή από φωτόνια που προκύπτουν μέσω επαγόμενων ατομικών μεταπτώσεων από μία διεγερμένη κατάσταση E_{n+1} σε μία άλλη χαμηλότερης ενέργειας, E_n).



(α) Ποιες είναι οι συχνότητες κανονικών τρόπων της κοιλότητας συντονισμού συναρτήσει του L και c (ταχύτητα φωτός στο κενό);
 (β) Υποθέστε πως ο σωλήνας πλάσματος εκπέμπει φως με επίκεντρο στη συχνότητα $\nu_0 = 5 \times 10^{14}$ Hz με φασματικό εύρος (λόγω κυρίως της διαπλάτυνσης Doppler), όπως φαίνεται στο Σχήμα. Η τιμή του $\Delta\nu$ είναι τέτοια ώστε όλοι οι κανονικοί τρόποι της κοιλότητας των οποίων η συχνότητα κείται σε $\pm 1 \times 10^9$ Hz απόσταση από την ν_0 να διεγείρονται στο σωλήνα πλάσματος.

(1) Πόσοι τρόποι θα διεγείρονται αν $L = 1.5$ m;

(2) Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του L έτσι ώστε μόνο ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης να διεγείρεται (έτσι ώστε το laser να έχει μόνο μία συχνότητα εξόδου.)

Λύση :

(α) Όπως υποδεικνύεται στην εκφώνηση, στα δύο κάτοπτρα, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του στάσιμου ηλεκτρομαγνητικού κύματος μηδενίζεται. Έτσι, για ένα σωλήνα μήκους L (κατ αναλογία με τους τρόπους εγκάρσιων ταλαντώσεων

χορδής με ακλόνητα τα 2 άκρα) : $\lambda_n = 2L/n$, $n=1,2,3,\dots$. Εξάλλου, για τη συχνότητα ν_n έχουμε τη γνωστή σχέση $\nu_n \lambda_n = c$, και άρα

$$\nu_n = \frac{c}{2L} n \quad (2)$$

(β) (1) Από τη σχέση (2) έχουμε με διαφοράριση

$$\Delta \nu_n = \frac{c}{2L} \Delta n \quad (3)$$

Η διαφοράριση έχει την έννοια να παίρνουμε εύρος συνηχοτήτων γύρω από το ν_0 . Και

$$\Delta \nu_+ = \frac{c}{2L} \Delta n_+, \text{ προκύπτει: } \Delta n_+ = (c/2L)^{-1} \Delta \nu_+ = 10$$

Συνεπώς το πλήθος επιτρεπομένων τρόπων ταλάντωσης είναι $\Delta n_{\pm} = 2 \times 10 + 1 = 21$

(2) Από την Εξ. (3), για $\Delta n_+ = 1$, παίρνουμε: $L = 15 \text{ cm}$. Τουτο σημαίνει πως για $L < 15 \text{ cm}$, θα έχουμε 1 μόνο τρόπο, ενώ για L μόλις μεγαλύτερο του 15 cm , θα έχουμε 3 επιτρεπόμενους τρόπους.

Συμβολή με διαίρεση του πλάτους του κύματος

Τα φαινόμενα της συμβολής διαιρούνται σε 2 μεγάλες κατηγορίες:

- A) Εκείνα που βασίζονται στην λεγόμενη διαίρεση του μετώπου κύματος όπως είναι στην περίπτωση του πειράματος του Young που θα μελετήσουμε, και
- B) Σε εκείνα που βασίζονται στη διαίρεση του πλάτους του κύματος. Στη συνέχεια, θα δούμε αρκετά παραδείγματα από κάθε μία από αυτές τις κατηγορίες.

Η συμβολή με τη διαίρεση του πλάτους κύματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου μία ακτίνα μονοχρωματικού φωτός, με μήκος κύματος λ , στον αέρα, προσπίπτει υπό γωνία i σε μία επίπεδη πλάκα υλικού με παράλληλες πλευρές, πάχους t και δείκτη διάθλασης $n > 1$. Το αποτέλεσμα της επαλληλίας των δύο κυμάτων μπορεί να γίνει κατανοητό αν υπολογίσουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ δύο ανακλωμένων από τις δύο επιφάνειες του πλακιδίου ακτίνες. Πρώτα υπολογίζει κανείς την οπτική διαφορά δρόμου:

$$n(AB+BD) - AC = 2nt/\cos\theta - 2t \tan\theta \sin i = 2nt \cos\theta$$

Αυτή η διαφορά δρόμου εισάγει μία διαφορά φάσης

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2nt \cos\theta$$

Αλλά και μία πρόσθετη αλλαγή φάσης κατά π ακτίνια που δημιουργείται κατά την ανάκλαση από τον αέρα στο γυαλί.

Αρα, αν $2nt \cos\theta = m \lambda$ (m ακέραιος), έχουμε καταστρεπτική συμβολή, αφού οι 2 δέσμες έχουν διαφορά φάσης π . Αν $2nt \cos\theta = (m + 1/2) \lambda$, έχουμε ενισχυτική συμβολή, και τα 2 πλάτη αλληλοενισχύονται. Επειδή το t είναι σταθερό, η θέση του

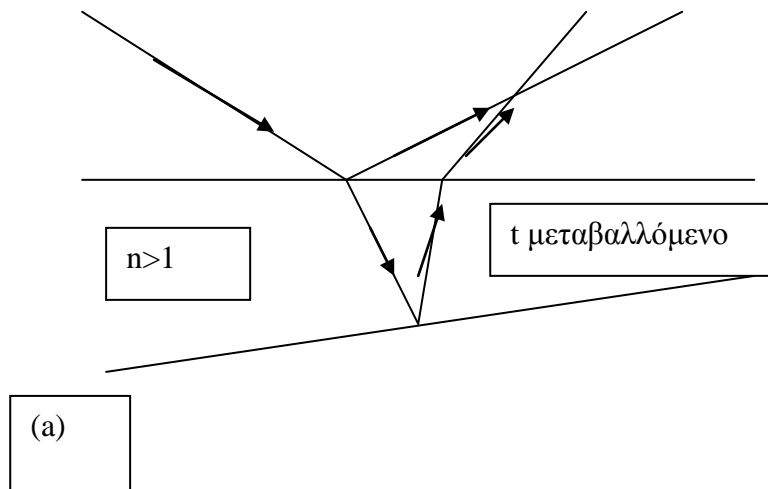
κάθε κροσσού συμβολής καθορίζεται από μία αντίστοιχη τιμή του θ , η οποία εξαρτάται από τη σταθερή γωνία i .

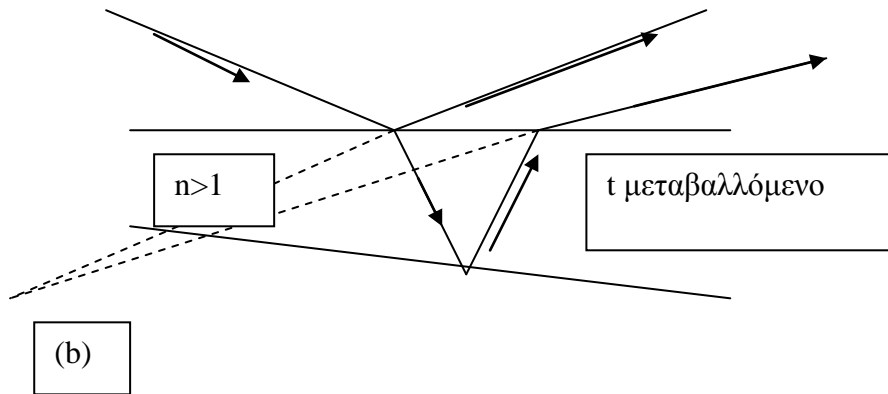
Αυτό δίνει έναν κυκλικό κροσσό με κέντρο το S . Μια εκτεταμένη πηγή δημιουργεί ένα εύρος σταθερών τιμών θ για μια θέση παρατήρησης, έτσι ώστε μία πλήρης εικόνα είναι προφανώς μία ομάδα από ομόκεντρους κυκλικούς κροσσούς με κέντρο το S που σχηματίζονται στο άπειρο.

Όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος της εκτεταμένης πηγής, τόσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των κροσσών που σχηματίζονται. Στην οριακή περίπτωση μίας πηγής με πολύ μικρή διάμετρο, θα έχουμε τον σχηματισμό ενός μόνο κροσσού που θα είναι είτε φωτεινός είτε σκοτεινός ανάλογα με την συνολική διαφορά φάσης λόγω διαφοράς δρόμου και ανάκλασης στην πάνω επιφάνεια του πλακιδίου. Στην περίπτωση των πολλών κροσσών, που είναι οι κροσσοί με ίση κλίση ή κροσσοί *Haidinger* όπως είναι ευρύτερα γνωστοί. Παρατηρούνται σε υψηλές τάξεις συμβολής, δηλαδή σε μεγάλες τιμές του m , έτσι ώστε το t να είναι σχετικά μεγάλο.

Όταν το πάχος t δεν είναι σταθερό και οι πλευρές της πλάκας σχηματίζουν σφήνα, όπως στο Σχήμα,

158





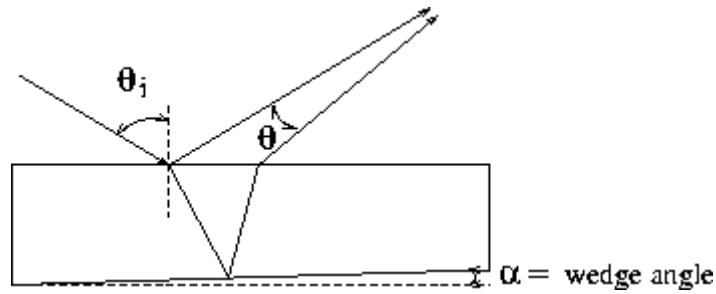
159

Τότε οι ακτίνες που συμβάλλουν δεν είναι παράλληλες και συναντώνται σε σημεία (πραγματικά ή φανταστικά) κοντά στη σφήνα και είναι σχεδόν παράλληλοι με το λεπτό άκρο της σφήνας. Όταν γίνονται παρατηρήσεις σε κάθετη κατεύθυνση, είναι

$2n t \cos\theta \approx 2 n t$. Η συνθήκη για φωτεινούς κροσσούς γίνεται τότε

$2 n t = (m+1/2) \lambda$ και κάθε κροσσός εντοπίζει συγκεκριμένη τιμή πάχους t της σφήνας, καθορίζοντας έτσι την εικόνα *κροσσών ίσου πάχους*.

Αν η φωτεινή πηγή έχει διάφορες φασματικές συνιστώσες το μέγιστο της έντασης κάθε κροσσού για μία λεπτή στρώση λαδιού αντιστοιχεί, για δεδομένο t , σε συγκεκριμένο στρώμα (για σταθερό θ). Αλλαγή του πάχους της στρώσης, με όλες τις άλλες παράμετρος παραμένουσες ίδιες, συνεπάγεται διαφορετικό χρώμα να επικρατεί στην ανάκλαση.



160

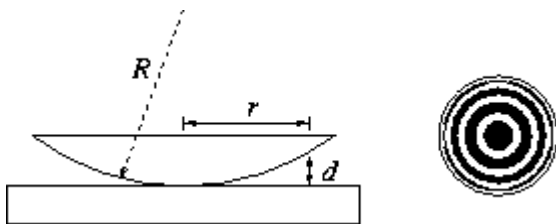
Κροσσοί ίσης κλίσης

Αυτοί φαίνονται παραστατικά στο σχήμα 9.21 του Hecht.

Κροσσοί ίσου πάχους

Μία ολόκληρη κλάση κροσσών συμβολής υπάρχει, για την οποία το οπτικό πάχος $n d$ είναι η κύρια παράμετρος παρά η γωνία θ_i . Αυτού του τύπου συστήματα κροσσών συμβολής επιτρέπουν διάφορες εφαρμογές, όπως επιφανειακά χαρακτηριστικά οπτικών στοιχείων (φακών, πρισμάτων κλπ). Εδώ είναι χρήσιμη και η έννοια του οπτικού επιπέδου. Αυτό αναφέρεται σε μία επιφάνεια που απέχει, κατά μέσον όρον, από ένα ιδανικό επίπεδο λιγότερο από $\lambda/4$. Σήμερα, είναι δυνατόν να κατασκευάζονται οπτικά επίπεδα με απόκλιση μικρότερη του $\lambda/200!$.

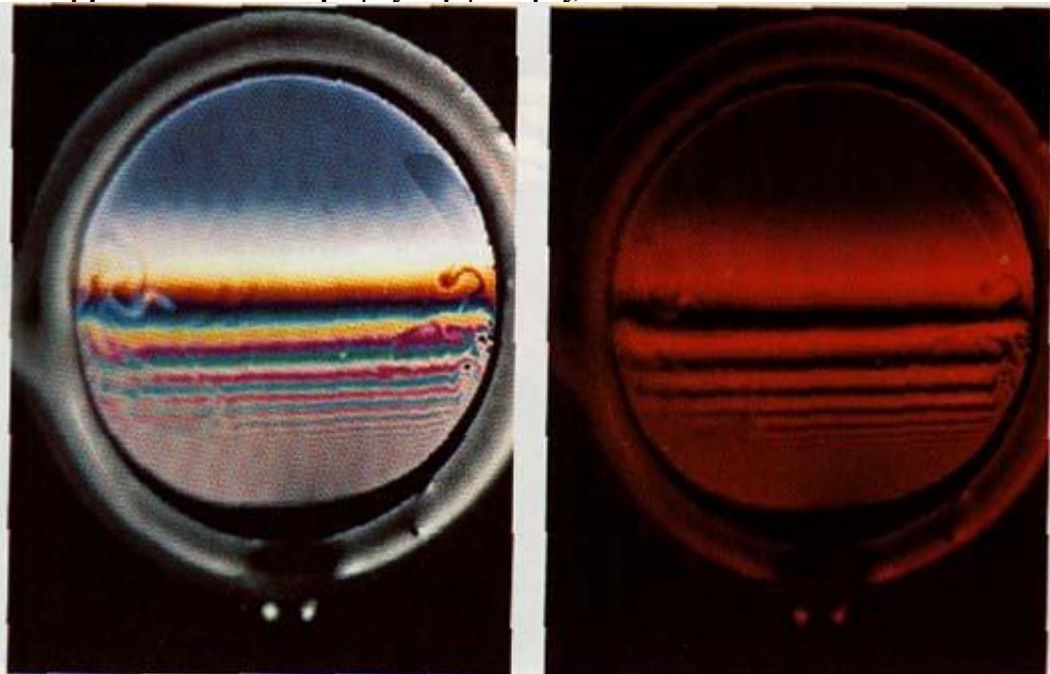
Στην περίπτωση αυτή έχουμε και τους γνωστούς δακτύλιους του Νεύτωνα που συνήθως δημιουργούνται στο εργαστήριο.



Οι φωτεινές δέσμες που συμβάλλουν είναι εκείνες που ανακλώνται από κάθε επιφάνεια του στρώματος αέρα ανάμεσα στην οπτικά επίπεδη επιφάνεια και την

καμπύλη επιφάνεια του φακού. Στη χαμηλότερη επιφάνεια του στρώματος αέρα εισάγεται μία διαφορά φάσης ίση με π και συνεπώς, το κέντρο των κροσσών συμβολής, στο σημείο επαφής, είναι σκοτεινό. Καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο, οι διαδοχικοί κροσσοί είναι εναλλάξ φωτεινοί και σκοτεινοί καθώς αυξάνεται το πάχος του στρώματος αέρα κατά μονάδες $\lambda/2$.

Τι συμβαίνει σε κατακόρυφες πομφόλυγες;



B. Interference produced by reflecting white light from a soap film. The picture on the right shows the fringes produced by red light.

161

Σχήμα : File: ch15Boomer.htm

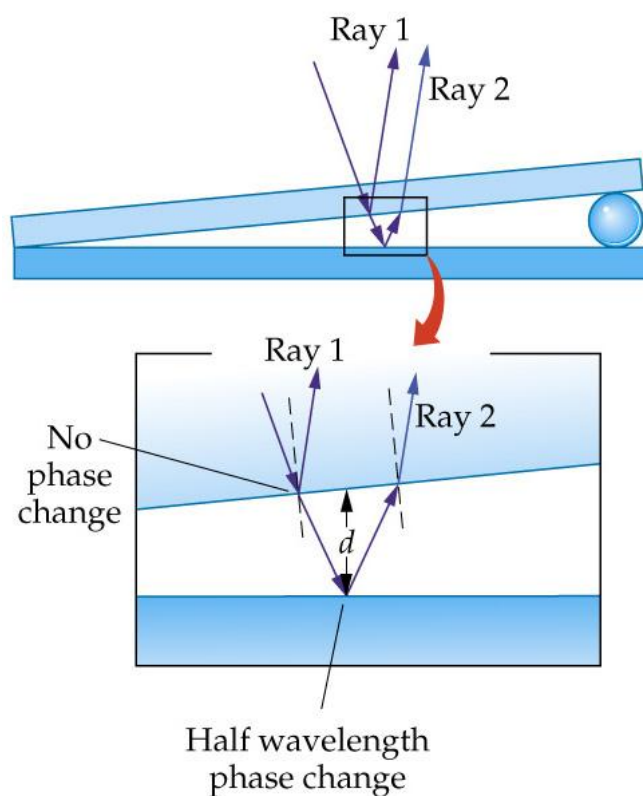
Οι κροσσοί είναι οριζόντιοι διότι το πάχος της πομφόλυγας μεταβάλλεται με το ύψος λόγω βαρύτητας

Εγιναν επίσης τα:

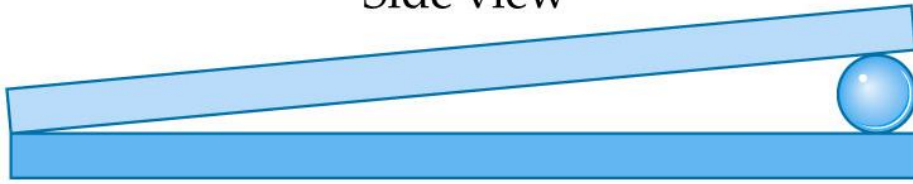
- περί Σύνθετης αντίστασης γραμμής μεταφοράς με απώλειες
- Ποιοτικά , τα περι διάδοσης κύματος σε γραμμή μεταφοράς όταν υπάρχουν απώλειες
- Τερματισμός γραμμής μεταφοράς ώστε να μη έχουμε ανακλάσεις, παρεμβάλλοντας στην εμπέδιση φόρτου αντίσταση εν παραλλήλω
- Εμπεδιση συσκευών τύπου NIM

Συμβολή σε σφήνα αέρα:

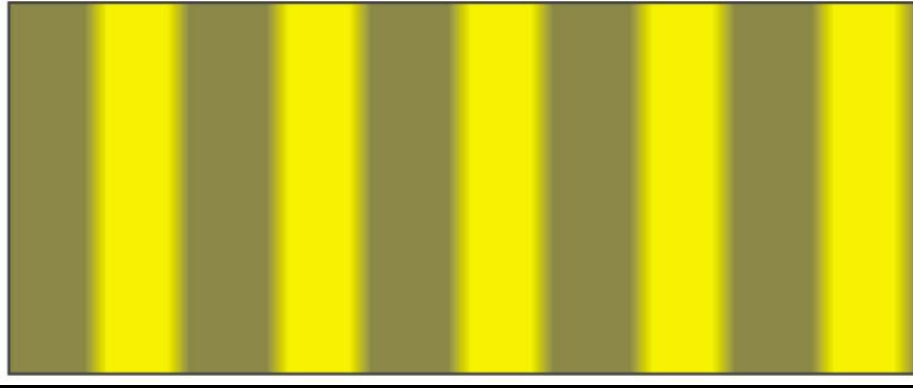
162



Side view



Top view



163

Για ενισχυτική συμβολή έχουμε:

$$\frac{1}{2} + \frac{2d}{\lambda} = m \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

Ενώ για καταστρεπτική συμβολή:

$$\frac{1}{2} + \frac{2d}{\lambda} = m + \frac{1}{2} \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots)$$

Μάθημα 13-12-05 τέλος

Μάθημα 15 -12-05 Χάθηκε

Μάθημα 22^ο :19-12-05 αρχή

Περιεχόμενα

Εγινε:

Αναλυτική περιγραφή πειράματος Young
Συμφωνία στο πείραμα του Young
Πολλαπλή συμβολή Fabry Perot

Πείραμα Michelson Morley

Δόθηκαν σημειώσεις

~~Πολυτροματικές επιστροφές:~~

http://www.nevae.nl/download/neda05_vdkruis.pdf

Ένταση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων- Διάνυσμα Poynting

Είναι γνωστόν ότι η πυκνότητα ενέργειας για στατικό ή μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δίνεται από:

$$\text{Πυκνότη. ενέργειας} = \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0$$

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε μία επιφάνεια εμβαδού A , κάθετη προς τη διάδοση ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, η ενέργεια που θα περιέχεται σε ένα στοιχείο μήκους Δz κατά μήκος της διάδοσης του κύματος θα είναι:

$$w(z,t) = A \Delta z (\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0)$$

Συνεπώς, η ένταση της ακτινοβολίας, οριζόμενη ως $(1/A) \partial w/\partial t$ θα είναι για επίπεδα κύματα οδεύοντα κατά τον άξονα z ,

$$\partial w/\partial t = A \Delta z (\epsilon_0 E_x \partial E_x/\partial t + B_y \partial B_y/\partial t/\mu_0) \quad (1)$$

και κάνοντας χρήση των 2 εξισώσεων του Maxwell για επίπεδα κύματα στο κενό:

$$(1/c^2) \partial E_x/\partial t = - \partial B_y/\partial z \quad \text{και} \quad \partial B_y/\partial t = - \partial E_x/\partial z$$

προκύπτει από την (1)

$$\partial w/\partial t = - A \Delta z (\epsilon_0 E_x \partial B_y/\partial z + (1/\mu_0) B_y \partial E_x/\partial z)$$

=

$$- (A \Delta z/\mu_0) \partial (E_x B_y)/\partial z$$

$$= (\text{Αναπτ. Taylor της } \partial (E_x B_y)/\partial z) =$$

$$- (A \Delta z/\mu_0) \left[\frac{(E_x B_y)_{z+\Delta z} - (E_x B_y)_z}{\Delta z} \right]$$

→

$$(1/A) \partial w/\partial t = S_z(z,t) - S_{z+\Delta z}(z,t),$$

όπου

$$S_z(z,t) = (1/\mu_0) (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_z$$

Με άλλα λόγια, ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας σε ένα στοιχειώδη όγκο $A\Delta z$, ισούται με την διαφορά $S_z(z,t) - S_{z+\Delta z}(z,t)$, δηλαδή τη διαφορά των δύο ροών ενέργειας στο αριστερό και το δεξί μέρος του όγκου (δεδομένου πως δεν έχουμε ροή ενέργειας προς τα πάνω – κάτω). Η ποσότητα $S_z(z,t)$ θα πρέπει να παριστάνει τον

στιγμιαίο ρυθμό ροής ενέργειας στην κατεύθυνση $+z$, ανά μονάδα επιφανείας στη θέση z τη χρονική στιγμή t .

Ο ορισμός του διανύσματος S_z δεν περιορίζεται στην κατεύθυνση z . Το διάνυσμα S είναι γνωστό ως διάνυσμα Poynting.

2 Double slit interference

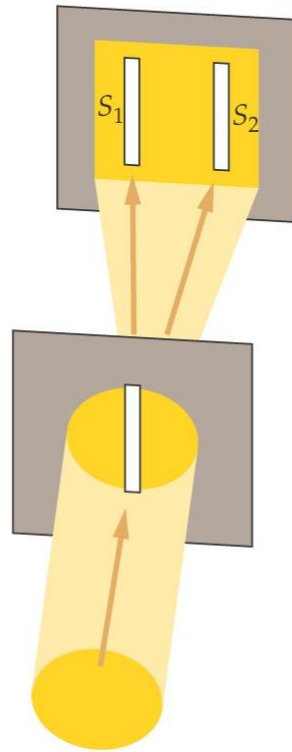
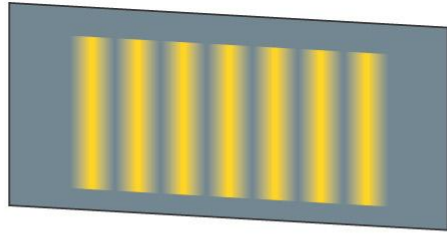
Συμβολή δύο σχισμών :

Το πείραμα διπλών σχισμών του Thomas Young είναι ένα από τα πιο διάσημα πειράματα στην ιστορία της Οπτικής. Τούτο καθιέρωσε χωρίς πλέον αμφισβητήσεις την κυματική φύση του φωτός μέσω της απόδειξης παραγωγής φαινομένων συμβολής μεταξύ δύο φωτεινών κυμάτων.

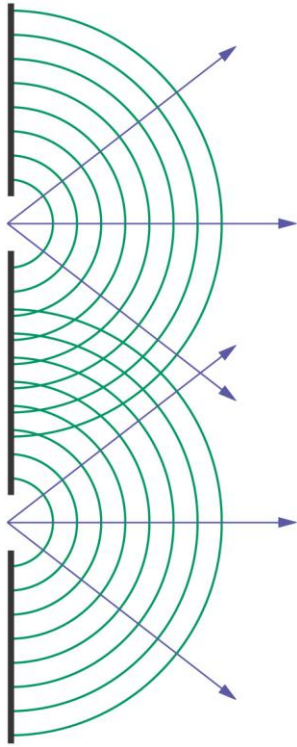
Πρόκειται για ένα παράδειγμα συμβολομέτρου διαίρεσης του μετώπου κύματος. Για το λόγο αυτό, η ορατότητα των κροσσών είναι ένα μέτρο της χωρικής συμφωνίας όπως θα δούμε πιο κάτω.

Διευρύνετε τη δέσμη του λέιζερ με ένα τηλεσκόπιο τύπου Γαλιλαίου, $f_1 = -25$ mm και $f_2 = 200$ mm.

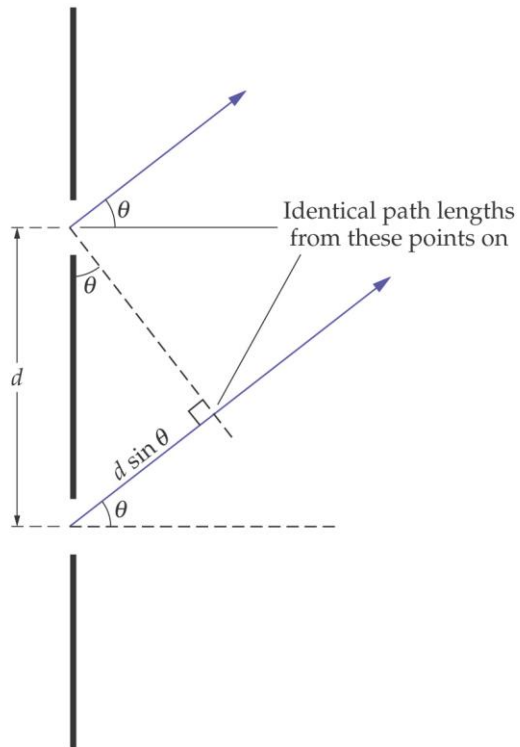
Διαλέξτε σχισμές εύρους 40 μm , και απόσταση μεταξύ των 250 μm . Παρατηρείστε την εικόνα συμβολής πάνω σε ένα φύλλο χαρτιού. Καλύψετε την μία από τις δύο σχισμές με ένα αδιαφανές κάλυμμα και βεβαιωθείτε πως η εικόνα συμβολής εξαφανίζεται ενώ ο φωτισμός της οθόνης λόγω της μίας σχισμής γίνεται ομοιόμορφος.



166



167



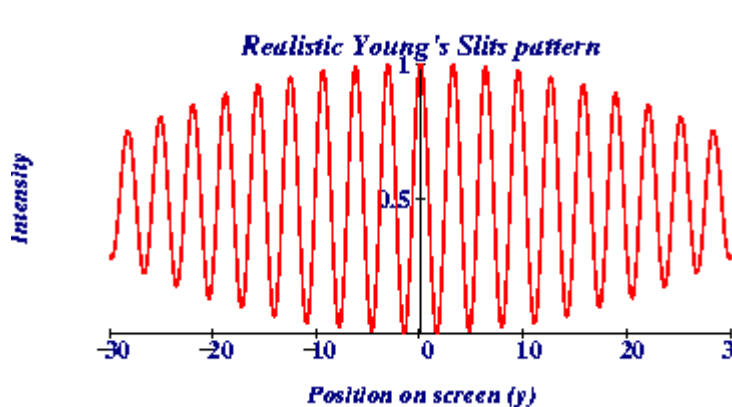
Μία πρώτη παρατήρηση είναι πως το προσπίπτον κύμα στις δύο σχισμές είναι *χωρικά σύμφωνο* αν πριν από το πέτασμα που φέρει τις δύο σχισμές τοποθετηθεί ένα πέτασμα με μία σχισμή έτσι ώστε τα κύματα που προσπίπτουν στις δύο σχισμές να έχουν το ίδιο μήκος δρόμου.

Ελλάτωση της ορατότητας κροσσών λόγω εύρους της φασματικής γραμμής της πηγής.

Αυτό φαίνεται στο παράδειγμα μιάς φασματικής πηγής που περιέχει την κίτρινη γραμμή του Νατρίου, δηλαδή 689.0nm και 589.7 nm. Στην περίπτωση αυτή, τα δύο συστήματα κροσσών συμβολής που αντιστοιχούν στα δύο αυτά μήκη κύματος δεν συμπίπτουν, και μάλιστα, το μέγιστο του ενός πέφτει ακριβώς στην ίδια θέση με το ελάχιστο (ένταση μηδέν) του άλλου στην τάξη κροσσού : $589.35/0.7 = 842$.

Εχοντας υπόψη την παρατήρηση αυτή, μπορούμε πειραματικά να προσδιορίσουμε τη διαφορά μήκους κύματος δύο φασματικών πηγών περίπου ίδιου μήκους κύματος, παρατηρώντας πειραματικά την ελάττωση της ορατότητας των κροσσών. Την διαδικασία αυτή εισήγαγε πρώτος ο Michelson για την με την εξειδικευμένη χρήση του ομόνυμου συμβολομέτρου. Λεπτομέρειες, μπορεί να δει κανείς στο βιβλίο του Optics από τις Εκδοσεις Dover.

168



The fading of the fringe pattern at larger angles in Young's experiment, as a result of the finite coherence length of the light.

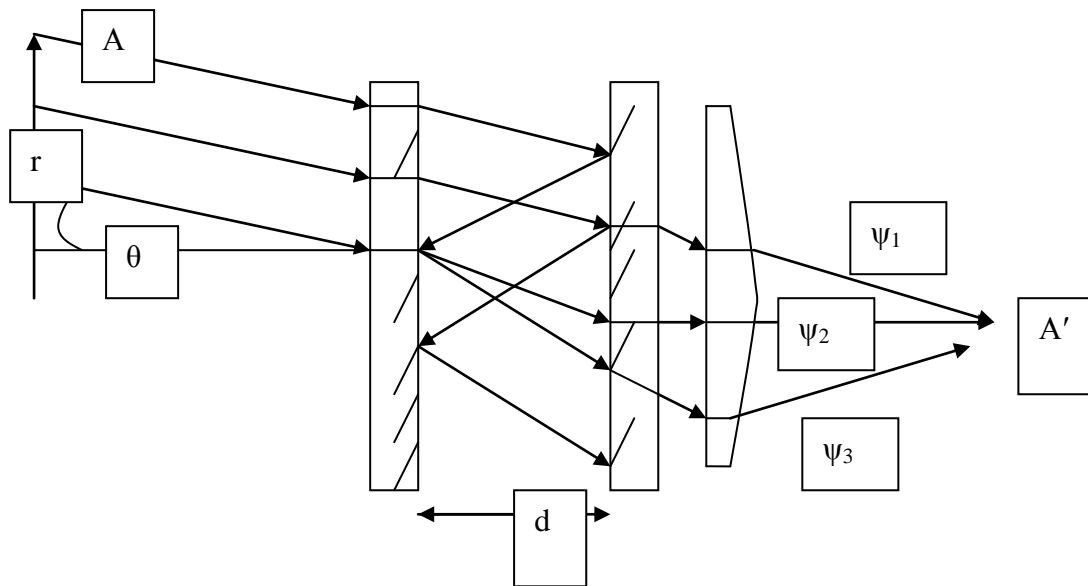
Αναφορές στην ορατότητα κροσσών:

1. <http://www.cmp.ucl.ac.uk/~ahh/teaching/1B24n/lect21/node1.html>
2. Συμβολομετρία (εργαστήριο):
<http://imaging.creol.ucf.edu/OSE5234/Lab9/Lab9%20Description.pdf>

Πολλαπλή συμβολή:

Η συζήτηση της πρόσπτωσης ενός επιπέδου κύματος πάνω σε μία επίπεδη πλάκα διαφανούς διηλεκτρικού, μπορεί να επεκταθεί αν άρουμε την προσέγγιση ότι στο εσωτερικό του διηλεκτρικού η δέσμη του κύματος υφίσταται μόνο μία ανάκλαση ενώ οι επόμενες ανακλάσεις έχουν ανεπαίσθητο αποτέλεσμα. Η άρση αυτής της προσέγγισης σημαίνει ότι στο ενεργειακό ισοζύγιο της κυματικής διάδοσης έχουμε περισσότερες «απώλειες λόγω ανακλάσεων». Τούτο συμβαίνει αν ο συντελεστής ανάκλασης πλάτους έχει τιμή που δεν είναι κοντά στο μηδέν, όπως συμβαίνει σε διαχωριστική επιφάνεια αέρα-γυαλιού, αλλά τυπικά είναι π.χ. κοντά στο 0.9. Σε αυτή την περίπτωση μετά από τις πολλαπλές αυτές ανακλάσεις, έχουμε ένα συνολικό ανακλώμενο κύμα, καθώς και ένα συνολικό διαδιδόμενο κύμα. Το ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι ότι, έκαστο από τα δύο αυτά κύματα, αποτελείται από επαλληλία των επιμέρους κυμάτων ίδιας συχνότητας και κυματικού αριθμού, αλλά αυτά περιέχουν διαφορές φάσης μεταξύ των. Στις περιπτώσεις που θα αντιμετωπίσουμε οι επαλληλίες μπορούν να υπολογισθούν αναλυτικά!

Ειδικότερα, αν θεωρήσουμε τον συντελεστή διάδοσης πλάτους του κύματος, θα έχουμε την εικόνα του επομένου σχήματος:



Στο ως άνω σχήμα, με την παρουσία του συγκεντρωτικού φακού, καταφέρνουμε και εστιάζουμε όλες τις ακτίνες που προέρχονται από ένα συγκεκριμένο φωτεινό σημείο A στο συζηγές σημείο A'. Οι ακτίνες αυτές είναι κατά προσέγγιση παράλληλες, και όλες σχηματίζουν με τον άξονα συμμετρίας του συμβολομέτρου τη γωνία θ . Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο διαδοχικών ακτίνων όταν φθάνουν στο A' είναι $\phi = 2 \pi d \cos \theta$. Τότε, εφόσον το ϕ ισούται με 2π , όλα τα κύματα είναι σε φάση, και σύνεπώς,

170

$$\Psi_{\text{ολ}} = \sum_{i=1}^N \psi_i = N \psi_1$$

$$\text{Η ένταση του κύματος είναι τότε } I \propto \Psi_{\text{ολ}}^2 \propto N^2 \psi_1^2$$

Αν το σημείο A έχει στο είδωλό του μέγιστη ένταση, τότε, λόγω της αξονικής συμμετρίας του συμβολομέτρου, όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω σε ένα δακτύλιο που είναι κάθετα προς τον άξονα συμμετρίας θα έχουν είδωλα μέγιστης έντασης σε συζηγή σημεία των οποίων ο γεωμετρικός τόπος είναι ένας δακτύλιος. Ο δακτύλιος μέγιστης έντασης δεν είναι μοναδικός, αλλά υπάρχει μία οικογένεια δακτυλίων που ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\phi_n = 2 \pi d \cos \theta_n = n 2\pi, \text{ όπου } n=1,2,3,\dots$$

Όσο για τα μαθηματικά,

$$A = T e^{i\omega t} [1 + R e^{-i\delta} + R^2 e^{-2i\delta} + \dots]$$

Η σειρά αυτή των απείρων όρων εύκολα δίνει:

$$A = T e^{i\omega t} / (1 - R e^{-i\delta})$$

Το μιγαδικό συζηγές είναι

$$A^* = T e^{-i\omega t} / (1 - R e^{i\delta})$$

$$I_i/I_0 = AA^*/I_0 = T^2 / [(1 - R e^{-i\delta})(1 - R e^{i\delta})] =$$

$$T^2 / (1 - R^2 - 2R \cos\delta)$$

$$(1-R)^2 (1 + R^2 - 2R \cos\delta)$$

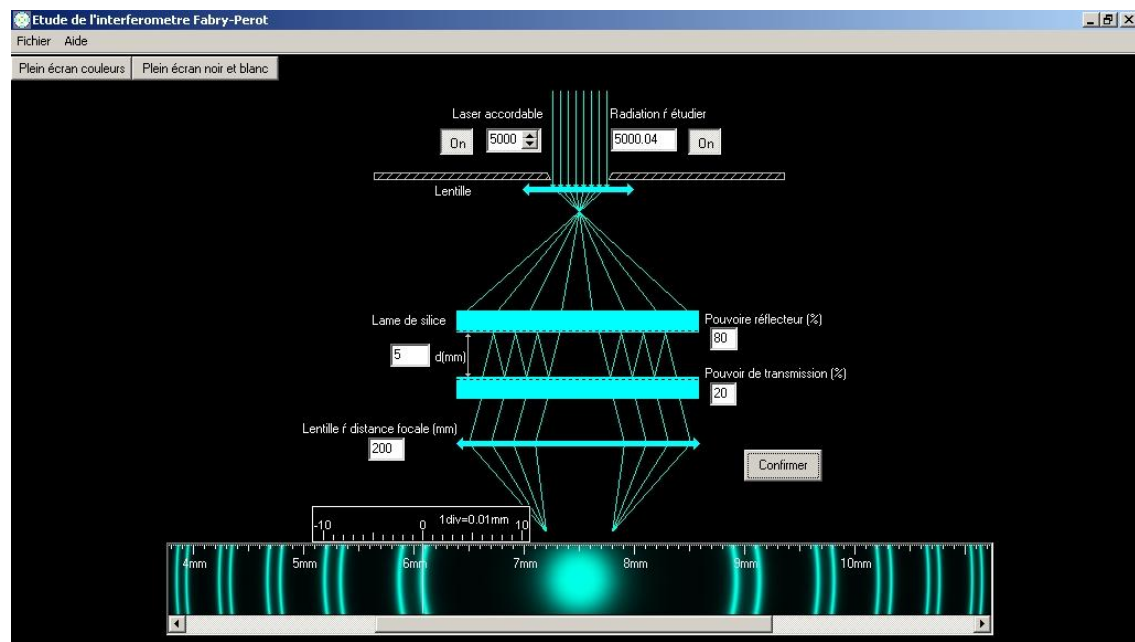
Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως συνάρτηση Airy

Εναλλακτικός τρόπος παρουσίασης:

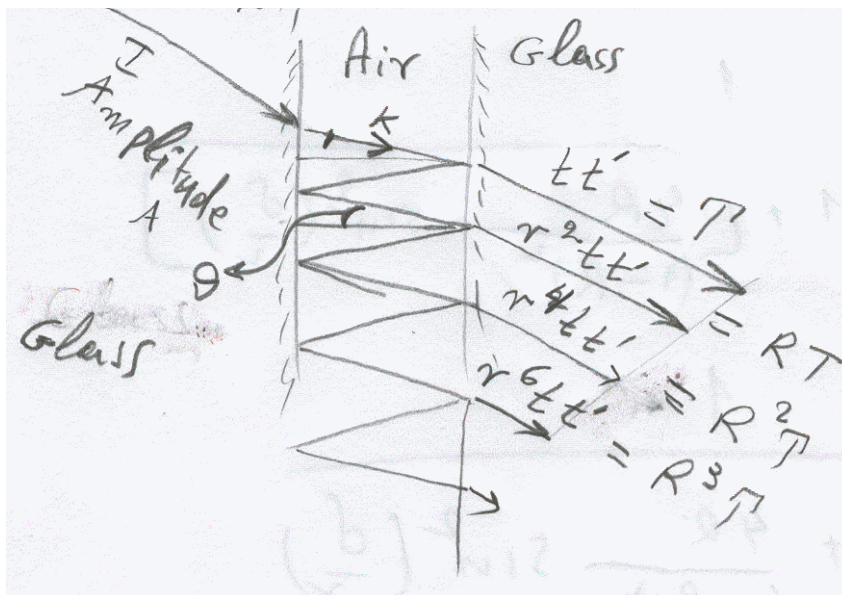
Συμβολόμετρο Φάμπρυ-Περό

Αν μονοχρωματική δέσμη φωτός προσπίπτει υπό γωνία α σε διηλεκτρική πλάκα με παράλληλες επιφάνειες Κ και Λ που έχει πάχος d και δείκτη διάθλασης n. Οι επιφάνειες επιστρώνονται με κατάλληλη σειρά διηλεκτρικών ώστε να υπάρχει συντελεστής ανάκλασης R. Να υπολογισθεί η ένταση της ακτινοβολίας που προκύπτει από την συμβολή των ακτίνων 1,2,3,... συναρτήσει του συντελεστή ανάκλασης R.

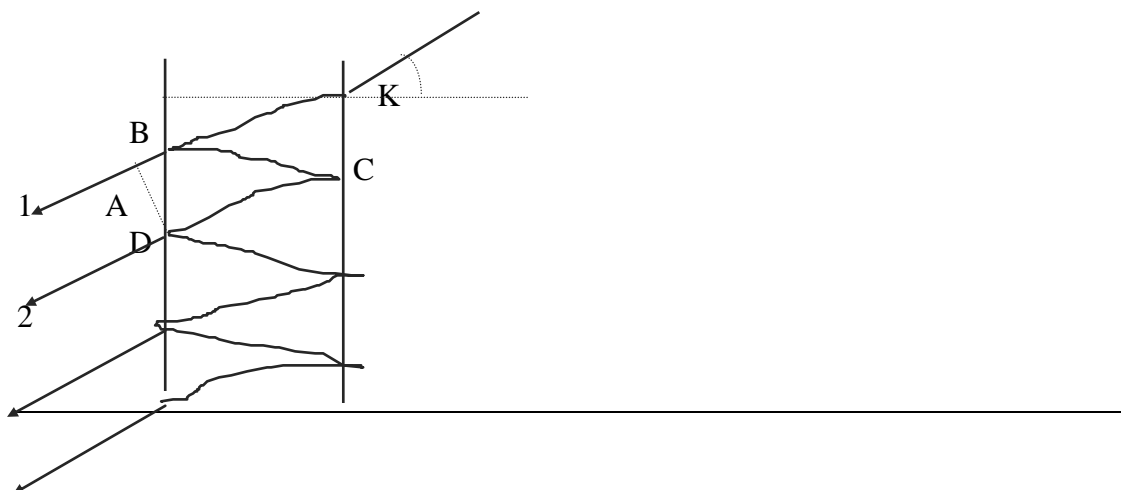
171

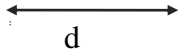


172



Για τους ακριβείς υπολογισμούς, ας δούμε το παρακάτω σχήμα





Λυση

Η διαφορά φάσης μεταξύ των ακτίνων 1 και 2 είναι

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} [n(BC+CD)-(AB)]$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} [2n(BC)-(AB)]$$

Απο το νόμο το Σνελ έχουμε , $\sin \alpha = n \sin \beta$. Επίσης είναι, $d=(BC) \cos \beta$, και $(BD)=2(BC)\sin \beta$

Αρα, $(AB)=(BD) \sin \alpha = n (BD) \sin \beta$

$$= 2n (BC) \sin^2 \beta$$

Αρα,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} [2n(BC)-2n(BC) \sin^2 \beta]$$

$$= \frac{4\pi nd}{\lambda \cos \beta} [1- \sin^2 \beta] = \frac{4\pi nd \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\lambda}$$

173

Ο λόγος των πλατών δυο διαδοχικών εξερχομένων ακτίνων είναι

$$= R^r \frac{\cos r\delta}{\cos (r-1)\delta}$$

$r=1,2,3,\dots$

Το πλάτος δε των διαδοχικών ακτίνων θα είναι,

$$AT, A TR \cos \delta, A TR^2 \cos 2\delta, A TR^3 \cos 3\delta, \dots$$

Το άθροισμα θα είναι

$$\Sigma = AT \sum_{r=0}^{\infty} R^r \cos(r\delta)$$

$$\Sigma = \text{Re } S, \text{ όπου } S = AT [\sum_{r=0}^{\infty} R^r \exp(ir\delta)]$$

Η γεωμετρική σειρά που προκύπτει είναι

$$S = AT \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1 - R^{r+1} e^{I(r+1)\delta}}{1 - R e^{i\delta}}$$

$$= A \frac{T}{1 - R e^{i\delta}}$$

Η πυκνότητα της ακτινοβολίας είναι $\Pi = S S^*$

$$\Pi = \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R^2 \sin^2(\delta/2)}$$

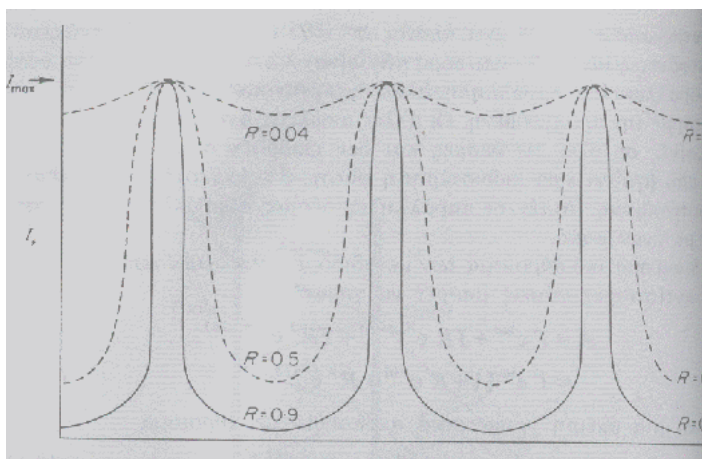
ή επειδή $T=1-R$

$$\Pi = \frac{1}{1 + \frac{4R^2 \sin^2(\delta/2)}{(1-R)^2}}$$

174

Τα μέγιστα συμβαίνουν για $\delta/2 = m\pi$

Η γραφική παράσταση της έντασης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα Fig_Fabry2

http://www.anu.edu.au/Physics/ACIGA/DEM/B17_Set7_02.pdf

175

Ιδετε tutorial: <http://www.colorado.edu/physics/2000/applets/twoslitsa.html>

Αναφορά Lectures του Thomas Young:
http://www.thoemmes.com/science/young_review.htm

Θεωρία συμφωνίας – Ορατότητα Κροσσών:

<http://galileo.phys.virginia.edu/classes/531.cas8m.fall05/l22.pdf>

Optical Coherence Theory:

<http://www.physics.uncc.edu/physstaff/gjgbur/coursepages/6271assets/lecture21-coherence.pdf>

Τεχνολογικές Εφαρμογές:

http://ltdl.iams.sinica.edu.tw/support/OpticsGuide/chap11_BeamSplitters.Windows.Optical_Flat_s.pdf

Συμφωνία:

<http://www.optics.arizona.edu/milster/505%20Lecture/Lecture%20Notes%20and%20Slides/Chapter%205%20-%20Coherence/OLD%20NOTES/Coherence%20-%20Part%20A.pdf>

Σχηματισμός Εικόνας

http://homepage.psy.utexas.edu/HomePage/Class/Psy380E/Vision_Notes_5.pdf

Συμφωνία και εντοπισμός κροσσών:

http://www.opt-sci.arizona.edu/milster/505%20Lecture/Lecture%20Notes%20and%20Slides/Chapter%205%20-%20Coherence/ch5_sep04.pdf

Διατριβή (μέτρηση μήκους):

<http://www.jartweb.f2o.org/thesis/Chapter4.pdf>

Problem set Michelson Morley:

<http://web.mit.edu/8.033/Homeworks/ps2.pdf>

<http://web.mit.edu/8.033/Homeworks/ps2s.pdf>

Προσθετες αναφορες για Michelson Interferometer

<http://clifton.mech.northwestern.edu/~espinosa/Papers/mde-1.pdf>

Interference Microscopy : Mikura (1953!)

MI application in accelerator diagnostics:

<http://cas.web.cern.ch/CAS/Baden/PDF/Minty-3.pdf> Φυσική επιταχυντικών διατάξεων

PHYWE Advanced optics:

<http://www.science.com.tw/etc/phywe/phywepdf/LaserOptics2003.pdf>

Maximum precision Laser dilatometer:

<http://www.metsystem.hu/EGYEBEK/DILATO/L75/L75.htm>

Another dilatometer:

http://www.linseis.net/html_en/thermal/dilatometer/pdf/LASER_DIL_ENG_NET.pdf

Suggested PHYWE experiments:

<http://www.sea.co.th/laboratory%20experiments%20physics.htm>

Study of coherence of light sources in a student lab experiment:

<http://www.sea.co.th/laboratory%20experiments%20physics%202206.htm>

Πολυστρωματικές Επιστρώσεις:

http://www.nevac.nl/download/neda05_vdkruijs.pdf

<http://www.spie.org/web/abstracts/pdfs/PM137.pdf>

Fabry-Perot Interferometer (.ppt)

1. <http://fizz.phys.dal.ca/~hewitt/Web/PHYC3540/Lecture27.ppt>

2. <http://fizz.phys.dal.ca/~hewitt/Web/PHYC3540/Lecture28.ppt>

3. <http://fizz.phys.dal.ca/~hewitt/Web/PHYC3540/Lecture26.ppt>

(antireflection coatings, multiple beam interference)

4. Modern Optics Northeastern University:

www.ece.neu.edu/faculty/dimarzio/ece1466/10100-5.ppt Prof. Dimarzio

5. Vacuum Laser accelerator:

www-conf.slac.stanford.edu/orion/PAPERS/A06.PPT

6. Accelerometer based on FP interferometer

7. Polarization:

tools.ecn.purdue.edu/~me587/ME587JonesVectors&MatricesLect19.ppt

8. Modulated optical pumping:

darkwing.uoregon.edu/~wji/my%20research/Pump%20and%20Probe%20Rb87.ppt

9. Frequency scanned interferometer (RASNIK...)

gallatin.physics.lsa.umich.edu/~hyang/talks/fsi-slac-lcd-feb17-2005.ppt

10. [Measurements of Winds and Temperatures in the Upper Atmosphere](#)

www.tiimes.ucar.edu/meetings/presentation/

gravity_waves/qwu/neutral%20wind%20gw%20observations.ppt (ενδιαφέρον)

11. Φαμπρυ Περό Resonators:

www.ph.surrey.ac.uk/~phs3ja/3mol/lecture16.ppt

Μάθημα 19-12-05 Τέλος

Μάθημα 23° : 20-12-05 αρχή

Περιλαμβάνει

3. Συμβολόμετρο του Michelson

4. Άσκηση πάνω στο αστρικό συμβολόμετρο Michelson

Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα κυματοδηγό σε δύο διαστάσεις, οπότε το κύμα ικανοποιεί την εξίσωση:

177

$$\left(\nabla_t^2 + \mu\epsilon - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \begin{Bmatrix} E \\ B \end{Bmatrix} = 0$$

όπου V_t ο τελεστής του εγκάρσιου μέρους του Ανάδελτα.

Για τη συνέχεια, δείτε την ανάλυση στο Βιβλίο του J.D.Jackson, Classical Electrodynamics, §8.3 και 8.4. Επίσης, στο αρχείο:Lecture7Microwave....pdf .

Προκύπτει:

$$\omega_{mn} = c \sqrt{\mu\epsilon} \left(\frac{\pi m^2}{a^2} + \frac{\pi n^2}{b^2} \right)$$

Αν $a > b$, η χαμηλότερη συχνότητα αποκοπής, δηλαδή εκείνη όπου κυριαρχεί ο τρόπος TE, συμβαίνει για $m=1, n=0$:

$$\omega_{10} = \pi c / \left(\mu\epsilon \right)^{1/2} a$$

Οι εκφράσεις των πεδίων είναι τότε:

$$B_z = B_0 \cos(\pi x/a) e^{ikz-i\omega t}$$

$$B_x = -\frac{ika}{\pi c} B_0 \sin(\pi x/a) e^{ikz-i\omega t}$$

και

$$E_y = i \frac{\omega a}{\pi c} B_0 \sin(\pi x/a) e^{ikz-i\omega t}$$

Ασκηση 5 Το αστρικό συμβολόμετρο του Michelson

Two wave interference

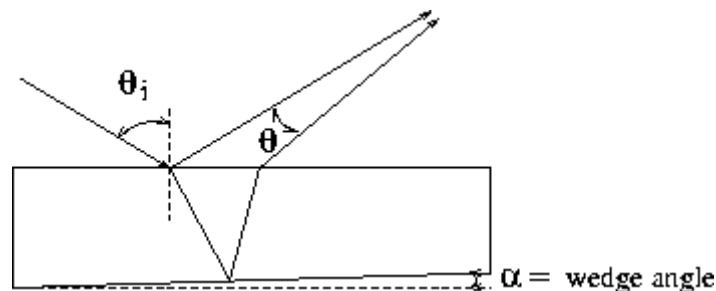
The interference of two monochromatic plane waves propagating at an angle to each other results in a periodic modulation of intensity in space. This modulation can be observed as interference fringes on a screen. If the screen is placed perpendicular to the propagation direction of one of the beams, the fringe separation (modulation

$$\Delta x = \lambda_0 / \sin \theta$$

period) is given by where θ is the angle between the two plane waves (See Equation (2.5-7)).

178

Reflections from the front and back surfaces of a glass plate with a small wedge angle propagate in slightly different directions as shown in the figure. A screen placed on the beam path shows interference fringes. (For small angles of incidence, the intensity of the two beams are approximately equal; therefore, the fringe visibility is high.) This configuration is an example of an amplitude-splitting interferometer.



Derive an expression that relates the resulting fringe separation Δx to the wedge angle of the glass plate α . (It is safe to assume that α is very small.) Find the wedge angle of the glass plate from a measurement of the fringe separation. To do this, expand the laser beam

$$f = -25 \quad f = 400$$

with a Galilean telescope (mm and mm). Position the glass plate on the angle measurement rotation base, as far from the laser as possible. Adjust the angle of incidence so that a number of fringes are visible on the reflected beam. To measure the fringe separation Δx accurately, count the number of fringes over a distance and divide this measured distance to the number of fringes.

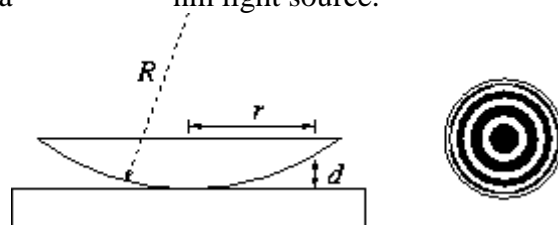
Illuminate both slits again. Measure the fringe separation at a distance from the slits. From this measurement, calculate the slit spacing using Equation (2.5-8) and compare this with the

given value. Repeat these measurements for the $40 \mu\text{m}$ wide and $500 \mu\text{m}$ spaced pair of slits.

Repeat the same experiment with the incandescent light source. Position the slits far from the light source so that the spatial coherence is high. (More on this in Chapter 10.) Use the diffuser as a screen; look from the opposite side towards the light source. Move the light source closer to the slits and observe the drop in fringe visibility. Why do you think the visibility is a function of light source distance from the slits?

3 Newton's rings

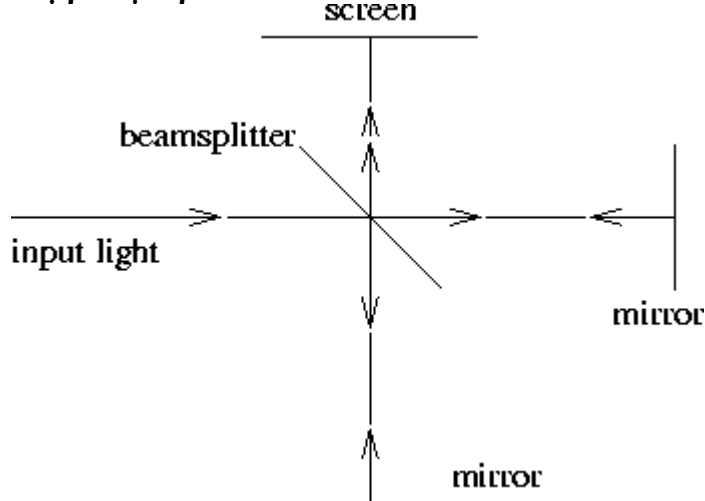
When a spherical surface is brought in contact with a flat surface, surface reflections result in concentric interference fringes. The point of contact is a dark fringe if both surfaces are clean. **Derive an expression** for the radius of the m th dark fringe for a given wavelength λ_0 ($\lambda_0 \ll R$). In the laboratory, your assistant will demonstrate Newton's rings with a $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$ light source.



179

Συμβολόμετρα με κάτοπτρα

Συμβολόμετρο Michelson



A schematic of the Michelson interferometer is shown in the figure. The input light is split at the beamsplitter and directed to two mirrors. These mirrors reflect the light back to the beamsplitter where the two waves combine. The phase difference between these waves depends on the optical path length difference between the two arms of the interferometer. The resulting interference can be observed on a screen placed at the

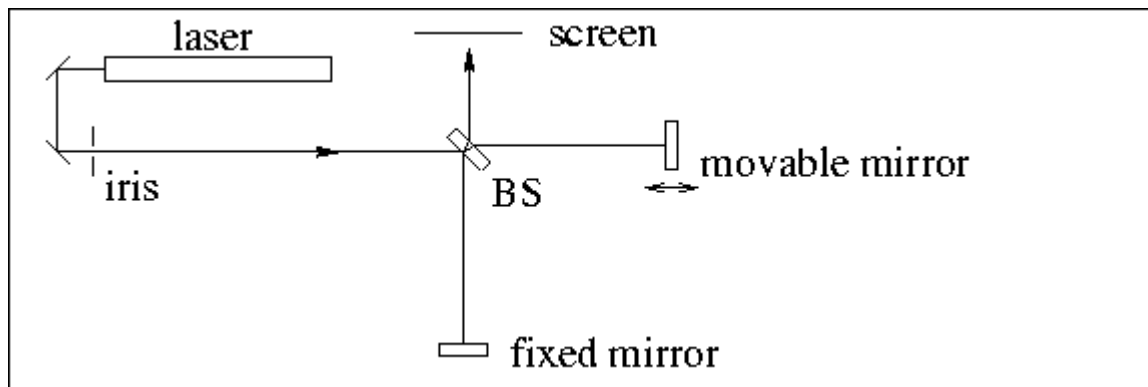
output. When the optical path length of the two arms are exactly equal or differ by an integral multiple of the wavelength λ_0 , the interfering waves have the same phase and the output is bright. When the path lengths differ from an integral multiple of λ_0 by $\lambda_0/2$, the output is dark.

The phase curvatures (wavefronts) of the two interfering waves may depend on the optical path length of the interferometer arms. For example when the input field is a diverging Gaussian beam, different path lengths result in different phase curvatures for the interfering waves. Hence, the interference pattern assumes a circular pattern. In other words, the phase difference becomes a function of the radial distance on the transverse plane.

Alignment

The optics used in the interferometer have delicate dielectric coatings on them. Extreme care must be taken not to scratch the optical surfaces.

To set up a Michelson interferometer, first obtain a laser beam that is parallel to the optical bench.



180

Mount the dielectric beamsplitter in a fixed optic mount and position it at 45° to the beam. Make sure that the beam splitting surface (coated surface) is facing the laser. Try to position the beam as close to the center of the beamsplitter as possible. *The reflected beam may not be perfectly parallel to the bench in the vertical direction, but this does not cause any problems.* Position an iris on the laser beam for alignment purposes, as shown in the figure. *Η δέσμη μετά την ίριδα γίνεται αποκλίνουσα με χρήση ενός ισχυρού φακού π.χ. εστιακής απόστασης $f=30\text{mm}$.* Next, mount a dielectric mirror in a fixed height adjustable mirror mount, and position it near 0° incidence angle and as far from the beamsplitter as possible, as shown in the figure. You will be able to see the reflection on the iris. *Adjust the mirror so that the reflected beam hits the iris close to the aperture. This will insure that the reflected beam does not get back to the laser and cause problems.*

For the movable mirror, screw a post holder onto the translation stage and place a post in the post holder. Mount another dielectric mirror on an adjustable mirror mount. Mount this on the XZ translation stage using the right angle post clamp such that the beam height is approximately 3 inches. Position the translation stage on the bench such that the two arms of the interferometer have nearly the same length.

Place a piece of white paper as a screen and locate the beams coming from the two arms of the interferometer. There may be other stray reflections on the screen as well. Adjust the tilt angle of the movable mirror such that the two spots are on top of each other. Can you

observe any interference? Translate the mirror back and forth with the micrometer to vary the path length difference.

Mount a negative lens ($f = -25\text{ mm}$) on a threaded optic mount. Position this lens near the beamsplitter at the input of the interferometer. Adjust the lateral position of the lens so that the beam goes through its center. Also, watch for the weak surface reflections from the lens on the iris to make the lens perpendicular to the beam. Realign the movable mirror to obtain a symmetric circular fringe pattern on the screen. Move the mirror with the micrometer and watch the fringes move.

Displacement measurement

Calculate the mirror displacement from a count of the fringes as you turn the micrometer. Avoid leaning on the table to prevent random fluctuations. Compare the measured displacement with a direct reading off the micrometer.

Measurement of the index of refraction of air

The interferometer can be used to measure any physical process that changes the phase of light. One such application is the measurement of the index of refraction of air. This is accomplished by using a vacuum cell in one arm to change the optical path length. For reasonably low pressures, the index of refraction of a gas varies linearly with pressure. Mount the vacuum cell on the plate holder. Using a post holder, place the vacuum cell in front of the movable mirror and connect the vacuum pump. Rotate the cell so that the windows are perpendicular to the beam. (Disregard the distortions in the fringe pattern.) The air in the cell is at atmospheric pressure (1 bar or 76 cm Hg) at this point. Count the movement of the fringes as you slowly pump out the air in the vacuum cell. Record the final pressure (atmospheric pressure minus the gauge reading). Make a plot of the refractive index as a function of pressure assuming linear dependence. (The vacuum cell is 3 cm long.) What is the refractive index at atmospheric pressure?

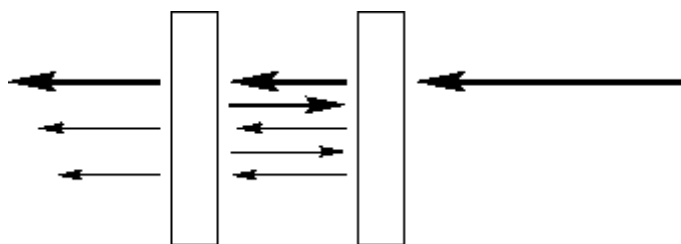
White light fringes

It is possible to observe interference fringes even with white light. Even though white light from an incandescent light source is temporally incoherent, fringes will form if the interferometer path lengths are exactly equal. (Actually, equal within the very short coherence time.)

The laboratory assistant will demonstrate white light fringes with a separate Michelson interferometer. The interferometer will first be aligned with a laser. Then, you will turn the micrometer to make the path lengths exactly equal. When this is achieved, the phase curvatures will ideally be identical, and there will be only one fringe. At this point, the assistant will replace the laser with the incandescent light source and form the white light fringes. Move the micrometer to see how sensitive these fringes are to the absolute path difference. Find the coherence time of the incandescent light source from this measurement.

2 Fabry-Perot interferometer

A Fabry-Perot interferometer consists of two partially transmitting mirrors facing each other. The light wave bounces back and forth between the mirrors. At each pass, a portion of the light is transmitted out of the interferometer. Waves from these infinite number of passes interfere at the output. This is an example of multi-wave interference. The laboratory assistant will demonstrate a Fabry-Perot interferometer.



ΠΕΙΡΑΜΑ ΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΥΠΕΡΛΕΙΠΤΗΣ ΥΦΗΣ ΚΑΙ ΔΟΜΗΣ ΦΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το συμβολόμετρο Fabry-Perot και μία φωτογραφική μηχανή για τη μελέτη της υφής των φασματικών γραμμών. Τοποθετούμε τα κάτοπτρα του FP ώστε να απέχουν απόσταση μεγαλύτερη των 10 mm, οπότε η διακριτική του ικανότητα είναι καλύτερη των $\Delta\sigma = 1/2d = 0.5 \text{ cm}^{-1}$. Στην περίπτωση που έχουμε ως φασματική πηγή ένα laser He-Ne, αυτή η διάταξη των κατόπτρων δεν θα είναι ικανή να διερευνήσει την φασματική δομή της γραμμής των 632.8 nm λόγω του πολύ μεγάλου μήκους συμφωνίας της. Ωστόσο, φωτογράφιση των κροσσών συμβολής του λέιζερ αυτού δίνει το ξεκίνημα να προσπαθήσουμε να πάμε σε ακόμα μεγαλύτερες αποστάσεις των κατόπτρων.

182

ΠΡΟΧΩΡΗΜΕΝΟ ΘΕΜΑ: Φασματοσκοπία υψηλής διακριτικής Ικανότητας- Συμβολόμετρο Fabry-Perot

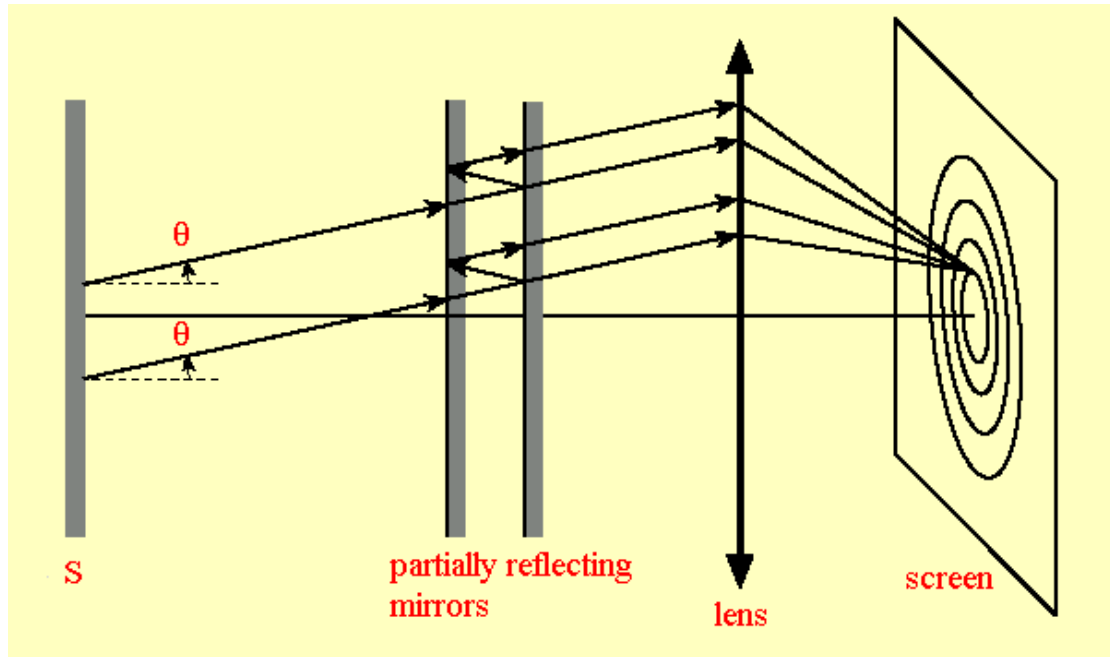
Στο σημείο αυτό είναι ενδιαφέρον να ξαναδούμε τη φασματική διακριτική ικανότητα ενός συμβολομέτρου Fabry-Perot (FP), και να αναζητήσουμε τις περιοχές ακραίας επίδοσης ώστε να μπορεί να ανταποκριθεί σε απαιτήσεις της ατομικής και μοριακής φυσικής όταν εμπλέκονται μεταβάσεις με μικρή μεταβολή μήκους κύματος ή κυματικού αριθμού. Η απόκριση ενός συμβολομέτρου FP είναι

$$I_T = [1 - A/(1 - R)]^2 / [1 + F \sin^2(\psi/2)] \quad (1)$$

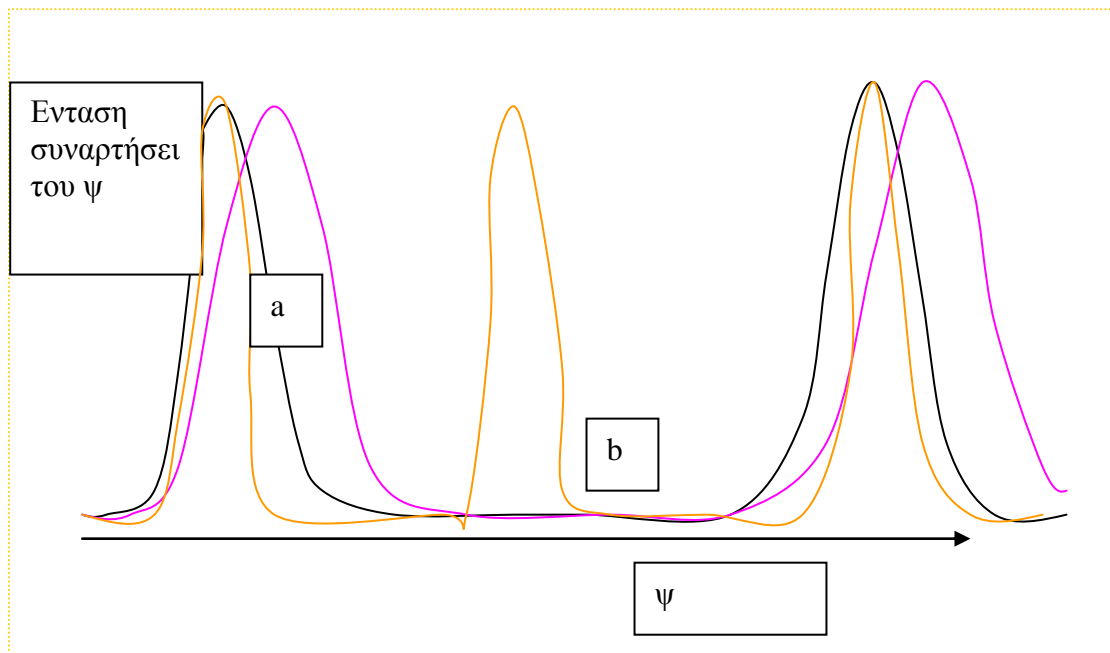
όπου $\psi = \phi + \epsilon$, και $\phi = 2\pi(2\mu d \cos\theta)/\lambda_0$, ενώ το ϵ προκύπτει λόγω της μεταβολής φάσης κατά τις ανακλάσεις σε απορροφητικά μέσα.

Στην περίπτωση δύο κοντινών φασματικών γραμμών, λ_0 και λ_1 , η εξ.(1) επιτρέπει τον διαχωρισμό τους υπό την προϋπόθεση ότι οι δύο κορυφές θα διακρίνονται, μεταξύ των σύμφωνα με τα κριτήρια φασματοσκοπίας. Ας τα δούμε αυτά σύντομα. Στο σχήμα παριστάνουμε τις φασματικές αποκρίσεις του συμβολομέτρου, για ορισμένες τιμές των παραμέτρων A , T και R .

Η πορεία των ακτίνων στο FP φαίνεται στο σχήμα:



183



Αν τώρα μεταβάλλουμε τις παραμέτρους του έταλον, π.χ. διπλασιάσουμε την απόσταση d , τότε θα υποδιπλασιασθεί η απόσταση των δύο κορυφών, όπως φαίνεται στην καμπύλη με το κίτρινο χρώμα.

Παράδειγμα εικόνας συμβολής σε Fabry –Perot έταλον όταν η πηγή έχει πολλά μήκη κύματος που απέχουν πολύ μεταξύ των

Όταν, π.χ., η πηγή μας είναι εκείνη του ατομικού υδραργύρου, παίρνουμε την εικόνα:

Η εικόνα συμβολής από ένα συμβολόμετρο Fabry-Perot όπως καταγράφεται σε φωτογραφικό φιλμ:

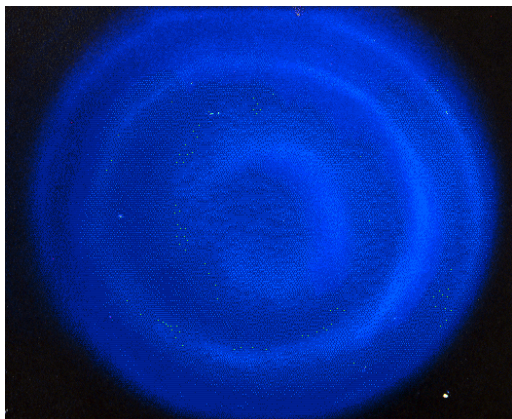
184



Αναγνωρίζονται διάφορα χρώματα σε διάφορες τάξεις κροσσών.

Εδώ, μολονότι τα χρώματα μπορεί να απέχουν πολύ μεταξύ των , βρίσκεται να είναι , συχνά, αρκετά κοντά σε μεταξύ των. Τούτο οφείλεται στο πεπερασμένο free spectral range του έταλον, $FSR = 1/ (2d)$.

Ενα άλλο παράδειγμα εφαρμογής συμβολομέτρου FP φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, για την γραμμή στα 403.7 nm, του φάσματος Υδραργύρου αφού αυτή έχει απομονωθεί με τη βοήθεια κατάλληλου οπτικού φίλτρου που έχει κορυφή διαπερατότητας κοντά στο μήκος κύματος αυτό.



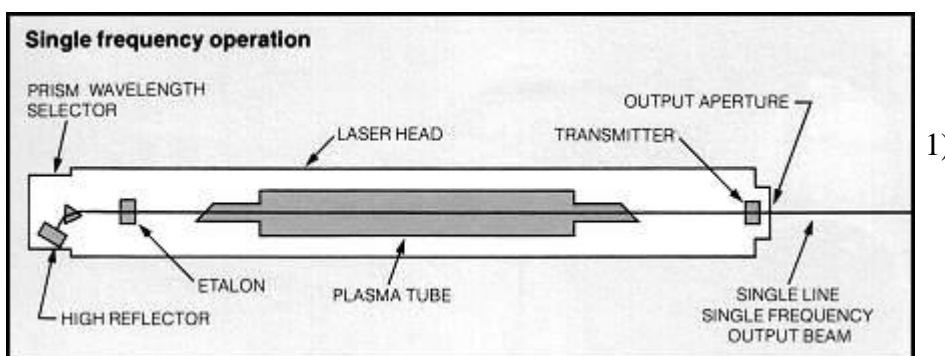
Σχήμα. Διακρίνονται τρεις κροσσοί συμβολής που αντιστοιχούν στο μήκος κύματος 403.7 nm του Hg. Το ενδιάμεσο μπλε σκούρο χρώμα, οφείλεται στην παρατεταμένη χρονική έκθεση, και σκέδαση του φωτός που διέρχεται μέσα από το οπτικό φίλτρο.

185

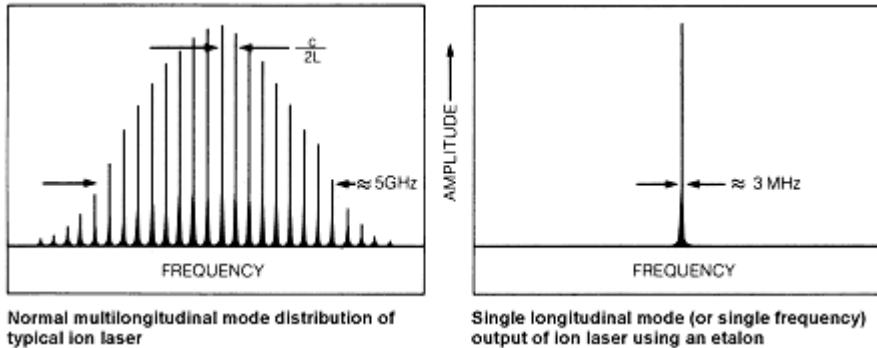
Επίδοση του έταλον

Σε πολλές εφαρμογές όπου πρέπει να μετρηθούν υπέρλεπτες δομές φασματικών γραμμών, απαιτείται η χρησιμοποίηση *probing laser* που να είναι όσο το δυνατόν πιο μονοχρωματικό, ή όπως λέμε να είναι μοναδικού τρόπου ταλάντωσης.

Μπορούμε να δώσουμε ένα παράδειγμα όπου θέλουμε να πετύχουμε κάτι τέτοιο στο laser ιόντων αργού, όπως φαίνεται στο σχήμα.



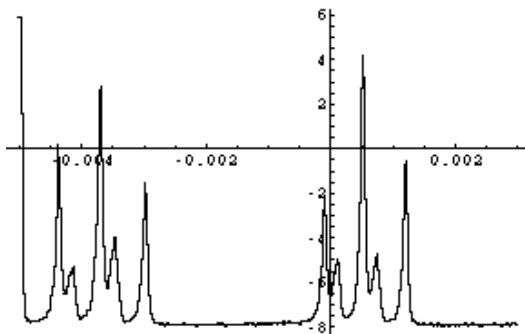
Με την βοήθεια ενός έταλον μέσα στην κοιλότητα του laser, μπορούμε να απαλείψουμε αρκετά ικανοποιητικά την παρουσία στην έξοδο του όλων πλην ενός των τρόπων ταλάντωσης που παραστατικά φαίνονται στο Σχήμα:



Παρατηρούμε πως ήδη έχουμε στην έξοδο του laser μόνο ένα διαμήκη τρόπον ταλάντωσης με εύρος $\Delta\nu = c/2L = 3 \text{ MHz}$, όπου L η απόσταση των κατόπτρων του laser.

Ας δούμε πως μελετάμε την δομή τρόπων ταλάντωσης σε laser He-Ne

186



In the experiment performed by Dr. Von Seth Carpenter and Jimmy Jim Nolen, they were able to measure the frequency separation between the longitudinal modes of a HeNe laser. They noted that the Free Spectral Range was 2 GHz, according to the manual accompanying the particular Fabry-Perot Interferometer that they used.

For a cavity length of 46.9 cm the frequency separation between modes was measured to

$$f = \frac{c}{2L} = \frac{3e8 \text{ m/s}}{2(0.469 \text{ m})} = 319.8 \text{ MHz}$$

be 325.5 MHz. Theoretically, the separation should be 319.8 MHz. The Doppler width of tallest peak, measured at half width-half max, was found to be approximately 60 MHz. Several pictures of the mode spacing for this particular cavity length may be seen below.

Χρησιμοποίηση έταλον για μέτρηση κραδασμών

Με βάση τη σχέση (1)

$$I_T = [1 - A/(1 - R)]^2 / [1 + F \sin^2(\psi/2)] \quad (1)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε μικρές μεταβολές της απόστασης d των κατόπτρων του έταλον ώστε αυτές να είναι της τάξης μεγέθους $\lambda/10$ η και μικρότερες. Τότε, αν η ενεργή λεπτότητα (Finesse) των κροσσών του είναι περίπου 20, είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε μεταβολή στην ένταση, I_T , μόνον αν η φάση ψ αντιστοιχεί σε θέση της καμπύλης (1) όπου υπάρχει κορυφή της καμπύλης Airy, π.χ. στη θέση a στο σχήμα. Τότε μικρή μεταβολή της ψ , μπορεί να δώσει σημαντική σχετική μεταβολή στην ένταση που αντιστοιχεί στην συνεχή μαύρη καμπύλη. Αντίθετα, αν η αρχική φάση ψ είναι εκείνη στη θέση b , τότε για μεταβολές της ψ της τάξης του ενός δεκάτου του FSR, δεν αναμένουμε σημαντική μεταβολή της έντασης. Ας θεωρήσουμε μεταβολές της τάξης ενός η δύο ελεύθερων φασματικών περιοχών. Τότε είναι προβλέψιμο το αποτέλεσμα. Αντίθετα, αν η μεταβολή του ψ είναι μικρότερη του ενός FSR θα είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ένα περίπου γραμμικό τμήμα κοντά στη θέση a του σχήματος. Η μεταβολή του d μπορεί να γίνει με τη βοήθεια είτε της μεταβολής της πίεσης είτε με τη βοήθεια μικροκραδασμών πάνω στην οπτική ράβδο που στηρίζει το έταλον. Αν ο κραδασμός αντιστοιχεί σε εξαναγκασμένη ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω , και αυτή προκαλεί μία μεταβολή

F

$$\Delta d = \Delta d_0 \frac{\cos \omega t}{m(\omega - \omega_0)}$$

187

Μονοχρωματικότητα στην φασματική πηγή σε ένα συμβολόμετρο Fabry-Perot

For early lasers with a typical cavity length of 1 m the mode spacing was 0.5 m⁻¹, with a gain profile width of approximately 5.5 m⁻¹. Thus several axial modes were present in the gain profile with gains sufficient for laser action, and so two or more modes would operate simultaneously, making the laser unsuitable for interferometry. By using a shorter tube and then carefully lowering the power of the discharge and hence lowering the gain curve, it was possible to achieve single mode operation [28].

Εφαρμογές του φαινομένου Zeeman : Zeeman-Stabilized 633 nm Lasers

An alternative technique to saturated absorption is used in the commercial lasers used in the Primary Length Bar Interferometer. The method of stabilisation used for these lasers is based on the Zeeman effect. A longitudinal magnetic field is applied to a single mode He-Ne laser tube, splitting the normally linearly polarised mode into two circularly polarised modes which are oppositely polarised. A field strength of 0.02 T is sufficient to split the modes, which remain locked together at low B-field, to produce the linear polarisation. These two modes differ in frequency by 300 kHz, around a mean frequency corresponding to the original linear mode.

Ισοτοπική μετατόπιση και υπέρλεπτη υφή: Μεθοδολογία μέτρησης

Επειδή η ισοτοπική μετατόπιση (IS) και ο υπέρλεπτος διαχωρισμός (HFS) συνεισφέρουν στην τελική τιμή των ενεργειακών σταθμών, για τον προσδιορισμό των αναλύουμε τα πειραματικά δεδομένα προσπαθώντας να τα παραμετροποιήσουμε (με

διαδικασία fitting) ως κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς IS και HFS. Η κατάλληλη προς τούτο φασματοσκοπία βασίζεται σε συντονιζόμενο διοδικό laser.

[http://www.optics.arizona.edu/jcwyant/Optics505\(2000\)/ChapterNotes/Chapter04/BasicInterference.pdf](http://www.optics.arizona.edu/jcwyant/Optics505(2000)/ChapterNotes/Chapter04/BasicInterference.pdf)

Mach-Zehnder <http://ej.iop.org/links/q91/3cHG6QqNZrTEktduFVoTrw/pe0108.pdf>

Συμβολόμετρο Michelson:

<http://www.physics.uncc.edu/physstaff/gjgbur/coursepages/6271assets/lecture10-interferometers.pdf>

Michelson-Morley <http://www.physics.miami.edu/~galeazzi/phy362/362-week2.ppt#24>

www.physics.wayne.edu/~apetrov/PHY2140/Lecture24.ppt Καλό!!!

Helium Spectroscopy –Refractive Index of gases:

http://www.sussex.ac.uk/Units/physics/teaching/rcs/FYlab/Refractive_gases.doc

Lehigh University Notes:

http://dyn016182.sfc.lehigh.edu/~dierolf/Teaching_pdfs/Phys352/Lecture23.pdf

Αστρικό Συμβολόμετρο του Michelson

-http://ej.iop.org/links/q99/kkZX5plnJmKFoPwwQIDYPA/joa4_2_019corr.pdf

-<http://lapy.lancs.ac.uk/gh/py231/week10.pdf>

188

-Οπτική στην Αστρονομία:

[http://www.kis.uni-](http://www.kis.uni-freiburg.de/~ovdluhe/Interferometry/Cargese02/Interferometry_02.pdf)

[freiburg.de/~ovdluhe/Interferometry/Cargese02/Interferometry_02.pdf](http://www.kis.uni-freiburg.de/~ovdluhe/Interferometry/Cargese02/Interferometry_02.pdf)

-

Συμφωνία:http://www.optics.arizona.edu/milster/505%20Lecture_2002/homework/3Coherence.pdf

- **VLT Tutorial:**

http://www.eso.org/projects/vlti/general/tutorial_introduction_to_stellar_interf.pdf

(να κατέβει από το δίκτυο)

- **Nulling Interferometry:**

http://www.strw.leidenuniv.nl/~nevec/GENIE/workshop_2002/abstracts/glindemann_presentation_keynote.pdf

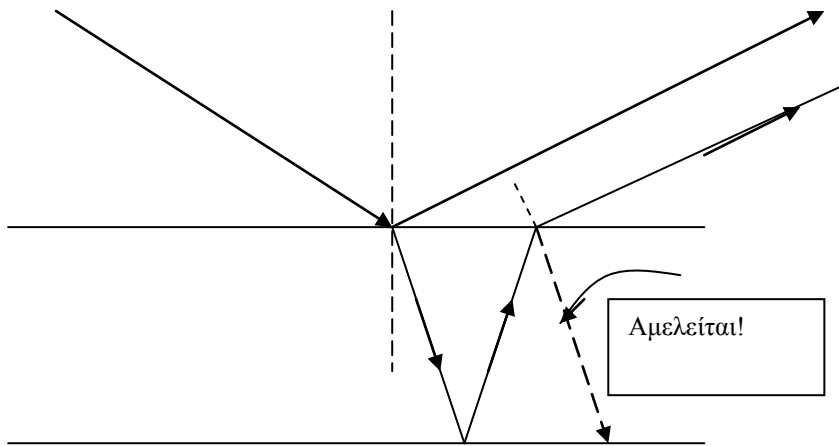
- Principles of Optics Max Born:

- **Ασκήσεις Συμβολής (με λύσεις):**

http://omm.hut.fi/optics/1_o/2005/laskarit/solutions06.pdf

http://omm.hut.fi/optics/1_o/2005/laskarit/solutions07.pdf

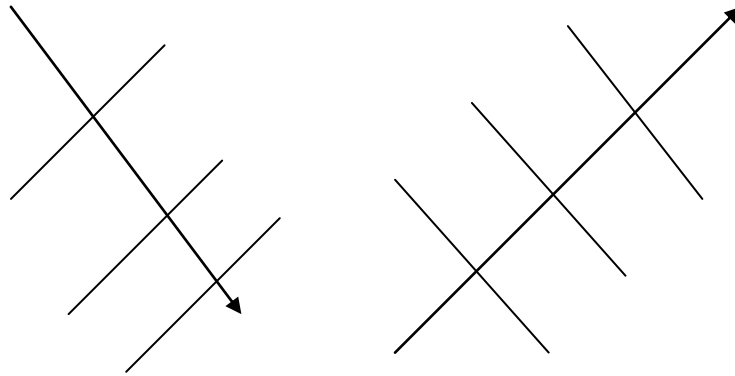
http://omm.hut.fi/optics/1_o/2005/laskarit/laskarit.html



ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

Σε αυτό το εδάφιο ασχολούμαστε με φαινόμενα της ανάκλασης και διάδοσης κυμάτων σε δύο διαστάσεις. Ας δούμε πρώτα την **ανάκλαση**. Όταν μία δέσμη φωτός πέφτε πάνω σε μία διαχωριστική επιφάνεια διαφανούς υλικού, όπως ένα γυάλινο πλακίδιο, τότε το κύμα συναντά μία "τεράστια" συστοιχία από γειτονικά τοποθετημένα άτομα τα οποία κάπως θα σκεδάσουν το φως (ή κύμα). Ας θυμηθούμε πως το κύμα μπορεί να έχει μήκος $1 \mu\text{m}$, ενώ τα άτομα και οι μεταξύ των αποστάσεις (0.2 nm) είναι χιλιάδες φορές μικρότερα. Στην περίπτωση της **διάδοσης** διαμέσου ενός πυκνού μέσου, τα σκεδαζόμενα κυματίδια αναιρούν το ένα το άλλο εκτός προς την έμπροσθεν κατεύθυνση, και έτσι η προσπίπτουσα δέσμη συνεχίζει την πορεία διάδοσής της. Το χαρακτηριστικό κριτήριο που καθορίζει αν θα έχουμε ανάκλαση ή όχι είναι η παρουσία κάποιας ασυνέχειας ή μη στο μέσο. Αν υπάρχει μία ασυνέχεια στις ιδιότητες του μέσου, τότε θα έχουμε και κάποια ανάκλαση που την μελετήσαμε στη μονοδιάστατη περίπτωση.

Ο νόμος της ανάκλασης



.....

.....

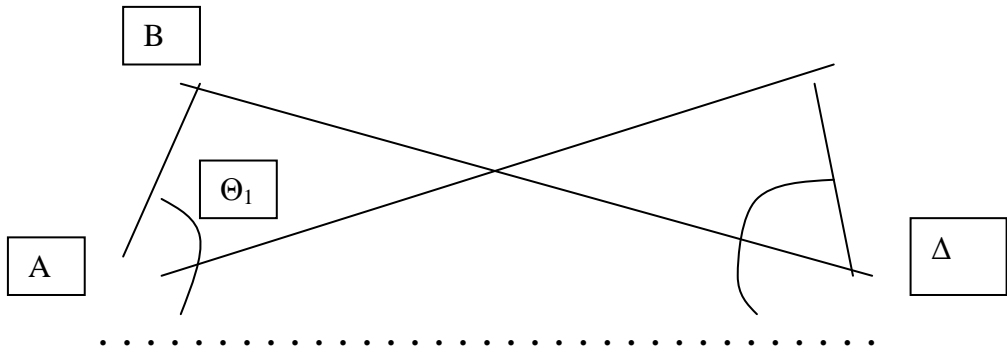
190

Όπως φαίνεται στο σχήμα, καθώς το προσπίπτον κύμα σαρώνει τα σωματίδια, που στο σχήμα για απλότητα φαίνονται σαν τελείες παρατεταγμένες στις δύο πρώτες στρώσεις ενός κρυστάλλου, παράγονται από έκαστο άτομο δευτερογενή κύματα. Η κυματική παραγωγή δευτερευόντων κυμάτων αρχίζει νωρίτερα στα άτομα που βρίσκονται αριστερότερα. Αποτέλεσμα τούτου είναι ότι το ανακλώμενο κύμα δεν κατευθύνεται προς την κατεύθυνση της καθέτου, \mathbf{n} , στη διαχωριστική επιφάνεια αλλά σχηματίζει μία γωνία με αυτήν που είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία μεταξύ της καθέτου \mathbf{n} και του κυματικού διανύσματος \mathbf{k} του προσπίπτοντος κύματος. Για να δούμε τα πράγματα περισσότερο ποσοτικά.

Έτσι, στο Σχήμα πίο κάτω φαίνεται ότι για το χρονικό διάστημα Δt που χρειάζεται ώστε το μέτωπο κύματος να φτάσει από το σημείο Β στο Δ, $\Delta t = (B\Delta)/c$, θα έχει το ανακλώμενο κύμα διανύσει το μήκος ΑΓ με την ίδια ταχύτητα c : $\Delta t = (A\Gamma)/c$. Άρα, είναι $A\Gamma = B\Delta$, και συνεπώς, επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν κοινή υποτείνουσα,

Γ

Θ_2



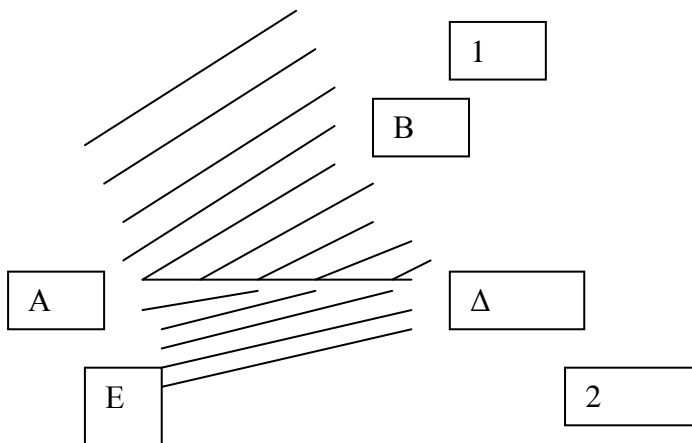
Ακτίνες

$$\frac{\sin\theta_1}{B\Delta} = \frac{\sin\theta_2}{A\Gamma}$$

Αρα, προκύπτει $\theta_1 = \theta_2$, σχέση που είναι γνωστή ως *Νόμος της Ανάκλασης*.

Διάθλαση

191



Από το σχήμα προκύπτει πως , όταν έχει διανυθεί το τμήμα ΒΔ εντός του μέσου 1, τότε εντός του μέσου 2, στο ίδιο διάστημα Δt, έχει διανυθεί το μήκος ΑΕ. Έτσι, $AE=c_2 \Delta t$, $BD= c_1\Delta t$, και

$$\sin\theta_1 = BD/ AD, \sin\theta_2= AE/ AD. \text{ Άρα, } \sin\theta_1/c_1 = \sin\theta_2/c_2.$$

Αναφορές σε διάθλαση.

[1] <http://physics.bgsu.edu/~stoner/P202/refract/sld001.htm>

[2] <http://www.ucd.ie/physics/exph2001/linkhuygens.htm>

Ανάκλαση και διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο όριο δύο διηλεκτρικών μέσων (κάθετη πρόσπτωση)

(1) Κάθετη πρόσπτωση

Οι συνθήκες συνέχειας των **E** και **H** στη διαχωριστική (επίπεδη) επιφάνεια δύο διηλεκτρικών είναι:

$$E_i + E_r = E_t \text{ και } H_i + H_r = H_t$$

Ξέρουμε όμως πως $E_i/H_i=Z_1$ και $E_r/H_r=-Z_1$, ενώ $E_t/H_t=Z_2$

Από αυτές τις σχέσεις, είναι εύκολο να βρούμε ότι ο συντελεστής ανάκλασης πλάτους είναι

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

και ο συντελεστής διάδοσης πλάτους

$$T = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

Σε συμφωνία με του συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης που βρήκαμε σε άλλα κύματα.

Αν το κύμα διαδίδεται στον αέρα και προσπίπτει κάθετα σε έναν ιδάνικό αγωγό με $Z_2 = 0$, τότε

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = -1$$

που αντιστοιχεί σε ολική ανάκλαση

και

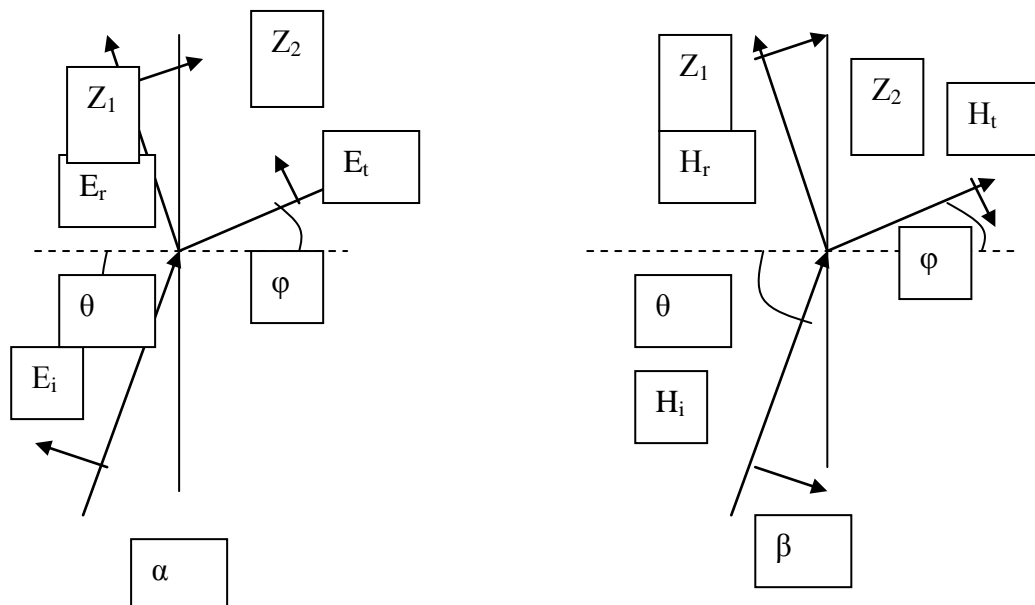
$$T = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = 0$$

Θα δούμε ότι οι πραγματικοί αγωγοί απέχουν αρκετά από τα ως άνω αποτελέσματα που αναμένονται για ιδανικούς αγωγούς

(2) Πλάγια πρόσπτωση

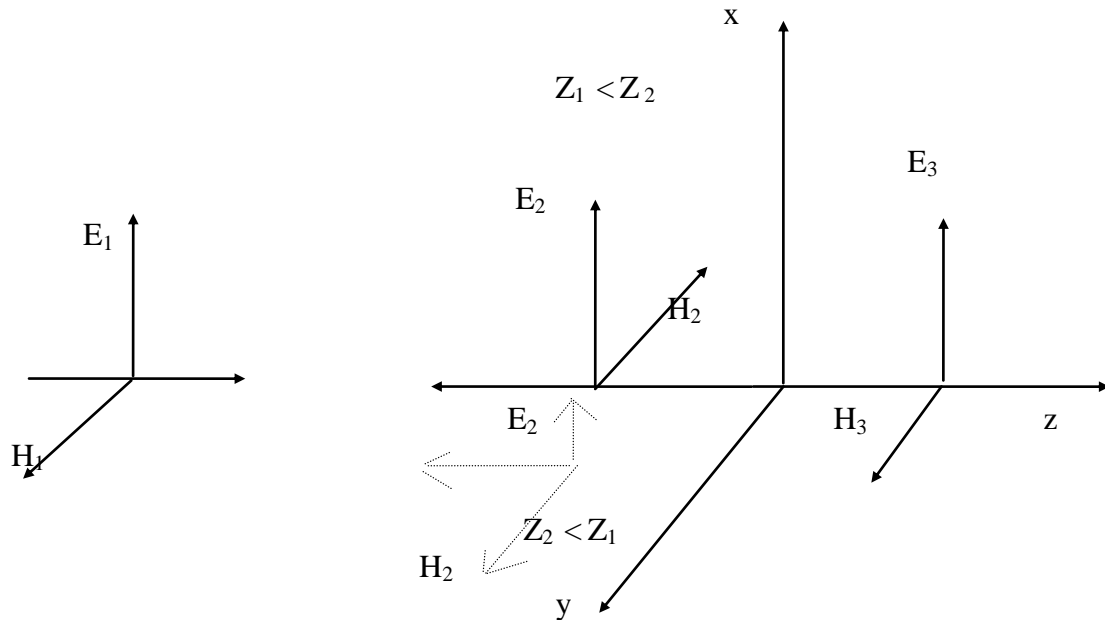
Και εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες της προηγούμενης παραγράφου, με την παρατήρηση ότι αυτές πρέπει να εφαρμόζονται στις εφατομενικές συνιστώσες των \mathbf{E} και \mathbf{H} . Εξετάζουμε τώρα δύο περιπτώσεις
 (α) Το επίπεδο του ηλεκτρικού προσπίπτοντος γραμμικά πολωμένου ηλεκτρομαγνητικού κύματος βρίσκεται στο επίπεδο του χαρτιού, όπως στο Σχήμα

193



Δεν απαιτείται η Παράγραφος 7.14

Ας θεωρήσουμε το παρακάτω παράδειγμα ενός αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται σε ένα μέσο με χαρακτηριστικές σταθερές ϵ_1 και μ_1 και που προσπίπτει κάθετα σε ένα μέσο με σταθερές ϵ_2 και μ_2



194

_ Θεωρούμε ότι το όριο του διαχωρισμού μεταξύ των μέσων είναι το $z=0$. Τα διανύσματα του μαγνητικού πεδίου έχουν προσανατολισθεί σε τέτοια κατεύθυνση που να δείχνουν την ροή ενέργειας στην επιθυμητή κατεύθυνση σύμφωνα με το διάνυσμα Poynting. Τα κατάλληλα μαγνητικά πεδία που σχετίζονται με τα ηλεκτρικά πεδία προκύπτουν με τη βοήθεια της εξίσωσης του Μάξγουελ

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Η ανακλώμενη ένταση ακτινοβολίας πρέπει να έχει διανυσματικά κατεύθυνση προς τον άξονα των $-z$. Εδώ έχουμε δυο περιπτώσεις, α) $Z_1 < Z_2$, οπότε το διάνυσμα \mathbf{E}_2 θα έχει αντίθετο πρόσημο με το \mathbf{E}_1 , και β) $Z_1 > Z_2$, οπότε το διάνυσμα \mathbf{E}_2 θα έχει ίδιο πρόσημο με το \mathbf{E}_1 . Η συνθήκη ότι το διάνυσμα Poynting, $\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2$ πρέπει να διαδίδεται προς τα αριστερά για το ανακλώμενο κύμα, καθορίζει μονοσήμαντα την κατεύθυνση του \mathbf{H}_2 σε έκαστη των περιπτώσεων α) και β), όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ποσοτικά προκύπτει

$$E_1 / H_1 = Z_1$$

$$E_2 / H_2 = -Z_1$$

και

$$E_3 / H_3 = Z_2$$

και από αυτές, $R = (Z_2 - Z_1) / (Z_2 + Z_1)$, και $T = 2 Z_2 / (Z_2 + Z_1)$

και από αυτές

$$R = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}}$$

Εφαρμογή των ανωτέρω σχέσεων στην περίπτωση των οπτικά διαφανών υλικών, πρέπει να λάβει υπόψη ότι το μ είναι ίσο περίπου με τό μ_0 , και συνεπώς ο δείκτης διάθλασης είναι

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$$

195

και άρα,

$$R_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

και

$$T_E = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Η ένταση του κύματος θα είναι τότε

$$R = \frac{E_2 \times H_2}{E_1 \times H_1}$$

$$R = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

και

$$T = \frac{n_2 (2n_1)^2}{n_1 (n_1 + n_2)^2}$$

Νόμοι του Φρενέλ

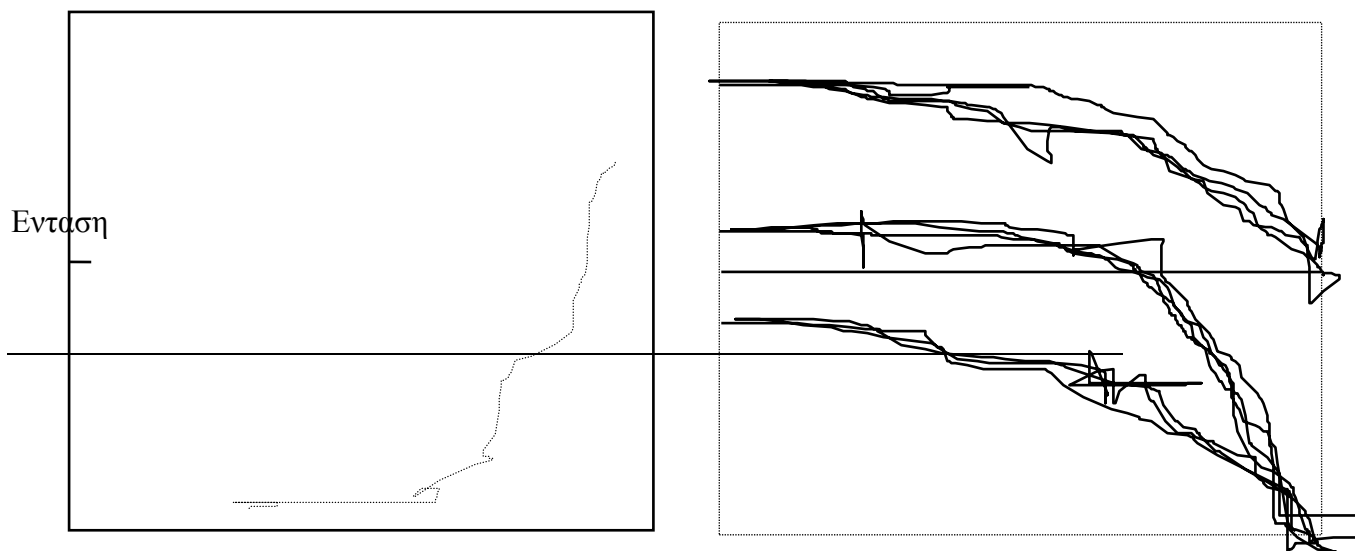
$$R_{\pi} = \frac{n_1 \cos \theta_r - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i} \quad (1)$$

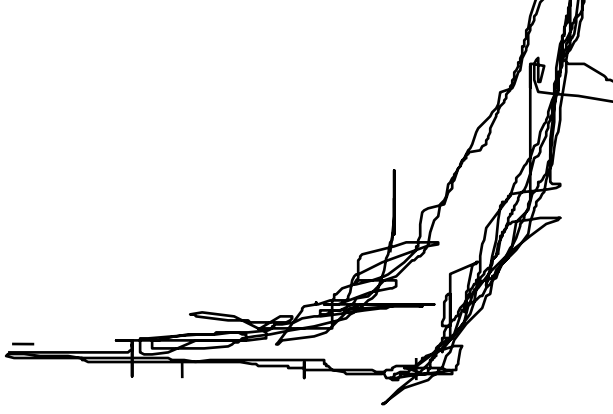
$$R_{\sigma} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r} \quad (2)$$

$$T_{\pi} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i} \quad (3)$$

$$T_{\sigma} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i} \quad (4)$$

196





Γωνία σε μοίρες

Ο συντελεστής διάδοσης και ανάκλασης της έντασης του κύματος είναι ανάλογος του τετραγώνου του συντελεστή διάδοσης και ανάκλασης του πλάτους του. Έτσι, για κάθετη πρόσπτωση είναι

$$R_{\text{έντασης}} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$$

Αν ωστόσο το κύμα πέφτει σε ένα πλακίδιο γυαλιού που έχει δύο διαχωριστικές επιφάνειες, τότε προκύπτει

$$R_{\text{έντασης, δύο επιφάνειες}} \approx 2 \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$$

197

Η διατήρηση της ενέργειας δίνει για την σχέση του συντελεστή ανάκλασης έντασης και διάδοσης έντασης τη σχέση (Βλ. Fundamentals of Optics , Jenkins and White)

$$R^2 + n^2 T^2 \cos^2 \phi' / \cos^2 \phi = 1$$

Αυτή ισχύει τόσο για την παράλληλη όσο και για την εγκάρσια συνιστώσα του πεδίου ως προς το επίπεδο πρόσπτωσης.

Στα Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα σε μέσο με ιδιότητες μ , ϵ αν η αγωγιμότητα σ είναι μηδέν, τότε έχουμε την κλασική κυματική εξίσωση με

$$v = 1 / (\mu \epsilon)^{1/2}$$

Αναφορές Εξισώσεων Fresnel :

File: Optics109FresnelsEqns.ppt

File: chpt08FresnelEquations.pdf

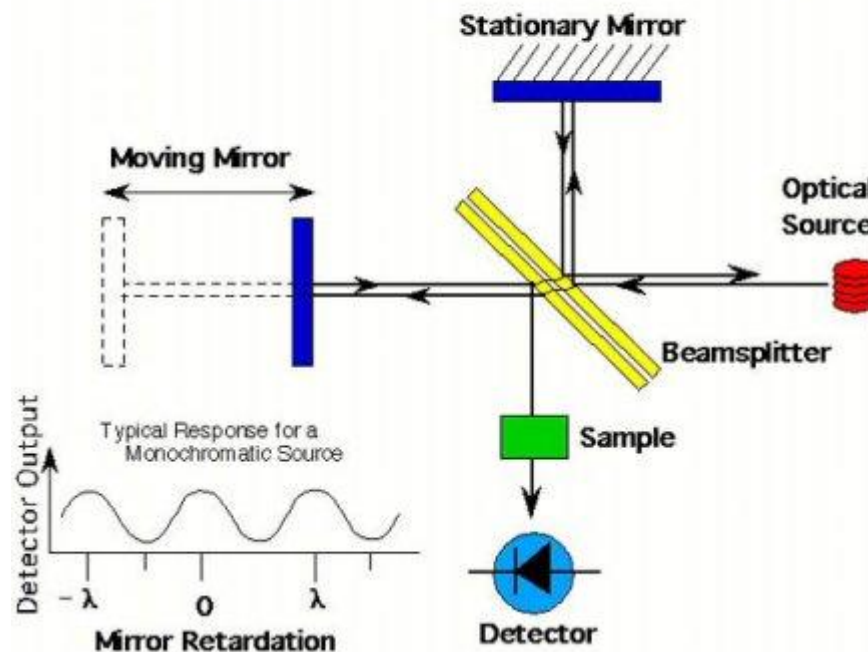
Wide field imaging computational challenges:

<http://www.atnf.csiro.au/people/tim.cornwell/compchallenges2004.ppt>

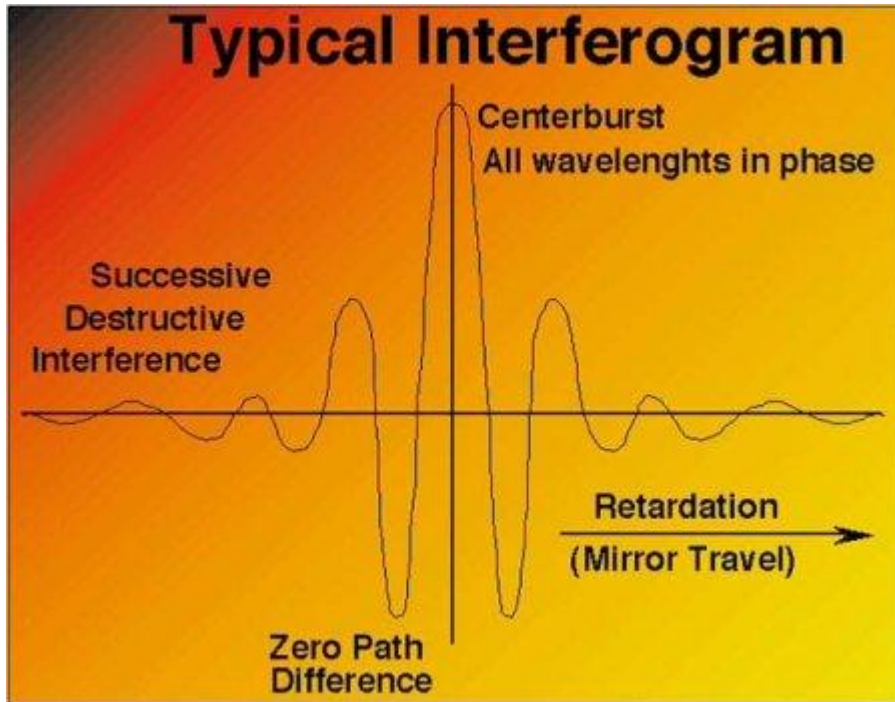
Παράδειγμα Συμβολομέτρου Michelson

Στο παρακάτω διάγραμμα έχουμε μία φωτεινή πηγή, έστω μονοχρωματική, και το προκύπτον επίπεδο κύμα υφίσταται μία διαίρεση του πλάτους όταν προσπίπτει σε ένα ημιδιαπερατό κάτοπτρο, με ανακλαστικότητα περίπου 50%. Εκαστη από τις δύο δέσμες ανακλάται στη συνέχεια σε αντίστοιχο κάτοπτρο και μετά δίοδο για μία ακόμη φορά μέσα από το ημιδιαπερατό κάτοπτρο, οδεύει προς τον ανιχνευτή όπου έχουμε τις δύο δέσμες να συμβάλουν. Ο ένας καθρέπτης μπορεί να μετακινείται παραμένοντας παράλληλος προς τον εαυτόν του, με αποτέλεσμα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συμβαλλόντων δεσμών να είναι μεταβλητή. Έτσι, έχουμε ως προκύπτουσα ένταση μία ημιτονική καμπύλη που φαίνεται στο ένθετο σχήμα.

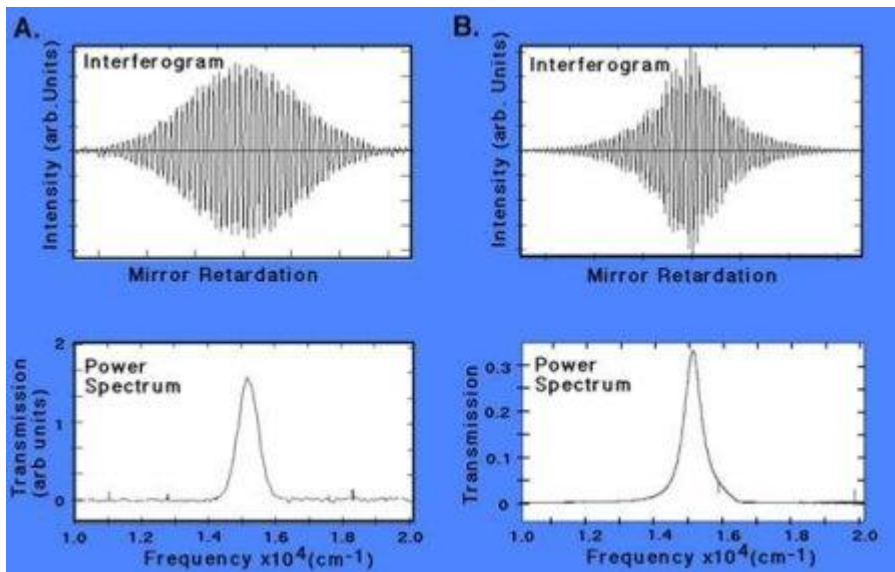
Typical Fourier Transform Spectrometer



198



199



Αναφορά σε εργαστήριο

<http://www.physics.udel.edu/~bcwalker/phys313/lab7.pdf>

Adaptive optics parallel spectral domain optical coherence tomography for imaging the living retina

Yan Zhang, Jungtae Rha, Ravi S. Jonnal, and Donald T. Miller

School of Optometry, Indiana University, Bloomington, Indiana 47405

yz7@indiana.edu and jrha@indiana.edu

FT-IR

[http://www.southernforensic.org/ourierTransformInfraredSpectroscopy\(FT-IR\)AllenCatterton.ppt](http://www.southernforensic.org/ourierTransformInfraredSpectroscopy(FT-IR)AllenCatterton.ppt)

-<http://www.fusione.enea.it/eurofusion/workprojet/review2004/CSozzi-microwave.ppt>

Optical Instruments:

<http://kottan-labs.bgsu.edu/202/Chapter%2025.1-7.ppt>

-[Spectral hole burning in gas-filled photonic bandgap fiber](#)

jrm.phys.ksu.edu/Research/Presentations/Other/Corwin-CLEO2005.ppt

<http://jrm.phys.ksu.edu/Research/Presentations/Other/Corwin-CLEO2005.ppt>

- [Precision Displacement Measurement via a Heterodyne Laser ...](#)

www.engr.sjsu.edu/bjfurman/courses/ME250/ME250pres/DMI.ppt

-[PHYS362 – Advanced Observational Astronomy](#)

www.astro.livjm.ac.uk/courses/phys362/PHYS362_set8b.ppt

-[Michelson interferometer](#)

irlab.ndhu.edu.tw/~irlab/group%20meeting/20030502.ppt

-[Virtual laboratory in optics](#)

www.formatex.org/micte2005/07.ppt

Άσκηση

Φως με μήκος κύματος $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ ανγκστρομ προσπίπτει κάθετα σε δύο διαφανή πλαστικά πλακίδια. Αυτά χωρίζονται με μία απόσταση, που είναι μεγάλη σε σύγκριση με το μήκος κύματος. Αν ο δείκτης διάθλασης των πλακιδίων είναι $n = 1.5$, τι ποσοστό του φωτός μεταδίδεται μέσα από αυτά; Παραλείψτε τις πολλαπλές ανακλάσεις και τα φαινόμενα συμβολής.

Λύση

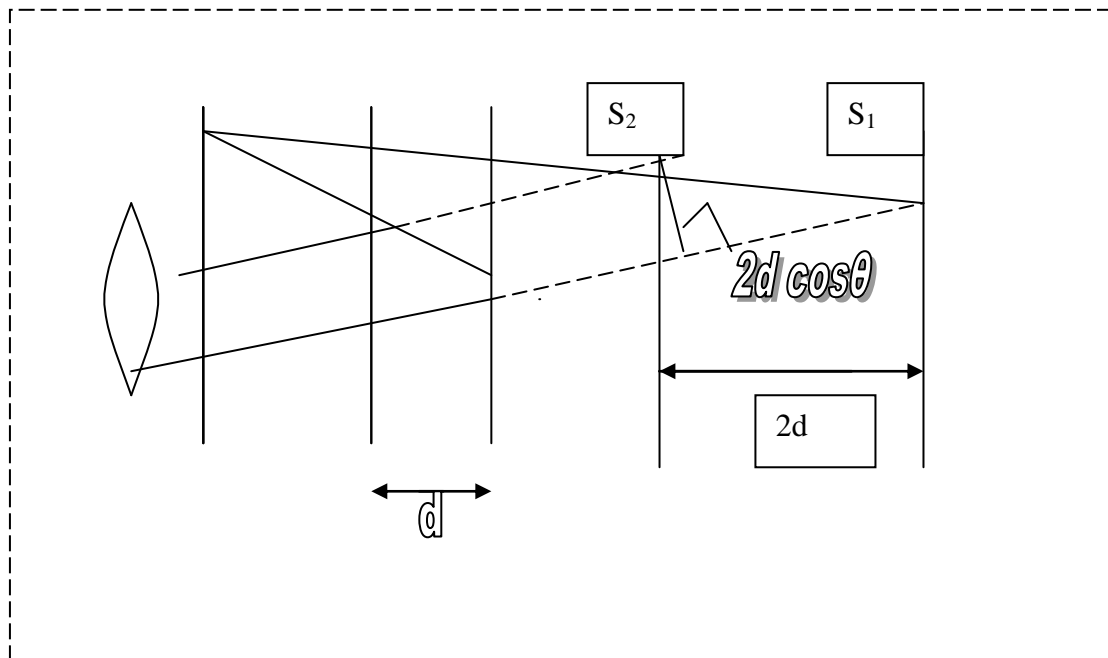
$$R_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$|R_{\text{ολ}}|^2 =$$

$$2 \times \left\{ \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 + \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \right\} = 0.84$$

Άρα, η διαερατότητα του συστήματος είναι 86%.

Θεωρώντας το είδωλο M_1' του κατόπτρου M_1 ως προς τον διαιρέτη της δέσμης, έχουμε το Σχήμα όπου οι οριζοντιώδεις πηγές είναι στα σημεία S_1 και S_2 σε απόσταση ίση με $2d$, ενώ η οπτική διαφορά δρόμου μεταξύ των συμφώνων κυμάτων που εκπέμπουν είναι ίση με $2d \cos\theta$, όπως προκύπτει από τη γεωμετρία του σχήματος.



201

Καταστρεπτική συμβολή θα συμβαίνει όταν

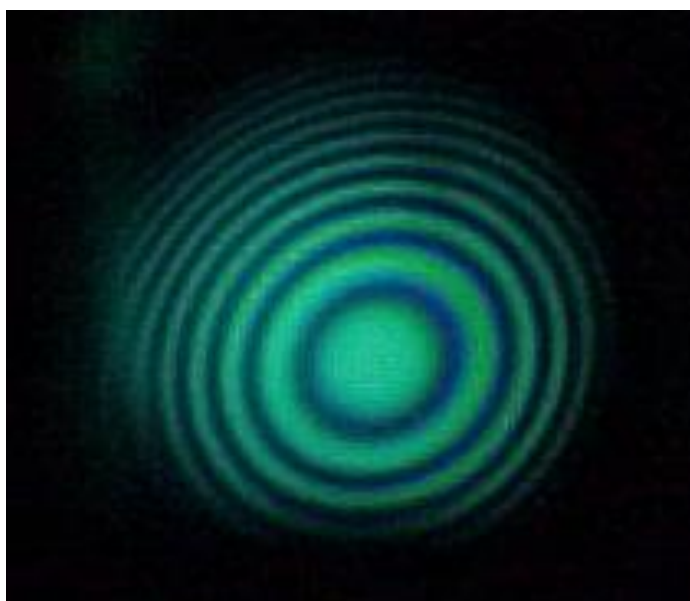
$$2d \cos\theta_m = m\lambda_0 \quad (1)$$

Τούτο θα ισχύει, για ίσες οπτικές διαφορές δρόμου, λόγω του ότι έχουμε μία ολική εσωτερική ανάκλαση όταν το κύμα διασχίζει τον βραχίονα OM_2 , ενώ ο κύμα στο OM_1 ανακλάται εξωτερικά, και έτσι έχουμε μία διαφορά φάσης (συνολικά) ίση με π (για διαιρέτη δεσμής με απλά ένα μη επιστρωμένο γυαλί).

Λόγω της αξονικής συμμετρίας του σχήματος η ως άνω σχέση θα ικανοποιείται για οποιοδήποτε σημείο στον κύκλο, με κέντρο το O και ακτίνα OS πάνω στο επίπεδο Σ .

Ετσι, θα έχουμε κυκλικούς κροσσούς συμβολής. Το αποτέλεσμα αυτό θα προκύψει εφόσον δεν έχουμε σημειακή πηγή (S) αλλά μία πεπερασμένου εμβαδού ακτινοβολούσα πηγή. Τότε, ορισμένοι δακτύλιοι πάνω σε αυτήν θα δίνουν ενισχυτική, και ορισμένοι άλλοι καταστρεπτική, συμβολή ώστε να έχουμε το σύστημα κυκλικών κροσσών συμβολής. Λόγω του μικρού ανοίγματος του οφθαλμού, ο παρατηρητής δεν θα μπορεί να βλέπει το σύνολο της εικόνας συμβολής εκτός αν χρησιμοποιήσει ένα μεγάλο φακό κοντά στον διαιρέτη δέσμης για να συλλέξει όλο σχεδόν το εξερχόμενο φως.

Η εικόνα των κροσσών συμβολής φαίνεται στο Σχήμα:



202

Σχήμα: Η εικόνα κροσσών συμβολής από πηγή με περισσότερα από ένα χρώματα όπως αποτυπώνεται σε έγχρωμο φωτογραφικό φιλμ. Παρατηρούμε πως τα διαφορετικά χρώματα αντιστοιχούν σε διαφορετικές διαμέτρους κροσσών.

Σύνθετες πηγές Αν η φωτεινή πηγή δεν είναι μονοχρωματική, τότε κάθε ένα μήκος κύματος θα δίνει διαφορετικές γωνίες μεγίστων έντασης στη σχέση (1). Θα έχουμε δηλαδή

$$2d \cos\theta_m(\lambda) = m\lambda \quad (2)$$

και τα συστήματα κροσσών διαφορετικών χρωμάτων θα είναι ανεξάρτητα αλλά ομοκύκλια εκτός αν στην πορεία των ακτίνων υπάρχει κάποιο πρισματικό οπτικό στοιχείο οπότε τα συστήματα κροσσών διαφορετικών χρωμάτων θα είναι μετατοπισμένα μεταξύ των.

Τι γίνεται όταν μετακινείται το ένα κάτοπτρο;

Τούτο θα έχει ως αποτέλεσμα, την μεταβολή του d . Εάν το d γίνει πολύ μεγάλο, τυπικά μεγαλύτερο από το μήκος συμφωνίας της πυγής, τότε η ορατότητα των κροσσών συμβολής θα χειροτερεύει, και θα φτάσουμε στο σημείο του να μην διακρίνουμε τα μέγιστα από τα ελάχιστα, δηλαδή θα πάψουμε να έχουμε εκδήλωση του φαινομένου συμβολής. Εδώ, μπορούμε να διακρίνουμε δύο διαφορετικές κατηγορίες πηγών: (1) Εκείνες με μεγάλο μήκος συμφωνίας (l_{coh}), όπως ένα laser He-Ne όπου το επιτρεπόμενο d μπορεί άνετα να υπερβεί τα 10 cm, και (2) εκείνες με μικρό μήκος συμφωνίας, όπως π.χ. ένα λαπτήρας πυρακτώσεως, όπου το l_{coh} δεν υπερβαίνει τα μερικά mm. Αν τώρα έχουμε περίπου μονοχρωματικό φως, και το M_2 κινείται προς το M_1 , το d ελαττώνεται και συνεπώς το $\cos\theta_m(\lambda)$ μεγαλώνει, και άρα οι γωνίες $\theta_m(\lambda)$ μικραίνουν (για δοσμένο λ) οδεύουσες προς το κέντρο (εξαφάνιση κροσσών). Σε αντίθετη περίπτωση (d μεγαλώνει) θα οδεύουν απομακρυνόμενες από το κέντρο (δημιουργία νέων κροσσών). Όταν το d γίνει πάρα πολύ μικρό, τότε ο

κροσσός κοντά στο κέντρο γίνεται τόσο διευρημένος ώστε να καλύπτει με ομοιόμορφο τρόπο όλο το οπτικό πεδίο. Παρατηρείστε πως για τον κεντρικό σκοτεινό κροσσό για τον οποίο $\theta_m=0$ στην Εξ. (1), έχουμε:

$$2d = m_0 \lambda_0$$

Η κεντρική περιοχή μπορεί να αντιστοιχεί ούτε σε μέγιστο ούτε σε ελάχιστο. Αν τώρα το d είναι πολύ μεγάλο, π.χ., $d=10$ cm, για $\lambda_0=500$ nm, μπορεί να έχουμε $m_0 \approx 400\,000$.

Ετσι, για εξαιρετικά μεγάλη αλλά δοσμένη τιμή του d μπορούμε να έχουμε:

$$2d \cos\theta_1 = (m_0 - 1) \lambda_0$$

για τον επόμενο κροσσό

$$2d \cos\theta_2 = (m_0 - 2) \lambda_0$$

για τον μεθεπόμενο

$$2d \cos\theta_3 = (m_0 - 3) \lambda_0$$

κλπ. $2d \cos\theta_p = (m_0 - p) \lambda_0$ (3)

Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) και (3) παίρνουμε τότε

$$2d(1 - \cos\theta_p) = p \lambda_0 \quad (4)$$

Αν τώρα, $m \equiv m_0 - p$, Και η (4) δίνει:

Αν το p είναι πολύ μικρό, και $\cos\theta_p = 1 - \theta_p^2/2$

τότε η Εξ. (4) δίνει

$$d \theta_p^2 = p \lambda_0$$

$$\text{και } \theta_p = (p \lambda_0 / d)^{1/2}$$

$$\text{ή } \theta_m = (p \lambda_0 / d)^{1/2} = [(m_0 - m) \lambda_0 / d]^{1/2}$$

όπου

$$\theta_m \equiv \theta_p$$

203

The Michelson interferometer historically has had a number of important uses.

The

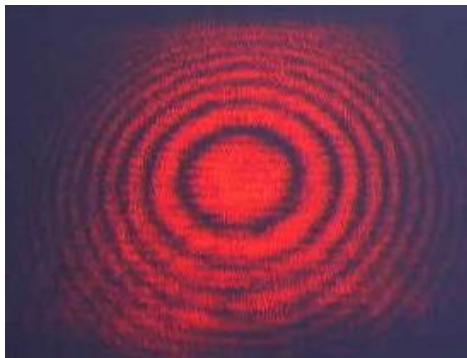
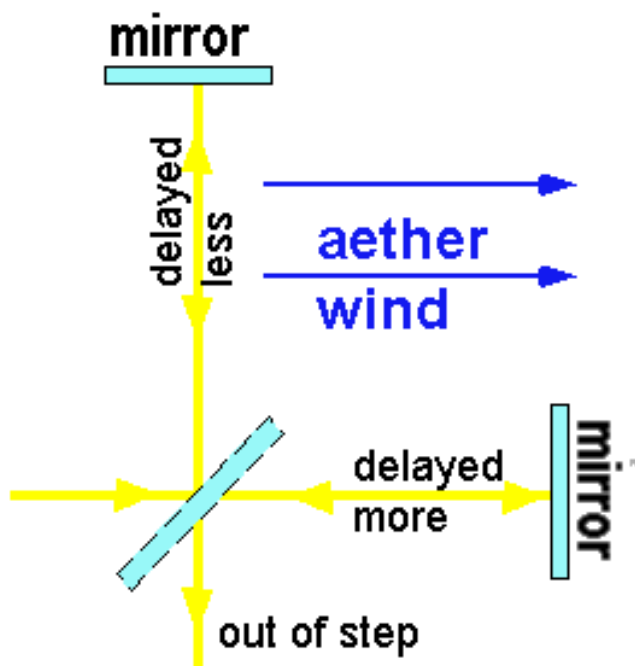
most acclaimed is its use in the Michelson-Morley experiment which attempted to detect the motion of the Earth in the hypothetical 'ether'.

Another, more signi.cant, use is the application of the Michelson interferometer to study the fine structure of spectral lines. To properly understand this application, one must know some coherence theory; for now, we simply note that the interference pattern (7.33) depends on the wavelength of light.

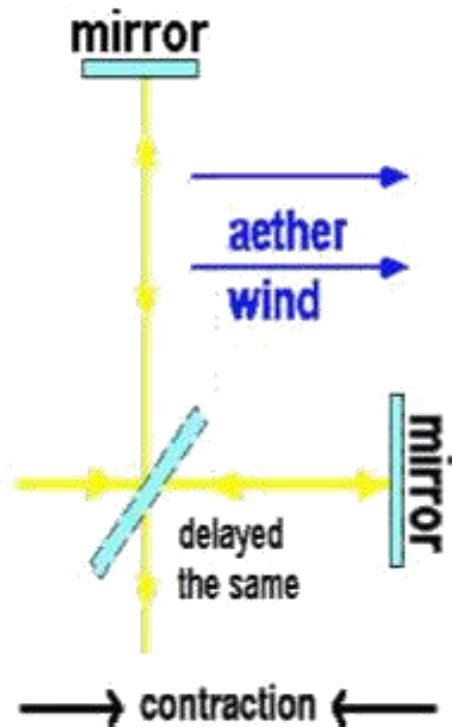
In concluding, it is to be noted that this interferometer introduces a path length difference between the its two arms; because this difference is in the direction

of motion, it is equivalent to introducing a time difference between the two beams.

204



Συστολή των Lorentz Fitzerald:



205

Μάθημα 24^ο : 22 12 2005

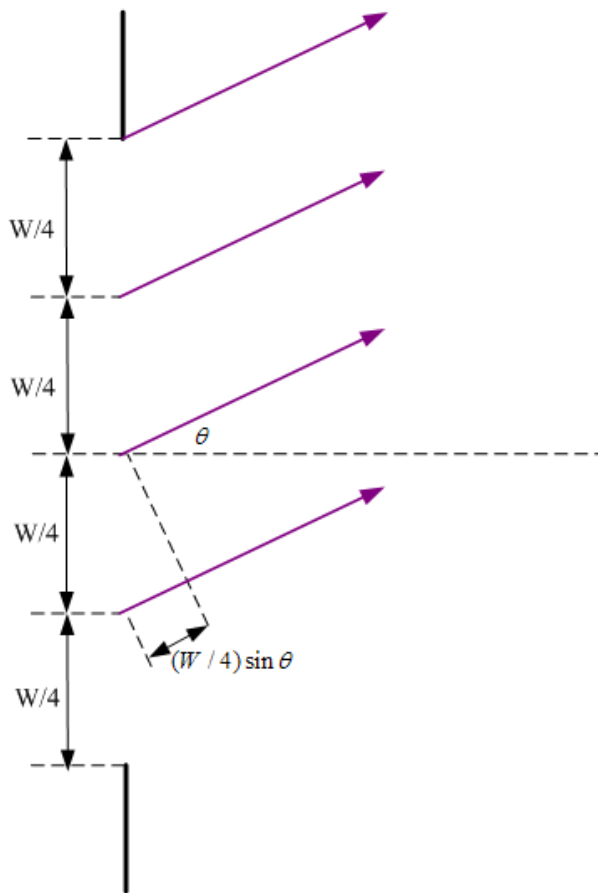
Περιλαμβάνει:

1. Πολλαπλή συμβολή από συστήματα κεραιών
2. Περίθλαση Fraunhofer
3. Διακριτική ικανότητα συμβολομέτρου Fabry –Perot
4. Πίεση ακτινοβολίας
5. Συνθετη αντίσταση H/M κυμάτων
6. Εξισώσεις Fresnel (αρχείο Optics109FresnelEqns.ppt)
7. Κυματοδηγοί

1. Πολλαπλή συμβολή από συστήματα κεραιών

Εχουμε παρουσιάσει αρκετές φορές το πρόβλημα της επαλληλίας η το πλήθος αρμονικών κυμάτων που διαφέρουν κατά μία σταθερή διαφορά φάσης. Στην περίπτωση ενός συστήματος κεραιών που είναι γραμμικά τοποθετημένες , όπως στο

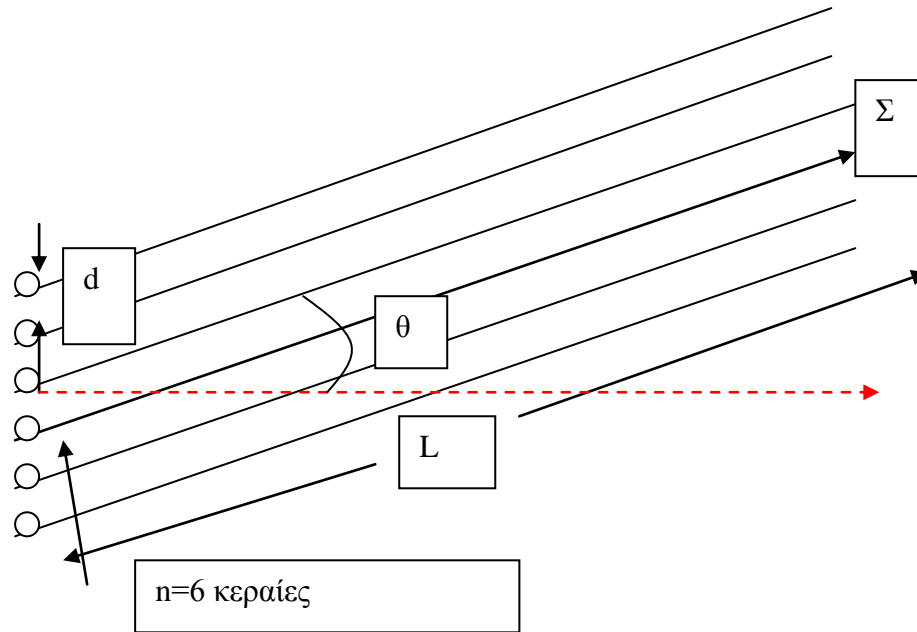
παρακάτω σχήμα όπου έχουμε γραμμική διάταξη 4 κεραιών, έκαστη των οποίων εκπέμπει σφαιρικά κύματα, τα οποία θα δείξουμε στο μεθεπόμενο σχήμα Β.



206

Σχήμα Α. Σύστημα 4 κεραιών που ακτινοβολούν προς όλες τις κατευθύνσεις, αλλά εμείς θεωρούμε την ακτινοβολή προς συγκεκριμένη κατεύθυνση.

Μολονότι λοιπόν κάθε κεραία στέλνει ένα διαδοχικό σύνολο από ημικυκλικά μέτωπα κυμάτων (Σχήμα Α), εμείς μπορούμε να θεωρήσουμε πρόσθεση (επαλληλία των κυματικών κινήσεων σε ένα σημείο παρατηρήσης Σ, Σχήμα Γ)



Φαίνεται, οξύμωρο να συναντώνται στο σημείο Σ οι ακτινοβολίες, αλλά τούτο μπορεί να φαντασθούμε ότι συμβαίνει αν η απόσταση του Σ από τις κεραίες είναι πολύ μεγαλύτερη του μήκους της διάταξης των κεραιών, δηλαδή $n d \ll L$. Στην περίπτωση αυτή, η διαφορά φάσης διαδοχικών κεραιών, λόγω διαφοράς δρόμου είναι ίση με:

$$k d \sin\theta = (2\pi/\lambda) d \sin\theta = \varphi$$

Συνεπώς, το συνολικό κύμα έχει διαταραχή:

$$\psi_{ολ} = \sum_{i=1}^n A \cos(\omega t - kr + (i-1)\varphi)$$

Η άθροιση αυτή έχει γίνει επανειλημμένως και δίνει:

Ένα οδεύων κύμα ίδιας συχνότητας με πλάτος, $A_{ολ}$

$$A_{ολ} = A \left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta} \right)$$

$$\text{όπου } \beta = (\pi/\lambda) d \sin\theta$$

Συνεπώς, η ένταση της που είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους :

$$I = I_s (\sin n\beta / \sin \beta)^2 \quad (1)$$

Στο σημείο αυτό, μπορούμε να δούμε ένα αρμονικό κύμα υπό την μιγαδική του μορφή:

$$\psi = A e^{i(\omega t - kx)} = A e^{i\varphi}$$

Η ένταση είναι ανάλογη του:

Τετραγώνου του πλάτους. Αυτό δίνεται από:

$$\psi \psi^* = A e^{i\varphi} (A e^{i\varphi})^* = A A^* e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = |A|^2$$

Οι ανωτέρω συλλογισμοί εξηγούν γιατί, όταν έχουμε μιγαδική έκφραση έκφραση ενός κύματος, το τετράγωνο του πλάτους του ισοδυναμεί με $A A^*$

208

Θέσεις μεγίστων:

Όταν $d \sin \theta = n \lambda$, όπου $n=0,1,2,\dots$

τότε

$$\psi_{\text{ολ}} = \sum_{i=1}^n A \cos(\omega t - kr + (i-1)\varphi) = n A \cos(\omega t - kr)$$

και συνεπώς,

$$I_{\text{ολ}} = n^2 I_s,$$

όπου I_s η ένταση που οφείλεται σε μία μόνο πηγή.

Τι γίνεται σε ενδιάμεσες τιμές της διαφοράς φάσης;

Ανάμεσα στα ως άνω κύρια μέγιστα (σε γωνίες θ_n όπου $d \sin \theta_n = n \lambda$), έχουμε (ανάμεσα σε 2 διαδοχικά κύρια μέγιστα) $n-1$ τοπικά μέγιστα, πολύ μικρότερης έντασης, και ανάμεσα σε αυτά έχουμε αντίστοιχα ελάχιστα με μηδενισμό της έντασης. Στις θέσεις των ελαχίστων, ο αριθμητής της σχέσης (1) γίνεται μηδέν, ενώ ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Τούτο συμβαίνει όταν:

$$n d \sin \theta = m \lambda, \text{ με } m = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

Τα $n-2$ τοπικά, δευτερεύοντα μέγιστα που υπάρχουν ανάμεσα στα κύρια μέγιστα έχουν πολύ μικρότερες εντάσεις, επειδή κανένα δεν περιέχει τον όρο n^2 .

Το αποτέλεσμα φαίνεται σε γραφική παράσταση για διάφορες τιμές του n .

209

Σχήμα : Ένταση της ακτινοβολίας εκ συμβολής συναρτήσει του $d \sin\theta$

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της εξάρτησης αυτής της έντασης από τη γωνία θα μελετηθεί στην πραγματική του διάσταση σε λίγο όταν μελετούμε το θέμα της συμβολής από πολλές πηγές με πεπερασμένες διαστάσεις. Επί του παρόντος, θεωρούμε το παράδειγμα συμβολής από πολλές σχισμές, όπου η ακτινοβολία προέρχεται από την πρόσπτωση ενός επιπέδου κύματος κάθετα προς ένα πέτασμα που φέρει μία γραμμική συστοιχία με σχισμές σε ίση απόσταση. Το αποτέλεσμα μπορούμε να το προβλέψουμε με βάση την αρχή των Huygens –Fresnel : Σύμφωνα με αυτό, σε έκαστη σχισμή δημιουργείται δευτερογενής πηγή κυμάτων της ίδιας κυκλικής συχνότητας με εκείνη του προσπίπτοντος κύματος. Έτσι, το πρόβλημα ουσιαστικά ανάγεται σε εκείνο που ήδη μελετήσαμε: των n το πλήθος σύμφωνων κεραιών σε γραμμική διάταξη.

Πρόβλημα:

Για δεδομένα, N (αριθμός κεραιών), d απόσταση διαδοχικών κεραιών, και λ , να βρείτε πόση είναι η μεγαλύτερη τάξη επιτρεπομένου κροσσού.

Λυση:

Είναι:

$$d \sin\theta_m = m \lambda$$

η συνθήκη κυρίως μεγίστων

Από αυτήν προκύπτει:

$$\sin\theta_m = m \lambda/d$$

Πρέπει, να είναι

$$|\sin\theta_m| = |m \lambda/d| < 1, \text{ άρα } m < = d/\lambda$$

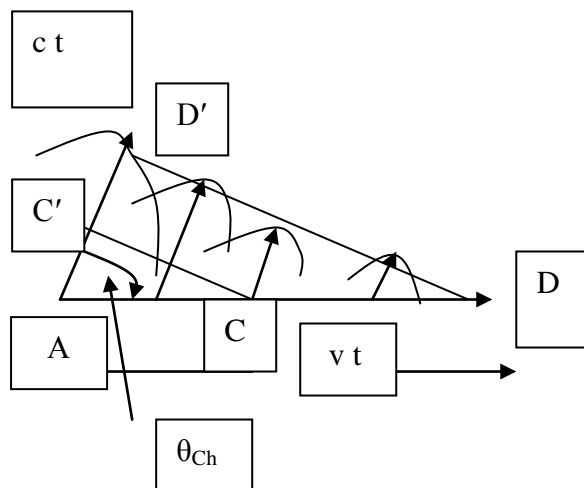
Ετσι, αν π.χ. , $d=2 \mu\text{m}$, και $\lambda= 0.5 \mu\text{m}$, $m < = 4$

Αν, όμως $d= 20 \mu\text{m}$, τότε $m < = 40$. Επειδή , όμως υπάρχουν και οι αρνητικές τιμές του m , και η $m=0$, άρα θα έχουμε μέγιστο αριθμό κεντρικών κροσσών ίσο με 81.

Εφαρμογές της αρχής των Huygens-Fresnel στην ερμηνεία διαφόρων φαινομένων- Ακτινοβολία Cherenkov:

Ας προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε την εκπομπή ακτινοβολίας Cherenkov από φορτισμένο ηλεκτρικά σωματίδιο που κινείται εντός ενός μέσου με ταχύτητα $v > c$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο μέσον.

210



Αν θεωρήσουμε πως σε κάθε σημείο της τροχιάς του, το σωματίδιο εκπέμπει, λόγω πόλωσης των γειτονικών ατόμων και επακόλουθης αποπόλωσης, ακτινοβολία. Η γωνιακή κατεύθυνση της βρίσκεται ως εξής.

Το μέτωπο κύματος που δημιουργείται στο σημείο A διανύει διάστημα ίσο με ct όταν ήδη το σώμα έχει διανύσει διάστημα vt , όπως στο Σχήμα, όπου βλέπουμε και τα μέτωπα κύματος που δημιουργήθηκαν από άλλες ενδιάμεσες θέσεις του σωματιδίου. Από το ορθογώνιο τρίγωνο προκύπτει"

$$\cos\theta_{Ch} = ct/vt = c/v = (c/c_0)(c_0/v) = \frac{c_0/v}{n\beta}$$

όπου $\beta = v/c_0$, c_0 η ταχύτητα φωτός στο κενό, και $n = c_0/c$ ο δείκτης διάθλασης στο μέσον. Αν το $v < c$, τότε όπως μπορεί να φανεί αν κατασκευάσουμε το αντίστοιχο σχήμα, δεν μπορούν οι διαταραχές που θα εγεννώντο σε διαδοχικές θέσεις του σωματιδίου να δημιουργήσουν ένα ανάλογο μέτωπο κύματος με γωνία θ_{Ch} . Έτσι, δεν εκπέμπεται ακτινοβολία Τσερένκοφ αφού θα ήταν $\cos\theta_{Ch} > 1$.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την εφαρμογή της αρχής των Huygens-Fresnel, μπορούμε να πούμε πως το μέτωπο κύματος $D' D$ παράγεται με εφαρμογή της αρχής των Huygens-Fresnel, από το μέτωπο κύματος (προηγούμενο χρονικά) $C' C$. Το $D' D$ έχει μεγαλύτερο μήκος γιατί στο $C' C$, το σωματίδιο έχει μόλις φτάσει στο C' . Η

Βιβλιογραφική αναφορά σχετική με συστοιχία κεραιών:

-
1. http://emclab.concordia.ca/~trueman/elec456/ANT_Lecture16w.pdf
 2. http://35.9.69.219/home/modules/pdf_modules/m231.pdf
-

Κεφάλαιο 12

Περίθλαση

Σαν πρώτο παράδειγμα περίθλασης ας θεωρήσουμε ορθογώνια σχισμή μικρού πλάτους και μεγάλου μήκους D , έτσι ώστε να μπορούμε να αγνοήσουμε τα φαινόμενα που συμβαίνουν στα άκρα.

Ιδείτε τότε την εικόνα που προκύπτει με την εφαρμογή της αρχής του Huygens (Σχήμα 23-3)

Για τον υπολογισμό, θεωρούμε πως το αποτέλεσμα της περίθλασης είναι όμοιο με εκείνο ενός n το πλήθος κεραιών (πηγών) που βρίσκονται σε ισαπέχουσες αποστάσεις Δb , και είναι $n \Delta b = D$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης περίπτωσης, στη εξίσωση (α). Για την εφαρμογή, θεωρούμε πως το Δb γίνεται πολύ μικρό ενώ το n γίνεται πολύ μεγάλο και τείνει προς το άπειρο. Στην περίπτωση αυτή, το αποτέλεσμα της έντασης είναι:

212

$$I = I_0 \text{sinc}^2 u, \quad (4)$$

Όπου η συνάρτηση $\text{sinc } u \equiv \sin u / u$, και στην περίπτωση μας το $u = (\pi/\lambda) D \sin \theta$, ενώ το I_0 είναι παράγων κανονικοποίησης, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $I(\theta)$ για θ στο διάστημα $-\pi/2$ ως $\pi/2$ να δίνει την συνολική ισχύ που εκπέμπεται. Η όλη συζήτηση, προϋποθέτει πως τα σημεία όπου παρατηρούμε το αποτέλεσμα της περίθλασης, απέχουν απόσταση L από την σχισμή μεγάλου μήκους D , και επίσης, $L \gg \lambda$. Στην περίπτωση αυτής της περίθλασης, τα κύματα στο σημείο παρατήρησης είναι κατά πολύ καλή προσέγγιση επίπεδα. Ο τύπος αυτός περίθλασης είναι γνωστός ως *Περίθλαση Fraunhofer*. Στην περίπτωση όπου το L είναι συγκρίσιμο σε μέγεθος με το D , το εύρος της σχισμής, τότε τα μέτωπα κύματος που φτάνουν στο σημείο παρατήρησης διατηρούν την καμπυλότητα τους. Ο τύπος αυτός της περίθλασης είναι γνωστός ως *Περίθλαση Fresnel*.

Ας δούμε τις μαθηματικές ιδιότητες της συνάρτησης (4). Πρώτον, μπορούμε να βρούμε τις θέσεις ελαχίστου της έντασης: Η συνθήκη προς τούτο είναι:

$$(\pi/\lambda) D \sin \theta = \pm m \pi, \quad m=1,2,3,\dots$$

Το πρώτο ελάχιστο είναι για: $D \sin \theta = \pm \lambda$

Τι συμβαίνει για $m=0$;

Τότε και ο αριθμητής και ο παρονομαστής της έκφρασης (4) μηδενίζεται, αφού $\sin u \rightarrow u$ για $u \rightarrow 0$, και έτσι αποδεικνύεται πως $I(\theta=0) = I_0$.

Για την περίπτωση που η γωνία του πρώτου μηδενισμού είναι πολύ μικρή, τότε:

$$\theta_{\min} \approx \sin \theta_{\min} = \lambda/D \quad (5)$$

Μπορούμε εύκολα να βρούμε το γωνιακό εύρος του κεντρικού μεγίστου. Αυτό από την Εξ. (5) είναι

$$\Delta\theta \approx \lambda/D \quad (6)$$

Η σχέση (6) είναι κεφαλαιώδους σημασίας για την οπτική! Μας λέει πως μία δέσμη φωτός εκτρέπεται από μία σχισμή εύρους D , με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να καθορίσουμε τη θέση της σχισμής με απόλυτη ακρίβεια. Έτσι, αν η αβεβαιότητα D της σχισμής θέλουμε να μικρύνει, τότε και θέσουμε μία νέα σχισμή $D' = D/10$, τότε έχουμε

$\Delta\theta' = 10 \Delta\theta$. Έτσι, η δέσμη μας διαχέεται σε με μεγάλη γωνιακή εκτροπή.

Θέσεις των τοπικών μεγίστων:

Αυτές μπορούν να προκύψουν αν γράψουμε τη συνθήκη

$$dI/du=0, \text{ ή}$$

$$d(I_0 \text{sinc}^2 u)/du=0$$

→

$$\frac{\cos u}{u} - \frac{\sin u}{u^2} = 0$$

που οδηγεί στη συνθήκη $\tan u = u$, δηλαδή μία υπερβατική εξίσωση. Οι ρίζες της είναι κατά καλή προσέγγιση

$u = \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \pm 7\pi/2, \text{ κλπ}$, και κατά συνέπεια, το I/I_0 παίρνει, για τις τιμές αυτές του u , τις τιμές που δίνονται στον πίνακα

u	$\text{sinc}^2 u$	-----
0	1	1
$3\pi/2$	$4/(9\pi^2)$	1/22.2
$5\pi/2$	$4/(25\pi^2)$	1/61.7
$7\pi/2$	$4/(49\pi^2)$	1/121

Τα ως άνω αποτελέσματα δείχνουν πως ο κεντρικός κροσσός περιέχει πολύ μεγάλο ποσοστό της εξερχόμενης ισχύος από τη σχισμή.

Συμβολή με περίθλαση από n πανομοιότυπες σχισμές

Στην περίπτωση αυτή, υποθέτουμε (κάτι που προφανώς πάντα συμβαίνει!!!) ότι οι σχισμές έχουν πεπερασμένο εύρος. Δεχόμαστε πως το εύρος αυτό είναι το ίδιο για όλες τις σχισμές, και αναρωτιώμαστε ποια θα είναι τώρα η κατανομή της έντασης σε ένα σύστημα αυτού του είδους. Κάθε πηγή μας δίνει τότε μία κατανομή έντασης της μορφής

$I_s = I_0 \text{sinc}^2 u$, δηλαδή μία εικόνα περίθλασης.

Ωστόσο, λόγω του ότι έχουμε ένα σύστημα από n ισαπέχουσες σχισμές, αυτές δίνουν και μία εικόνα συμβολής (πολλαπλής) της μορφής

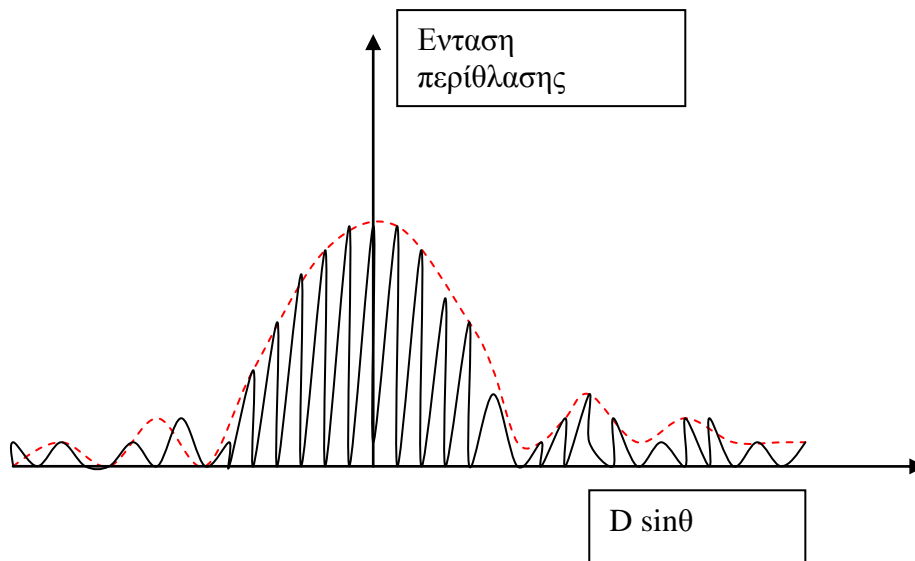
$$I = I_s \frac{\sin^2 n\beta}{\sin^2 \beta}$$

μόνο που στην τελευταία, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη το αποτέλεσμα της προηγούμενης σχέσης και έτσι θα έχουμε:

214

$$I = \text{sinc}^2 u \frac{\sin^2 n\beta}{\sin^2 \beta}$$

Η γραφική παράσταση της ως άνω έκφρασης χαρακτηρίζεται από τα μέγιστα της περίθλασης, σε μεγάλες γωνιακές αποστάσεις, και τα μέγιστα της συμβολής σε μικρότερες εν γένει γωνιακές αποστάσεις.



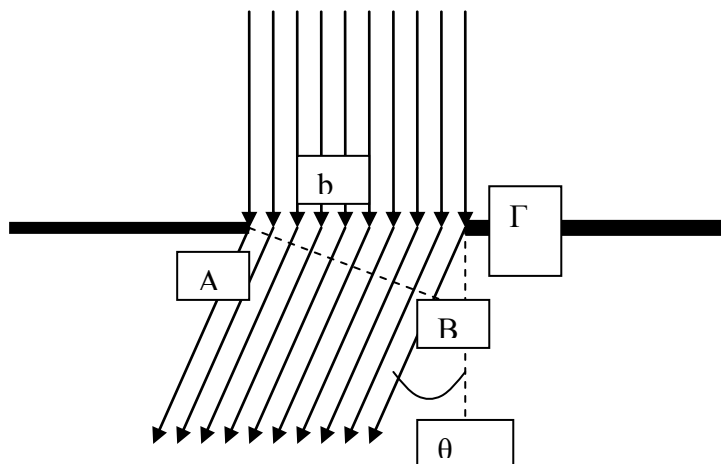
Ελλείπουσες τάξεις κροσσών:

215

Παρατηρούμε, ως αναμένεται από την περίθλαση, πως στις θέσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$D \sin\theta = m \lambda$$

Έχουμε μηδενισμό της συνολικής έντασης. Είναι δυνατόν, για $m=1$, να συμπίπτει ένα μέγιστο ενός από τους κροσσούς συμβολής με τον μηδενισμό (πρώτης τάξης) της εικόνας περίθλασης. Αυτό μπορεί να εμφανισθεί σε οπτικά φράγματα όπως θα δούμε παρα κάτω.



Από το τρίγωνο ABΓ προκύπτει $b \sin\theta = n \lambda$, που είναι η συνθήκη ~~ενισχυτικής~~ καταστρεπτικής συμβολής προς την κατεύθυνση θ . Αυτή ισχύει προφανώς για τα κύματα λόγω περίθλασης αφού όπως γνωρίζουμε αυτή περιγράφεται από την συνάρτηση *δειγματοληψίας* (*sinc function*):

$$\text{Sinc } \alpha = \sin \alpha / \alpha$$

$$\text{όπου } \alpha = \pi b \sin \theta / \lambda$$

Αναφορές :

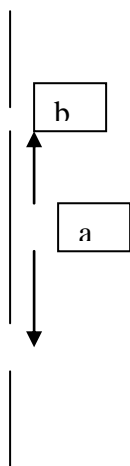
1. Louis de Broglie Nobel Lecture:

<http://nobelprize.org/physics/laureates/1929/broglie-lecture.pdf>

Άσκηση; I -61 Βλασσόπουλου κλπ, σελ. 99

A) Απόσταση, πάνω στην οθόνη, του κεντρικού μεγίστου από τον πρώτο μηδενισμό της έντασης, λόγω συμβολής

216



Η εικόνα συμβολής θα είναι συνέλιξη μίας συνάρτησης της μορφής $\cos(\Delta\phi/2)$ επί την $\text{sinc}(\Phi/2)$, όπου $\Phi=2\pi(b/\lambda)\sin\theta$, και $\Delta\phi=2\pi(a/\lambda)\sin\theta$

Σύνολο προβλημάτων διαδικτύου:

1. http://www.pha.jhu.edu/~c171_411/prob7.pdf
2. <http://www.uh.edu/~lwood/HW9FA05.PDF>

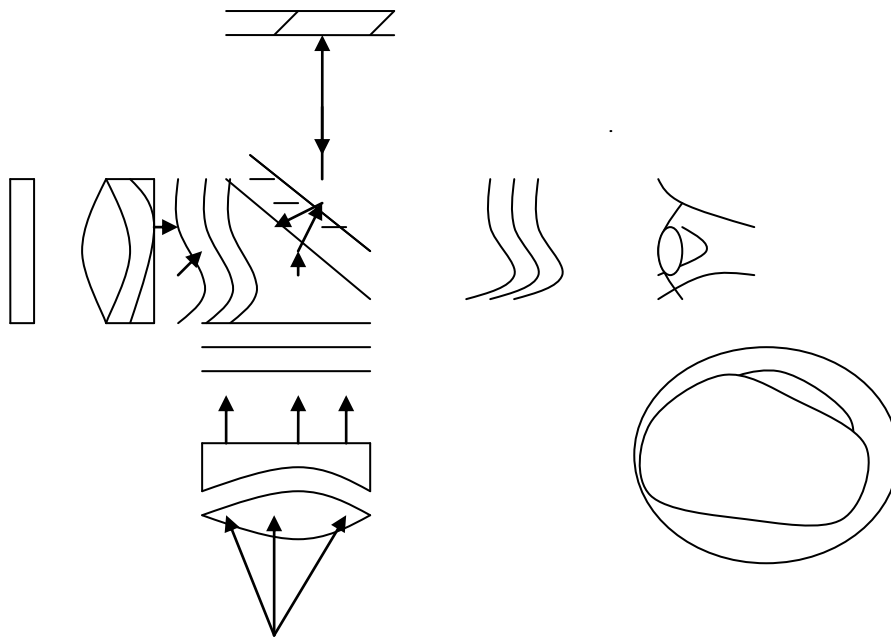
Μάθημα 22 -12 -2005 Τέλος

217

Μάθημα 25^ο : 9-1 -2006 Αρχή

Περιλαμβάνει:

1. **Twyman Green Interferometer**
2. **Fabry-Perot Interferometer resolution. FP Spectroscopy**



218

Μέγιστα στην κατανομή εντασης περίθλασης

Η συνθήκη μεγίστων είναι

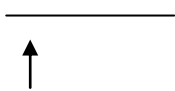
$$\frac{d}{da} \left(\frac{\sin \alpha}{a} \right)^2 = 0$$

και τούτο συμβαίνει όταν $\tan \alpha = a$

Η εξίσωση αυτή λύνεται γραφικά, και προσεγγιστικά δίνει το αποτέλεσμα $\alpha = \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$

Οι αντίστοιχες εντάσεις είναι

.....(να συμπληρωθεί)....
Διπλή σχισμή με πεπερασμένο εύρος σε έκαστη σχισμή (αρχείο chpt4.1Diffraction.ppt)



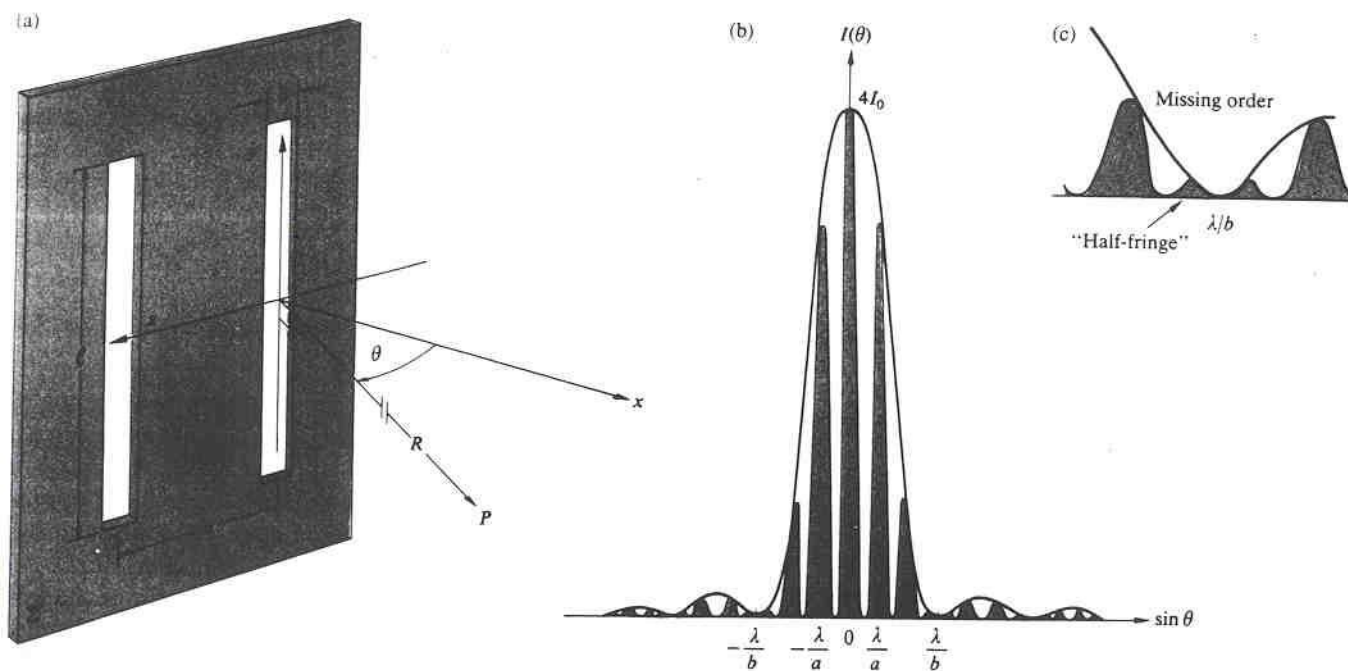
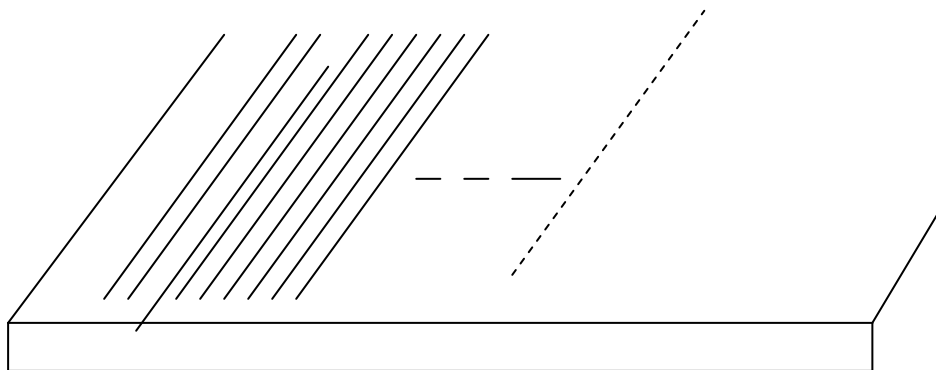


Figure 10.13 (a) Double-slit geometry. Point P on σ is essentially infinitely far away. (b) A double-slit pattern ($a = 3b$).

219

Οπτικά Φράγματα

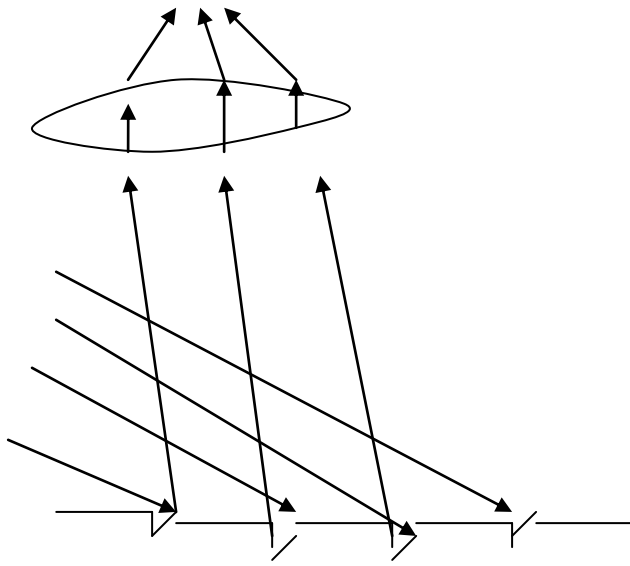
Συχνά, τα φαινόμενα που μόλις συζητήσαμε (που έχουν ευρεία εφαρμογή σε όλα τα είδη κυμάτων) βρίσκουν εφαρμογή στα *οπτικά φράγματα*. Αυτά παράγονται με διάφορους μεθόδους εγχάραξης εγχοπών πάνω στην επιφάνεια ενός διαφανούς υποστρώματος από γυαλί, χαλαζία κλπ (*φράγματα διάδοσης*) ή με εγχάραξη εγχοπών πάνω σε ανακλαστικό υπόστρωμα (*φράγματα ανάκλασης*). Μελετήστε με προσοχή τη σχετική συζήτηση στη σελίδα 370 του Βιβλίου *Φυσική Ταλαντώσεων και Κυμάτων του H.J.Pain*. Στο περιθλαστικό φάσμα μετάδοσης (ή διάδοσης) έχουμε *πολύ μεγάλο αριθμό χαραγών ή εγχοπών ανά μονάδα μήκους* όπως φαίνεται παραστατικά στο Σχήμα:



Σχήμα: Εγκοπές σε γραμμική διάταξη σε φράγμα ανάκλασης

220

Στο φράγμα περίθλασης, στα κύρια μέγιστα, η ένταση είναι N^2 φορές μεγαλύτερη από εκείνη της I_s που αντιστοιχεί από περίθλαση από μία μόνο χαραγή. Σε αυτό το σημείο ίσως ο αναγνώστης παραξενευτεί πως οι εγκοπές προκαλούν περίθλαση; Αυτό που μπορούμε να πούμε είναι πως οι εγκοπές αντιστοιχούν σε μία ασυνέχεια που παρουσιάζεται στη διάδοση του κύματος. Σε έκαστη από τις ασυνέχειες αυτές εφαρμόζεται η αρχή των Huygens-Fresnel και προκύπτουν τα δευτερογενή κύματα (σφαιρικά) των οποίων η επαλληλία δίνει το αποτέλεσμα της περίθλασης. **Αν η προσπίπτουσα στο φράγμα ένταση περιέχει πολλά διαφορετικά μήκη κύματος, τότε οι αντίστοιχες κορυφές, θα κατευθύνονται σε διαφορετικές γωνίες και έτσι μπορούμε να τις διακρίνουμε με ένα κατάλληλο γωνιομετρικό κύκλο (που συχνά είναι εφοδιασμένος με βερνιέρο και μεγενθυτικό φακό).**

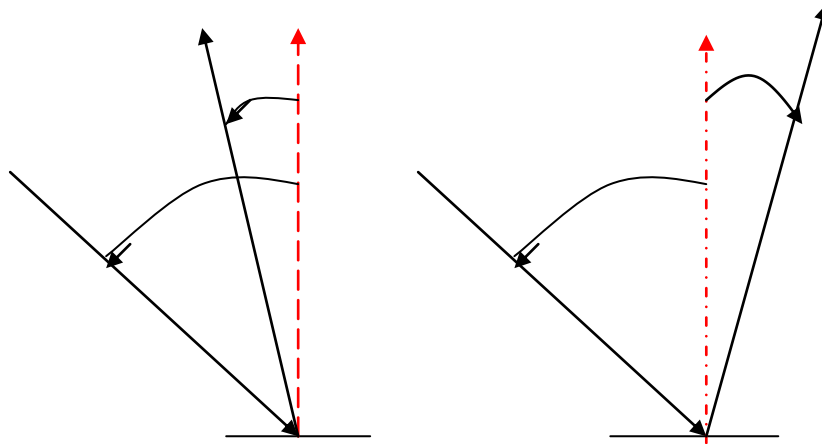


Οπτικό φράγμα ανάκλασης,
και συγκέντρωση
περιθλώμενης δέσμης με
φακό

221

Στην περίπτωση των φραγμάτων ανάκλασης, η σχέση που δίνει τα επιτρεπόμενα κύρια μέγιστα είναι:

$$d (\sin\theta_{in} \pm \sin\theta_{diff}) = m\lambda$$



Σχήμα 23-3

222

Configuration

Alternate High and Low Index

Quarter-Wave Thickness

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -i/n_i \\ in_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Alternating Pair

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_p &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -i/n_h \\ in_h & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -i/n_\ell \\ in_\ell & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -n_\ell/n_h & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -n_h/n_\ell \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Διάνυσμα Poynting (συνεχεια)

Για ένα E/M κύμα που είναι επίπεδο, η ένταση είναι

$$S(z,t) = E B / \mu_0 = E^2 / (\mu_0 c) = E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) / (\mu_0 c)$$

Και

$$\langle S(z,t) \rangle = E_0^2 / (2\mu_0 c) = E_{\text{rms}}^2 / (\mu_0 c)$$

Αν $E_x = E_m \exp(-j\beta z) \hat{a}_x$
Τότε

$$\partial^2 E_x / \partial z^2 = -\mu \epsilon \omega^2 E_x$$

τελικά

$$v_p = \omega / \beta = 1 / (\epsilon \mu)^{1/2}$$

Αναφορές

-<http://www.phys.washington.edu/users/jeff/courses/old/ph545/lectures/030501.pdf>

-Oral Neoplasia Detection using a Michelson...

<http://www.engr.utexas.edu/bme/faculty/richards-kortum/Publications/ddo.pdf>

Παραδείγματα Περίθλασης

Παράδειγμα 1

Μία σχισμή με εύρος a φωτίζεται με λευκό φως. Για ποιά τιμή του a θα πέσει το πρώτο ελάχιστο για το ερυθρό φως ($\lambda = 650 \text{ nm}$) σε $\theta = 30^\circ$;

Λύση

Από τη σχέση $a \sin \theta = m\lambda$, για το πρώτο ελάχιστο παίρνουμε

$$a = \lambda / \sin 30^\circ = 650 \text{ nm} / 0.5 = 1.3 \text{ }\mu\text{m}.$$

Παράδειγμα 2

Στο παράδειγμα 1, ποιό είναι μήκος κύματος λ του φωτός του οποίου το πρώτο μέγιστο περίθλασης (εκτός του κεντρικού μεγίστου) πέφτει στις 30° , και έτσι συμπίπτει με το πρώτο ελάχιστο για το ερυθρό φως;

Λύση

Οι συνθήκες μεγίστου είναι, ότι η γωνία θ αντιστοιχεί στην ενδιάμεση θέση μεταξύ του πρώτου και δεύτερου ελαχίστου τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις

$$a \sin\theta = \lambda$$

και

$$a \sin\theta = 2\lambda$$

δηλαδή

$$a \sin\theta = 1.5 \lambda$$

$$\text{Άρα, } \lambda = a \sin \theta / 1.5 = 1.3 \mu\text{m} * 0.5 / 1.5 = 0.43 \mu\text{m} = 4300 \text{ Angstroms}$$

Το χρώμα αυτό αντιστοιχεί στο ιώδες. Το δεύτερο μέγιστο στα 4300 Angstroms θα συμπίπτει **πάντοτε** με το πρώτο ελάχιστο σε μήκος κύματος 6500 Angstroms ανεξάρτητα από το εύρος της σχισμής. Αν η σχισμή είναι σχετικά στενή, τότε η γωνία θ στην οποία θα γίνεται η σύμπτωση θα είναι σχετικώς μεγάλη.

Παράδειγμα 3 Εντάσεις των δευτερευόντων μεγίστων περίθλασης. Να βρείτε, προσεγγιστικά, τις σχετικές εντάσεις των δευτερευόντων μεγίστων στην περίπτωση της εικόνας συμβολής Fraunhofer από μία λεπτή σχισμή

Λύση

224

Τα μέγιστα αντιστοιχούν σε θέσεις ενδιάμεσες μεταξύ διαδοχικών ελαχίστων, δηλαδή,

$$a \approx (m + 1/2) \pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Βάζοντας στη σχέση (2) την τιμή της γωνίας α , προκύπτει

$$I_{\text{μεγ}(m)} = I_0 / [(m + 0.5)^2 \pi^2]$$

Άρα οι εντάσεις των δευτερευόντων μεγίστων είναι $0.045 I_0$, $0.016 I_0$, $0.0083 I_0$ κλπ

Παράδειγμα 4 Εύρος του κεντρικού μεγίστου

Η συνθήκη εδώ είναι

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right)^2$$

Αυτή η σχέση λύνεται γραφικά και δίνει για το α την τιμή 1.40 radian.

$$\alpha = (\pi a / \lambda) \sin\theta = 80^\circ$$

και άρα,

$\sin\theta = \alpha / [(\pi a/\lambda)]$, και για $a/\lambda=6$ μπορούμε να βρούμε το θ :

$$\sin\theta = 1.40 / (6 * 3.14159) = 0.074 = 4.35^\circ$$

Ετσι, το εύρος θα είναι, $\Delta\theta = 8.7^\circ$.

Άσκηση 5 Το εύρος του κεντρικού κροσσού σε μία εικόνα συμβολής μιας μονής σχισμής μπορεί να χαρακτηριστεί με δύο τρόπους (α) την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών γωνιών εκατέρωθεν του μεγίστου αυτού, και (β) την απόσταση μεταξύ δύο γωνιακών θέσεων, εκατέρωθεν του κεντρικού κροσσού, όπου η έντασεις είναι τα 50% της έντασης στο μέγιστο του κεντρικού κροσσού. Συγκρίνετε τα δύο αυτά μεγέθη μεταξύ των.

Περίθλαση κυκλικών διαφραγμάτων

Η ανάλυση δείχνει ότι το πρώτο ελάχιστο της εικόνας περίθλασης από ένα κυκλικό διάφραγμα συμβαίνει όταν η γωνία θ ικανοποιεί τη σχέση

$$\sin\theta = 1.22 \lambda/d,$$

όπου d η διάμετρος του διαφράγματος. Η σχέση αυτή πρέπει εδώ να συγκριθεί με την σχέση $\sin\theta = \lambda/a$, για μία σχισμή εύρους a . Ο παράγων 1.22 προκύπτει από την μαθηματική ανάλυση όταν ολοκληρώνουμε πάνω σε όλους τους στοιχειώδεις ακτινοβολητές που θεωρούμε, σύμφωνα με την αρχή του Χιούγκενς, ότι βρίσκονται πάνω στο διάφραγμα.

225

Το Διαστημικό Τηλεσκόπιο Hubble

Εκτοξεύθηκε το 1990 ώστε να δώσει ευκρινείς εικόνες άστρων, πλανητών και γαλαξιών. Η θέση του εκτός της γήινης ατμόσφαιρας επιτρέπει την καταγραφή υπεριώδους και υπέρυθρης ακτινοβολίας και έτσι διευρύνει το **φασματικό παράθυρο παρατήρησης**. Αποφεύγονται έτσι και οι ανώμαλες μεταβολές του δείκτη διάθλασης που γενικά προκαλούν χειροτέρευση της εικόνας (Αγγλικά αυτό λεγεται "seeing").

Με εφαρμογή της θεωρίας περίθλασης μπορούμε να βρούμε την γωνιακή διακριτική ικανότητα του τηλεσκοπίου. Επειδή το τηλεσκόπιο παρουσιάζεται με κυκλικό διάφραγμα, θα έχουμε μία εικόνα Airy, Σε αυτή την περίπτωση, η ανάλυση του φαινομένου δίνει ότι το πρώτο ελάχιστο βρίσκεται από τον τύπο

$$\sin\theta = 1.22 \lambda/d$$

όπου d η διάμετρος του τηλεσκοπίου . Αν είναι στο τηλεσκόπιο αυτό $d=2.4 \text{ m}$, τότε θα είναι $\theta \approx 0.630 \times 10^{-6} \text{ m} / 2.4 \text{ m} = 0.262 \times 10^{-6} \text{ rad} = 0.262 \times 10^{-6} \times 180 / \pi \times (3600) \text{ arcsec} = 0.055 \text{ arcsec}$! Αυτή είναι περίπου 10 φορές καλύτερη ακρίβεια από τηλεσκόπια στο έδαφος όταν δεν χρησιμοποιούν τεχνικές της adaptive-optics .

(**Λείπει Σχήμα****)**

Κριτήριο Ράιλει

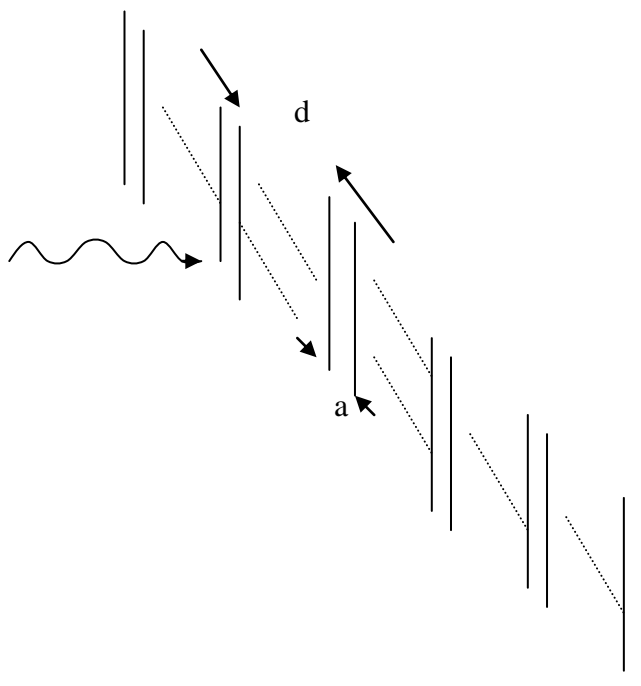
Οι τρεις διαδοχικές αυτές εικόνες δείχνουν δύο πηγές φωτός που οι ακτίνες τους υφίστανται περίθλαση καθώς περνούν μέσα από π.χ. το άνοιγμα ενός τηλεσκοπίου, ενός μικροσκοπίου κλπ. Αυτό το άνοιγμα προφανώς προκαλεί κάποια περίθλαση, και αν αυτό είναι κυκλικό (έχετε δει πολλά οπτικά όργανα που δεν έχουν κυκλική διατομή;) τότε εμφανίζεται ο κύκλος (περίθλασης) του Airy. Η γωνία θ για το FWHM του κυρίως μεγίστου είναι $\approx \lambda / D$, και έτσι γίνεται μεγάλη μόνο όταν το D γίνει πολύ μικρό, δηλαδή συγκρίσιμο ή μικρότερο του λ .

Αν ένα οπτικό όργανο όπως ένα κατοπτρικό τηλεσκόπιο φέρει αντί ενός ανοίγματος αρκετά τεμάχια όπως το τηλεσκόπιο Keck στη Χαβάι, τότε τα φαινόμενα περίθλασης ελαττώνονται διότι η ελάχιστη γωνία που μπορεί να αναλυθεί προσδιορίζεται από την *συμβολή* μεταξύ των τμημάτων του τηλεσκοπίου που απέχουν την μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των.

Εύρος σχισμής και εικόνες φραγμάτων περίθλασης

Ας συνεχίσουμε τώρα την γενικότερη ερώτηση που αφήσαμε σε προηγούμενη συζήτηση, και που αφορά το φαινόμενο της συμβολής από δύο ή περισσότερες σχισμές οι οποίες δέχονται ένα μονοχρωματικό κύμα, με διάνυσμα k κάθετο προς την γραμμική διάταξη των σχισμών. Ταυτόχρονα όμως δεχόμαστε πως κάθε σχισμή έχει ένα πεπερασμένο εύρος, πράγμα που *αμελήσαμε* στην πρώτη συζήτηση του πειράματος του Γιάνγκ και της πολλαπλής συμβολής. Το σχήμα που θεωρούμε είναι ως εξής

226



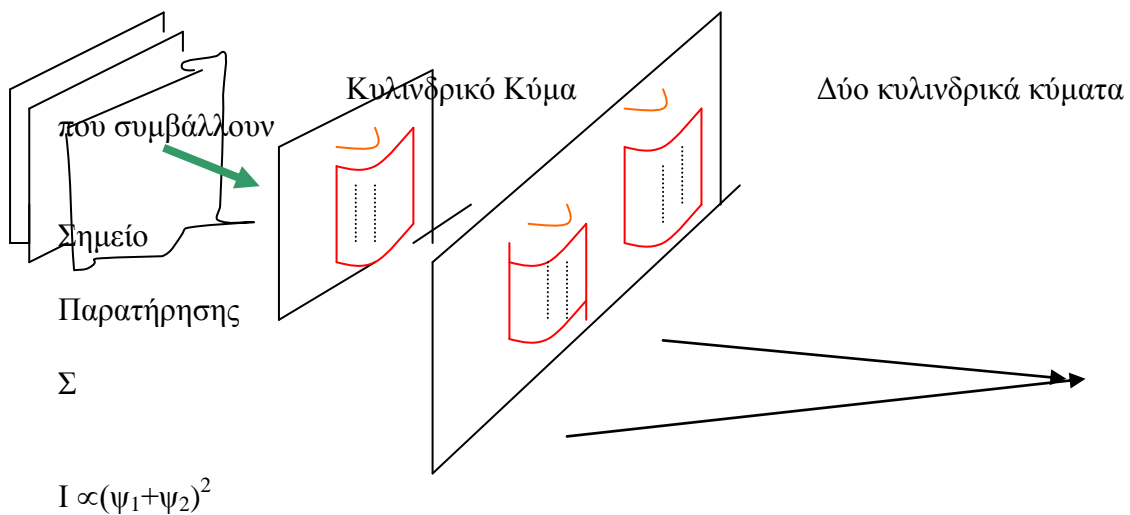
Αν λοιπόν d είναι η απόσταση μεταξύ των σχισμών, και a το εύρος έκαστης σχισμής, όπως αποδεικνύεται η ολική ένταση στην περίπτωση Φραουχόφερ είναι

$$I = I_{\text{πολλαπλή Ιμονής σχισμής}} = I_{\text{μεγ}} \left[\frac{\sin(N\beta)}{\sin(\beta)} \right]^2 \left[\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right]^2$$

όπου $\beta = \pi d \sin\theta/\lambda$ και $\alpha = \pi a \sin\theta/\lambda$.

Για την κατανόηση και καλύτερη εποπτεία του πειράματος του Γιάνγκ βλεπετε το παρακάτω σχήμα

227



Σχήμα. Για την κατανόηση του φαινομένου συμβολής στο πείραμα του Young. Από τις δύο σχισμές παράγονται *κυλινδρικά κύματα* που διαδίδονται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

Επειδή όσο μεγαλώνει η απόσταση από τις δύο πηγές η συνολική ενέργεια ή η ροή ενέργειας περνάει μέσα από μεγαλύτερη περιφέρεια, να δεχθούμε τη διατήρηση της ενέργειας, θα έχουμε για δύο θέσεις σε αποστάσεις r_1 και r_2

$$I_{r_1} (2\pi r_1) L = I_{r_2} (2\pi r_2) L, \text{ όπου } L \text{ το μήκος των σχισμών.}$$

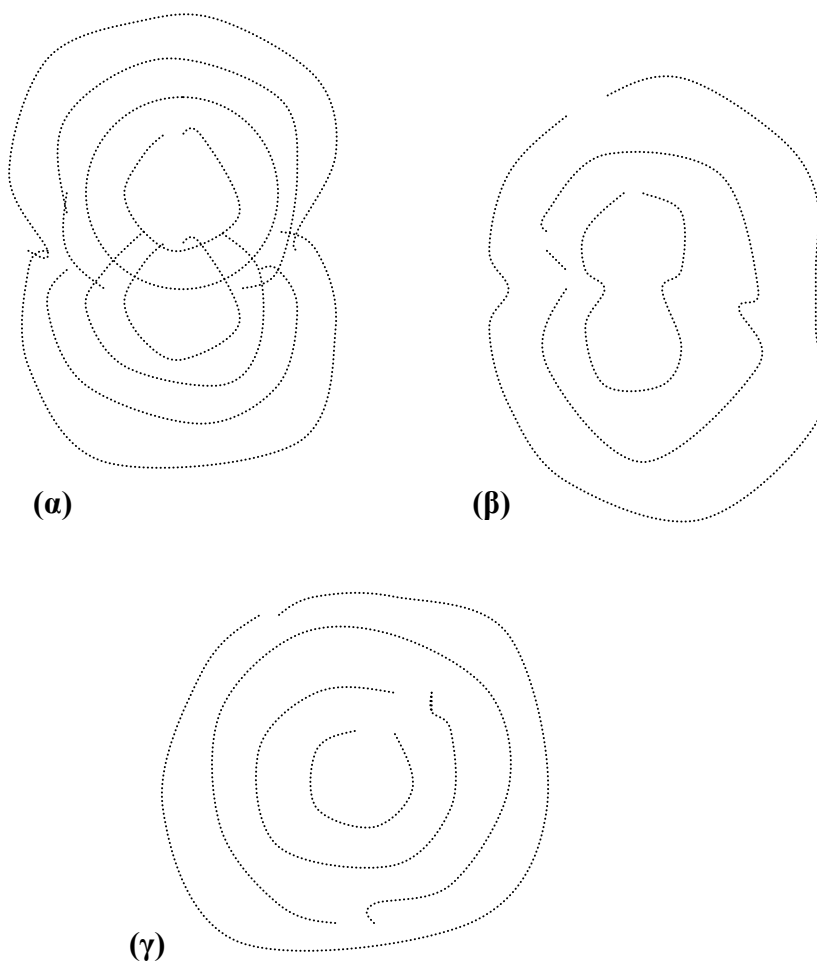
Αρα, $I_{r_1} / I_{r_2} = r_2 / r_1$, και συνεπώς τα αντίστοιχα πλάτη σχετίζονται ως

$$\psi_1 / \psi_2 = (r_2 / r_1)^{1/2}, \text{ ή } \psi \propto 1 / r^{1/2}$$

Περίθλαση II

Εικόνα περίθλασης από μία οπή που οφείλεται σε δύο πηγές απέχουσες κατά γωνία θ

228



Στα περαπάνω σχήματα βλέπουμε την αναπαράσταση της εικόνας παράθλασης από δύο μακρινές πηγές που πέφτουν φαίνονται με γωνία θ . Με την ίδια γωνία θ προσπίπτουν, έκαστη, στο πέτασμα παρατήρησης, όπως φαίνεται στο Σχήμα όπου όμως έχουμε και φαινόμενα περίθλασης, και έτσι αναμένουμε δύο συστήματα κύκλων του Airy. Έκαστος ορίζεται από την γωνιακή θέση του πρώτου ελαχίστου

$\varphi_{\text{ελαχ}} = 1.22 \lambda/D$, όπου D η διάμετρος της οπής.

Για να μην συμπίπτουν τα δύο συστήματα και μπορούν να αναγνωρισθούν, πρέπει $\theta > \varphi_{\text{ελαχ}}/2 \approx 0.61 \lambda/D$

Γνωρίζοντας λοιπόν την γωνιακή διακριτική ικανότητα ενός οργάνου, όπως π.χ. ενός τηλεσκοπίου, από την εικόνα περίθλασης (ταιριάζοντας τη μορφή της με την θεωρία αυτή) να βρούμε τη γωνιακή απόσταση δύο άστρων. Ειδικότερα, θα ήταν καλό να δούμε αν ένα δυαδικό άστρο μπορεί γίνει αντιληπτό ή να δούμε την γωνιακή απόσταση των μελών της δυάδας.

Οι εντάσεις για διάφορες περιπτώσεις κοντά στο όριο περίθλασης φαίνονται στα επόμενα σχήματα

229

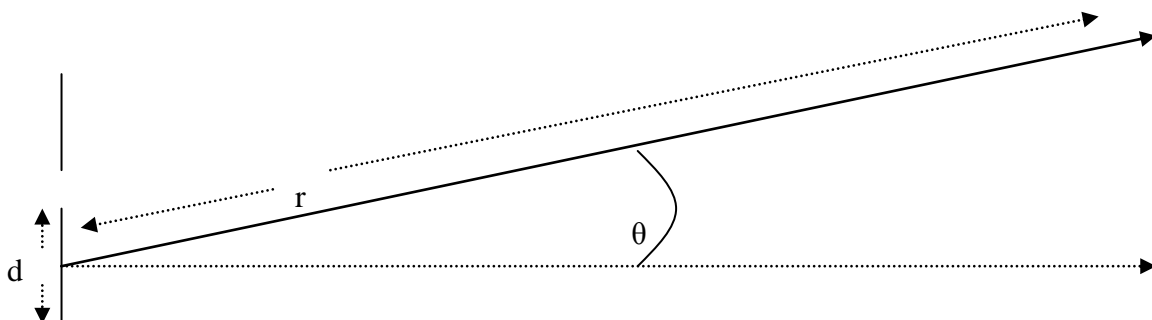
(**Λείπουν Σχήματα****)**

Άσκηση 2 Σε ένα κυματοδηγό ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων η φασική ταχύτητα δίνεται από την έκφραση

$v_{\varphi} = c / \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}$, όπου a η εγκάρσια διατομή του κυματοδηγού, και λ το μήκος κύματος στον κενό χώρο. Να βρείτε το μήκος κύματος εντός του κυματοδηγού.

Άσκηση 3 (α) Να βρείτε την ένταση σε ένα πείραμα του Young όπου όμως φωτίζεται με μία λάμπα νατρίου με κατάλληλο φίλτρο που επιτρέπει να περάσουν μόνο τα μήκη κύματος $\lambda_1 = 589.0 \text{ nm}$ και $\lambda_2 = 589.7 \text{ nm}$ συναρτήσει της θ , και αν $d = 2 \mu\text{m}$. Βρείτε την ένταση για $r_1 = 2r_2$.

(b) Να βρείτε μία έκφραση για την ορατότητα V των κροσσών συμβολής συναρτήσει του θ .





Λύση

(a)

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 = I_m \cos^2 \beta_1 + I_m \cos^2 \beta_2, \text{ όπου } \beta_i = \varphi/2 = [(2\pi/\lambda_i)/2] d \sin \theta$$

Άρα,

$$I_{\text{tot}} = I_m [(1 + \cos 2\beta_1)/2 + (1 + \cos 2\beta_2)/2] = I_m [1 + 2 \cos (2 \langle \beta \rangle) \cos (\Delta \beta)]$$

$$= I_m [1 + 2 \cos [(2\pi/\lambda) d \sin \theta] \cos (\pi d \delta \lambda / \lambda^2)]$$

(b) $V = (I_{\text{max}} - I_{\text{min}}) / (I_{\text{max}} + I_{\text{min}})$ etc

Άσκηση 4 .

Να βρείτε το E(t) που είναι επαλληλία των εξής κυματικών διαταραχών σε ένα σημείο Σ όπου

$$E_1 = 10 \sin(\omega t), E_2 = 10 \sin(\omega t + 15^\circ), E_3 = 10 \sin(\omega t + 30^\circ), \text{ και } E_4 = 10 \sin(\omega t + 45^\circ),$$

Λύση

$$\text{Είναι } E(t) = 10 \sum_{n=1}^4 \sin[\omega t + (n-1) 15^\circ] = 10 \text{Im} \sum_{n=1}^4 \exp [i\omega t + i(n-1) 15^\circ] =$$

$$= 10 \text{Im} \{ \exp (i\omega t + [(4-1)/2] 15^\circ) (1 + e^{i15^\circ} + e^{i30^\circ} + e^{i45^\circ}) \} = 10 \text{Im} \exp (i\omega t) \frac{1 - \exp(i 4 \times 15^\circ)}{1 - \exp(i \times 15^\circ)}$$

= ... (ίδετε σελ. 31 Pain)

$$\propto \sin (\omega t + 22.5^\circ) \sin 30^\circ / \sin 7.5^\circ$$

$$\approx \{0.5 / (7.5/59)\} \sin (\omega t + 22.5^\circ).$$

Άσκηση 5 (Διαμοριακό δυναμικό μεταξύ δύο ατόμων αερίου) . Αυτό προσεγγίζεται από την έκφραση (J-Lennard Jones δυναμικό)

$$E_p = E_{p,0} [2(r_0/r)^6 - (r_0/r)^{12}]$$

Η μεταβλητή r, είναι η απόσταση μεταξύ των μορίων. Να υπολογίσετε την συχνότητα ταλάντωσης που να αντιστοιχεί στο δυναμικό αυτό.

Λύση

Εν γένει, για ένα δυναμικό που η μορφή του έχει παραβολική εξάρτηση κοντά στο ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας E_p , η σταθερά k (σκληρότητα του “ελατηρίου”) προκύπτει ως ,

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = k$$

και η κυκλική συχνότητα στην αρμονική περίπτωση είναι $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$

$$= \left[\left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right) / m \right]^{1/2}$$

Στην περίπτωση του δυναμικού J-Lennard Jones, η δεύτερη παράγωγος του δυναμικού προκύπτει ότι δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = -E_{p,0} \left[84 \frac{r_0^6}{r^8} - 156 \frac{r_0^{12}}{r^{14}} \right]$$

Βάζοντας $r = r_0$ προκύπτει

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = \frac{72}{r_0^2} E_{p,0}$$

Ετσι, η κατά προσέγγιση συχνότητα ταλάντωσης είναι

$$\omega = \left(\frac{72 E_{p,0}}{m r_0^2} \right)^{1/2}$$

231

3) **Άσκηση 6** Η δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο ατόμων σε ένα ορισμένο διατομικό μόριο, δίνεται από τη σχέση $F = - (a/r^2) + (b/r^3)$ όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των ατόμων, a και b είναι θετικές σταθερές. Να βρείτε,

(α) την απόσταση ισοροπίας

(β) την ενεργό σταθερά ελατηρίου για μικρές απομακρύνσεις από τη θέση ισοροπίας

(γ) την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων γύρω από τη θέση ισοροπίας, όταν m είναι η ενεργός μάζα του μορίου.

(Υπόδ. στις απαντήσεις, $b/a : a^4/b^3 : 2\pi [a^4/(b^3\mu)]^{1/2}$)

(8) *Ραδιοφωνικά κύματα που φθάνουν σε ένα ραδιοφωνικό δέκτη έχουν στην είσοδο της κεραίας ηλεκτρικό πεδίο με μέγιστο πλάτος ίσο προς $1V/cm$. Υποθέτοντας ότι τα κύματα μπορούν να θεωρηθούν επίπεδα υπολογίστε : α) το πλάτος του μαγνητικού πεδίου β) τη μέση ένταση των κυμάτων γ) τη μέση πυκνότητα ενέργειας, δ) υποθέτοντας ότι ο σταθμός απέχει $1Km$ από τον δέκτη και ότι ο σταθμός εκπέμπει ιστροπικά να υπολογισθεί η ισχύ του σταθμού, Δίδεται $E_0 = 9 \times 10^{-2} N^{-1} m^{-2} C^2$, $\mu_0 \approx 1.2 \times 10^{-5} mkg C^{-2}$.*

(11) Άσκηση

Ένα εύκαμπτο χαλβιδινο καλώδιο συνολικού μήκους L και γραμμικής πυκνότητας μάζας μ αναρτάται κατακόρυφα από ένα άκρο του. (α) Να βρείτε μία έκφραση για την ταχύτητα των εγκάρσιων κυμάτων που διαδίδονται προς τα κάτω διαμέσου του

καλωδίου. (β) Πόσο χρόνο θα χρειασθεί ένα κύμα για να διαδοθεί από το ένα άκρο στο άλλο;

(12) Η τιμή του R είναι $8.3 \text{ Joule} \cdot \text{mole}^{-1} \text{K}^{-1}$ και του $\gamma = C_p/C_v$ είναι περίπου 1.67, 1.4, και 1.27 για μονοατομικά, διατομικά και πολυατομικά μόρια αντίστοιχα. Ένα στάσιμο κύμα συχνότητας 1100Hz, που δημιουργείται σε στήλη αερίου με $M_{\text{mole}} = 16 \cdot 10^{-3} \text{ Kgr}$ στους 20°C , έχει διαδοχικούς δεσμούς σε απόσταση 20 cm. Πόσα άτομα έχει το μόριο του;

Άσκηση (13) Να λυθεί η κυματική εξίσωση με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Δηλαδή υποθέστε ότι υπάρχει μία λύση της μορφής $\psi(x,t) = f(x)g(t)$. Βρείτε στη συνέχεια λύση για $f(x)$ και $g(t)$ από εκάστη από τις δύο ανεξάρτητες εξισώσεις. Τελικά δείξτε ότι το ψ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός δύο κυμάτων με αντίθετες κατευθύνσεις.

(14) Το χειμώνα στο τζάμι ενός παραθύρου σχηματίζεται ένα μικρό στρώμα υγρασίας και δίνει μία χροιά πρασινωπή στα αντικείμενα που φαίνονται μέσα από αυτό. Ποιό είναι το ελάχιστο πάχος που μπορεί να έχει ένα τέτοιο χρώμα υγρασίας; Υποθέστε κάθετη πρόσπτωση φωτός. Είναι ο δείκτης διάθλασης υγρασίας και γυαλιού 1.33 και 1.5 αντίστοιχα. **Υποδ. Για να έχουμε πρασινωπή χροιά**, πρέπει το μπλε και το κόκκινο να αποσβεσθούν.

232

(15) Σε ένα σύνθετο εκκρεμές που το κέντρο μάζας m του απέχει απόσταση h από το κέντρο μάζας, να βρείτε για μικρά πλάτη ταλαντώσεων, το ισοδύναμο μήκος απλού εκκρεμούς L , εκείνο δηλαδή που για την ιδιοσυχνότητα ελευθέρων ταλαντώσεων ω_0 , ικανοποιεί τη σχέση, $\omega_0 = \sqrt{g/L}$

16. Πράσινο φως (μήκους κύματος 550 nm) πέφτει πάνω σε δύο σχισμές των οποίων τα κέντρα απέχουν 0.02 mm. Σε ένα πέτασμα σε απόσταση 80 cm, ποιες είναι οι γωνίες από το κεντρικό μέγιστο ως τον δεύτερο φωτεινό κροσσό και ως τον δεύτερο σκοτεινό κροσσό προς τη μία πλευρά; Αν η κεντρική γραμμή είναι στο $x=0$, ποιες είναι οι αντίστοιχες θέσεις x για αυτά τα σκοτεινά και φωτεινά σημεία σε κάθε πλευρά του κεντρικού μεγίστου;

17. Για το τοίχωμα με τη διπλή σχισμή, πόσα μέγιστα συμβολής παρουσιάζονται εντός του κεντρικού μεγίστου περίθλασης; (Η απόσταση από το κέντρο μιάς σχισμής ως το κέντρο της επομένης είναι .0020m, ενώ το εύρος κάθε σχισμής είναι .0010m). Για το χρώμα των 610 nm, πόσα μέγιστα συμβολής λείπουν;

18. Επίπεδο Φράγμα περίθλασης έχει εύρος 5.0 cm και περιέχει 25000 χαραγές. Σε πόσο γωνιακό άνοιγμα θα αναπτύσσεται το ορατό φως (σε φασματική περιοχή 400 ως 700 nm) για μέγιστα τάξεων 0, 1, και 2. Υπάρχει επικάλυψη μεταξύ αυτών των φασμάτων;

Λύσεις

H

$$A_{r-1} + (2 - \omega^2 LC)A_r - A_{r+1} = 0$$

Όπως έχουμε δει και στην περίπτωση του συστήματος σφαιριδίων με ελατήρια, η λύση είναι της μορφής

$$A_r = C \sin \frac{rs\pi}{n+1}$$

με s ακέραιο. Τότε λύνοντας ως προς ω_s

$$\omega_s = \left(\frac{2}{LC} \left(1 - \cos \frac{s\pi}{n+1} \right) \right)^{1/2}$$

233

Άσκηση Στο πείραμα του Γιάνγκ, χρησιμοποιούμε πορτοκαλί χρώμα λάμπας κρυπτού. Αν οι κροσσοί μετρούνται με ένα μικρομετρικό προσοφθάλμιο σε απόσταση 100 εκατοστόμετρα από τη διπλή σχισμή, βρίσκεται ότι 25 κροσσοί καλύπτουν απόσταση 12.87 mm μεταξύ των κέντρων των κροσσών. Βρείτε το μήκος κύματος του πορτοκαλί χρώματος του φάσματος του κρυπτού αν η απόσταση μεταξύ των σχισμών είναι 1.1297 mm.

Λύση Είναι $d \sin \theta_{25} = 25 \lambda$, και $\sin \theta_{25} \approx x/L$, όπου x η απόσταση των κέντρων των 25 κροσσών στον προσοφθάλμιο. Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει $m\lambda/d \approx x/L$. Από αυτήν μπορεί να προσδιορισθεί το ζητούμενο μήκος κύματος.

Άσκηση 2 (Στάσιμα κύματα) Το ηλεκτρικό πεδίο ενός στάσιμου ηλεκτρομαγνητικού κύματος έχει συνιστώσες

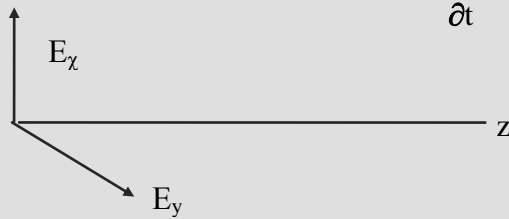
$$E_x(z,t) = A \cos(\omega t) \cos(kz), \quad E_y(z,t) = E_z(z,t) = 0$$

- Να βρείτε το χρονικό μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο με μέση χρονική τιμή μηδέν που αντιστοιχεί στο παραπάνω ηλεκτρικό πεδίο και σχεδιάστε τα δύο πεδία συναρτήσει του z
- Δείξτε ότι για το στάσιμο αυτό κύμα η ολική ενέργεια μέσα σε μια περίοδο παραμένη σταθερή μέσα σε οποιαδήποτε διάστημα μήκους $\lambda/4$, όπου $\lambda = 2\pi/k$, ανάμεσα σε ένα δεσμό και μία κοιλία του E_x

Λύση

Από την

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$



Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει εύκολα

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

Από αυτήν, αναπτύσσοντας το rot παίρνουμε την

$$A \cos(\omega t) \cos(kz) = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

Αν ολοκληρώσουμε ως προς χρόνο και παραλήψουμε την ποσότητα $f(z)$ αφού ενδιαφερόμαστε για το χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος του B που έχει μέση χρονική τιμή μηδέν, και επειδή $\omega = ck$,

$$B_y(z,t) = \frac{A}{c} \sin \omega t \sin kz$$

234

Άσκηση 4.13 Μπέρκλεϋ

Να βρείτε την ενεργειακή ροή σε χορδή απείρου μήκους όταν διεγείρεται στο σημείο $z=0$ με αρμονική ταλάντωση πλάτους 1.5 cm, συχνότητα 100 Hz, ενώ η γραμμική πυκνότητα και η μηχανική τάση είναι 0.1g/cm και 50 kg αντίστοιχα.

Λύση

Σε οδεύοντα κύματα είναι

$$P(t) = Z \left[\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} \right]^2$$

$$= \frac{1}{Z} \left[\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} \right]^2$$

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega t - kx), \text{ \acute{a}\rho\alpha } \partial\psi/\partial t = -\omega A \sin(\omega t - kx),$$

και \acute{a}\rho\alpha,

$$P(z,t) = \sqrt{\omega^2 A^2} \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\langle P(z,t) \rangle =$$

$$\sqrt{T_0 \rho_0 \omega^2 A^2} \sin^2(\omega t - kx) = 2 \pi^2 v^2 A^2 \sqrt{T_0 \rho_0}$$

Άσκηση 4.27 Μπέρκλεϋ

Υποθέστε ότι δύο οδεύοντα κύματα σε μία ελαστική χορδή με $T_0 = 10^{-4} \text{ N}$, $\rho = 0.1 \text{ kg/m}$ και $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ δίνονται από τις εξισώσεις

$\psi_1 = A \cos(\omega t - kx + \pi)$, $\psi_2 = A \cos(\omega t - kx + \pi/4)$. Βρείτε τη μέση χρονική ροή της υπέρθεσης των .

235

Λύση

$$\psi_1 = A \cos(\omega t - kx + \pi) \Rightarrow A \exp[i(\omega t - kx + \pi)], \quad \psi_2 = A \cos(\omega t - kx + \pi/4) \\ \Rightarrow A \exp[i(\omega t - kx + \pi/4)],$$

$$P(t) = Z \left[\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} \right]^2 = Z \left[\frac{\partial \psi_1(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2(z,t)}{\partial t} \right]^2$$

$$= Z \left[\left(\frac{\partial \psi_1(z,t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2(z,t)}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial \psi_1(z,t)}{\partial t} \frac{\partial \psi_2(z,t)}{\partial t} \right]$$

$$= Z \left[\frac{1}{2} \text{Re} [i\omega \psi_1(-i\omega \psi_1^*)] + \frac{1}{2} \text{Re} [i\omega \psi_2(-i\omega \psi_2^*)] + \dots \right]$$

Μπορείτε εύκολα να ολοκληρώσετε τις πράξεις.

17. Η συνθήκη ελαχίστου, λόγω περίθλασης, είναι

$w \sin \theta_m = m \lambda$, η για $m=1$:

$$\sin \theta_{1,d} = \lambda/w = .610 \mu\text{m}/1000 \mu\text{m} = 0.000610 = 0.03^\circ$$

Η γωνιακή απόσταση του κεντρικού και του πρώτου μεγίστου συμβολής είναι;

$\sin \theta_{1,i} = +1 \lambda/d = .610 \mu\text{m}/2000 \mu\text{m} \rightarrow$ και για πολύ μικρές γωνίες (που πράγματι έχουμε εδώ):

$$\theta_{1,i} \approx \frac{1}{2} \theta_{1,d}$$

Φαινόμενο Doppler

Ας θυμηθούμε τα περί κινουμένων πηγών και παρατηρητών. Για την διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων δεν απαιτείται να υπάρχει κάποιο μέσον. Η ιδέα το αιθέρα εγκαταλήφθηκε μετά το περίφημο πείραμα των Michelson -Morley. Αυτοί μέτρησαν την ταχύτητα του φωτός σε διάφορα αδρανειακά συστήματα αναφοράς που εκκινούνται, το ένα ως προς το άλλο με σταθερή ταχύτητα. Σε όλα τα πειράματα, βρέθηκε πως, εντός των ορίων των πειραματικών σφαλμάτων, η ταχύτητα του φωτός ήταν αναλώϊωτη. Ο Einstein, το 1905 διέλυσε αυτήν την εννοιολογική δυσκολία ως εξής:

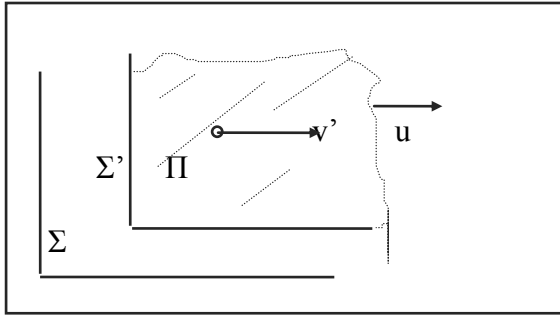
Εκανε την παραδοχή ότι “αν ένας αριθμός παρατηρητών κινούνται με σταθερή ταχύτητα ο ένας ως προς τον άλλον, και προς μία πηγή φωτός, και αν έκαστος παρατηρητής μετράει την ταχύτητα του φωτός που εξέρχεται από την πηγή, τότε: όλες οι μετρήσεις θα δώσουν την ίδια τιμή για την ταχύτητα”

Αυτή είναι η θεμελιώδης υπόθεση για την θεωρία της σχετικότητας. Αυτή παρακάμπτει την ανάγκη της υπαρξης του αιθέρα. Δεν υπάρχει κάποιο απόλυτο σύστημα αναφοράς. Όλες οι πειραματικές μαρτυρίες υποστηρίζουν την υπόθεση αυτή και έτσι την δεχόμαστε και σήμερα. Αυτή μας βοηθάει να κατανοήσουμε τον τρόπο διάδοσης του φωτός.

Προκύπτει έτσι ο τύπος

$$v = \frac{v' + u}{1 + v' u/c^2} \quad (1) \quad \text{Αυτή ισχύει για σωματίδια με μάζα.}$$

όπου τα παραπάνω μεγέθη φαίνονται στο Σχήμα



Σχήμα: Οι παρατηρητές Σ και Σ' που έχουν σχετική κίνηση, παρατηρούν τον ίδιο παλμό Π. Ο παλμός εκπέμπεται από μία πηγή που είναι σε ηρεμία στο σύστημα αναφοράς Σ'.

Η ταχύτητα του συστήματος αναφοράς Σ' ως προς το Σ είναι u. Το v' είναι η ταχύτητα του φωτός που θα μετρήσει ο παρατηρητής στο Σ', και η v η ταχύτητα που θα μετρηθεί στο Σ. Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας και με όλες τις πειραματικές μετρήσεις είναι

237

$$v = v'$$

Αν εφαρμόσουμε τη σχέση (1) για “σωματίδια” φωτός, δηλαδή με $v' = c$, τότε αυτή δίνει

$$v = \frac{c+u}{1+cu/c^2} = c$$

πράγμα που δείχνει την ορθότητα της (1) ακόμα και στην περιγραφή της σχετικής συμπεριφοράς των παλμών φωτός στα διαφορετικά συστήματα αναφοράς.

Τύπος Φαινομένου Doppler

$$v' = v \frac{1-u/c}{[1-(u/c)^2]^{1/2}}$$

Στο διαδίκτυο
http://www.usafa.af.mil/dfp/physics/webphysics/Physlet_examples/doppler.html

Άσκηση

Δείξτε ότι

$$u_g = u - \lambda \left(\frac{du}{d\lambda} \right)$$
$$\left(\frac{1}{u_g} \right) = \left(\frac{1}{u} \right) - \frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0}$$

όπου λ_0 είναι το μήκος κύματος στο κενό.

Λύση

$$k = n \omega / c. \text{ Άρα, παίρνουμε } dk/d\omega = n/c + (\omega/c) dn/d\omega$$
$$= k/\omega + (dn/d\lambda) \left(\frac{d\lambda}{d\omega} \right) (\omega/c) \quad (1)$$

Εξάλλου, $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c/\lambda$ ή $\omega\lambda = 2\pi c$ και συνεπώς μέσα στο υλικό, $\lambda d\omega + \omega d\lambda = 0$.

Άρα, $\lambda/\omega = -d\lambda/d\omega$

Άρα, η σχέση (1) δίνει

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_\phi} - \frac{\lambda}{\omega} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \frac{\omega}{c}$$

=

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_\phi} - \frac{\lambda}{c} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda}$$

238

2) Ένα φιλμ από νερό, ($n=1.33$), έχει πάχος 3200 Αγκστρομ. Αν φωτισθεί με λευκό φως που προσπίπτει κάθετα, τι χρώμα θα εμφανισθεί στο ανακλώμενο φως;

3) Μη ανακλών γυαλί Συχνά οι φακί έχουν επένδυση από λεπτά φιλμ διαφανών υλικών, όπως το MgF_2 ($n=1.38$) για να ελαττώνουν την ανάκλαση από την επιφάνεια του γυαλιού, χρησιμοποιώντας συμβολή. Πόσο πάχος επενδύσεως χρειάζεται που να παράγει ελάχιστη ανάκλαση στο κέντρο του ορατού φάσματος, δηλ. κοντά στα 500 nm;

Άσκηση

Φως με μήκος κύματος $\lambda = 4000$ Αγκστρομ προσπίπτει κάθετα σε δύο διαφανή πλαστικά πλακίδια. Αυτά χωρίζονται με μία απόσταση, που είναι μεγάλη σε σύγκριση με το μήκος κύματος. Αν ο δείκτης διάθλασης των πλακιδίων είναι $n=1.5$, τι ποσοστό

του φωτός μεταδίδεται μέσα από αυτά; Παραλείψετε τις πολλαπλές ανακλάσεις και τα φαινόμενα συμβολής.

Λύση

$$R_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$|R_{o\lambda}|^2 =$$

$$2 \times \left\{ \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 + \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \right\} = 0.84$$

Άρα, η διαερατότητα του συστήματος είναι 86%.

Συμπληρωματικές Ασκήσεις Συμβολής και Περίθλασης (έγιναν 8-1-04)

(1) Μία κεραία ραντάρ είναι τοποθετημένη σε ένα υψηλό βράχο δίπλα στο άκρο μιάς λίμνης. Η κεραία λειτουργεί με ένα μήκος κύματος 500 m. Το δεύτερο ελάχιστο στο σήμα, ανακλασθέν από την επιφάνεια της Αφροδύτης, καταγράφεται όταν η Αφροδύτη βρίσκεται 42° πάνω από τον ορίζοντα. Να βρείτε το ύψος του βράχου.

Λύση

Η Αφροδύτη μπορεί να θεωρείται σε άπειρη απόσταση, και έτσι, οι διαταραχές από ένα μονοχρωματικό κύμα, στα Β και Δ να έχουν την ίδια φάση σε κάθε στιγμή.

Η διαφορά δρόμου μεταξύ της κατ'ευθείαν και ανακλώμενης δέσμης είναι

$BE - \Delta E = (y / \sin 42^\circ) (1 - \sin 6^\circ)$ και υπάρχει μία διαφορά φάσης π οφειλόμενη στην ανάκλαση στο Β. Έτσι, η διαφορά φάσης στο Ε είναι

$$\varphi = \frac{2\pi y}{\lambda \sin 42^\circ} (1 - \sin 6^\circ) + \pi, \text{ και για ένα ελάχιστο στην}$$

ένταση, αυτή θα ισούται με $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

Αποκλείοντας τα δύο πρώτα (τό πρώτο θα σήμαινε, $y=0$, ενώ το δεύτερο χάθηκε λόγω συνεφιάς!), έχουμε

$$y = \frac{2 * \lambda * \sin 42^\circ}{1 - \sin 6^\circ}$$

(2) Μία σχισμή είναι τοποθετημένη στο “άπειρο” μπροστά από ένα φακό εστιακής απόστασης 1m, και φωτίζεται κάθετα με ένα φως μήκους κύματος 600nm. Τα πρώτα ελάχιστα, εκατέρωθεν του κεντρικού μέγστου της εικόνας συμβολής, παρατηρείται στην εστιακή απόσταση του φακού, απέχουν 4 mm. Πόσο είναι το εύρος της σχισμής;

Λύση

Το πρώτο ελάχιστο δίνεται από τη σχέση , $D \sin \theta = 1 \lambda$, όπου D το εύρος της σχισμής. Είναι $\sin \theta \approx \tan \theta = 2\text{mm}/1\text{m} = 0.002$. Άρα, $D = \lambda/0.02 = 0.3\text{mm}$.

(3) Να να περιγράψετε την συνολική συμπεριφορά του φράγματος περίθλασης.

Εν συντομία, ένα φράγμα περίθλασης, αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό, N, παράλληλων σχισμών ή ασυνεχειών, ή εγκοπών (χαραγών). Για κάθετη πρόσπτωση, η εικόνα συμβολής σε ένα πέτασμα μεγάλες αποστάσεις (εικόνα Fraunhofer), θα παράγει μία εικόνα συμβολής N-σχισμών που η ένταση της όμως θα “διαμορφώνεται” από την εικόνα περίθλασης “μιάς-σχιμής”. Έτσι, θα έχουμε ισχυρές ισαπέχουσες κορυφές, (που ικανοποιούν την εξίσωση του φράγματος, $d(\sin \theta + \sin \phi) = m\lambda$), αλλά τα ύψη των κορυφών αυτών βρίσκονται πάνω σε μία περιβάλλουσα περίθλασης. Το εύρος της περιβάλλουσας περίθλασης προσδιορίζεται από το πάχος w εκάστης σχισμής. Η τιμή m (0, +-1, +-2, ...) λέγεται τάξη του κροσσού. Ορισμένες τάξεις μπορεί να απουσιάζουν , και αυτό εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ του w και της απόστασης των διαδοχικών σχισμών d.

(4) Παράλληλη δέσμη μπλέ φωτός (425 nm) προσπίπτει σε μικρό άνοιγμα. Μετά την διέλευση από το άνοιγμα, η δέσμη δεν είναι πλέον παράλληλη αλλά αποκλίνει κατά 1° από την διεύθυνση πρόσπτωσης (λόγω περίθλασης). Πόση είναι η διάμετρος του διαφράγματος;

Λύση:

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right)^2$$

Αυτή η σχέση λύνεται γραφικά. Επίσης, $\alpha = \phi/2 = (\pi a/\lambda) \sin \theta$

$$\alpha = (\pi a/\lambda) \sin \theta$$

και άρα,

οι πρώτοι μηδενισμοί γίνονται για, $\alpha = (\pi a/\lambda) \sin \theta = \pm \pi$. Βάζοντας $\theta = \pm 1^\circ = \pi/180$. Έχουμε

$$a = \lambda / \sin \theta = 0.425 \mu\text{m} / \sin(\pi/180) = 24.3 \mu\text{m}.$$

(υποθέσαμε ότι το άνοιγμα έχει σχήμα σχισμής).

(5)

Περίθλαση (επανάληψη)

Η περίθλαση δεν διαφέρει ουσιαστικά από την συμβολή. Για ιστορικούς όμως λόγους περιγράφεται σαν διαφορετικό φαινόμενο από εκείνο της συμβολής. Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε τις ομοιότητες μεταξύ των δύο αυτών εννοιών όπου χρειάζεται. Έτσι, η περίθλαση από μία πλατιά σχισμή μπορεί να περιγραφεί σαν επαλληλία από ένα σύνολο πηγών ίσης έντασης, και ισαπεχόντων. Σύμφωνα με την αρχή του Huygens, το αποτέλεσμα της συμβολής αυτών των δευτερογενών πηγών , κατά μήκος της σχισμής, ισούται με το αποτέλεσμα της περίθλασης.

Εικόνα Περίθλασης από μία σχισμή

Θυμίζουμε το αποτέλεσμα της εικόνας περίθλασης N στενών σχισμών

$$E_c = A(r) e^{-i\omega t} \exp(ikr_1) S$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } S &= 1 + \exp(ik(r_2 - r_1)) + \exp(ik(r_3 - r_2)) + \dots \\ &= 1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1} \end{aligned}$$

με

$$a \equiv \exp(ik(r_2 - r_1)) = e^{ik(d \sin\theta)} = e^{i\Delta\theta}$$

Τελικά προκύπτει

$$E_c = A(r) e^{-i\omega t} \exp\{ik[r_1 + (1/2)(N-1)d\sin\theta]\} \frac{\sin \frac{1}{2} N \Delta\theta}{\sin \frac{1}{2} \Delta\theta} \quad (1)$$

241

ή

$$E_c = A(r) e^{-i\omega t} \exp\{ikr\} \frac{\sin \frac{1}{2} N \Delta\theta}{\sin \frac{1}{2} \Delta\theta}$$

$$\text{όπου } r \equiv r_1 + (1/2)(N-1)d\sin\theta = r_1 + (1/2)D\sin\theta$$

εκφράζει την απόσταση του σημείου Π από το κέντρο του δικτύου των κεραιών.

Παίρνοντας το πραγματικό μέρος της Εξ.(1)

$$E(r, \theta, t) = \frac{A(r) \sin \frac{1}{2} N \Delta\theta}{\sin \frac{1}{2} \Delta\theta} \cos(kr - \omega t) \equiv A(r, \theta) \cos(kr - \omega t)$$

Τώρα, μπορούμε να πούμε πως η συνολική ένταση θα είναι ανάλογη του

$$|E(r,\theta,t)|^2 \propto$$

$$\frac{|A(r)|^2 \left| \sin \frac{1}{2} N \Delta\phi \right|^2}{\left| \sin \frac{1}{2} \Delta\phi \right|^2}$$

Αν τώρα, $\beta \equiv (1/2) \Delta\phi$, τότε

$$I \propto \frac{|A(r)|^2 \left| \sin N\beta \right|^2}{\left| \sin \beta \right|^2}$$

=

$$I = I_s \frac{\left| \sin N\beta \right|^2}{\left| \sin \beta \right|^2}$$

242

όπου I_s είναι η ένταση από μία μόνο πηγή και $\beta = \pi d \sin\theta / \lambda$.

Μπορούμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της έντασης από N πηγές θεωρώντας τη συμπεριφορά του

$$\frac{\left| \sin N\beta \right|^2}{\left| \sin \beta \right|^2}$$

Παρατηρούμε ότι όταν

$\pi d \sin\theta / \lambda = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \text{ κλπ, δηλαδή όταν}$

$$d \sin\theta = 0, \pm\lambda, \pm2\lambda, \pm3\lambda, \pm n\lambda$$

προκαλείται ενισχυτική συμβολή n -στης τάξης, και

$$\frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta} \rightarrow \frac{N^2 \beta^2}{\beta^2} \rightarrow N^2 \quad (1)$$

που δίνει

$$I = I_s N^2 \quad (2)$$

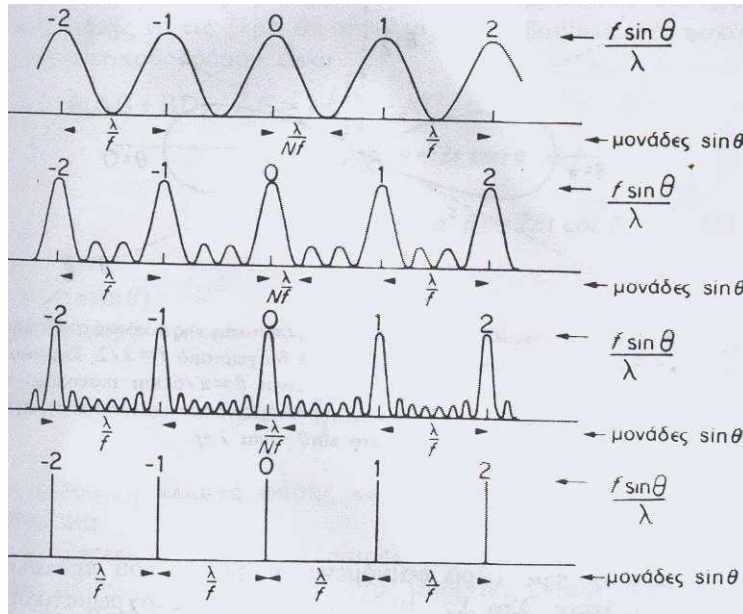
Στην πραγματικότητα για τις τιμές αυτές του β , και ο αριθμητής και ο παρονομαστής μηδενίζονται, αλλά αποδεικνύεται πως, σε αυτό το όριο, το κλάσμα τείνει σε πεπερασμένη τιμή που δίνεται από την Εξ.(1). Ανάμεσα σε κάθε δύο διαδοχικά κύρια μέγιστα υπάρχουν όπως αποδεικνύεται $N-1$ σημεία όπου η ένταση γίνεται μηδέν κάθε φορά που ο αριθμητής

$\sin^2 N\beta$ μηδενίζεται ενώ δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής. Τα $N-2$ δευτερεύοντα μέγιστα που υπάρχουν ανάμεσα στους μηδενισμούς αυτούς της έντασης έχουν πολύ

μικρότερες εντάσεις επειδή κανένα τους δεν περιέχει τον όρο N^2 . Οι $N-1$ τοπικοί μηδενισμοί γίνονται για

$$d \sin \theta = \lambda/N, \quad 2\lambda/N, \quad \dots \quad (n-1)\lambda/N.$$

Η γραφική παράσταση της έντασης για διάφορες (σχετικά μεγάλες) τιμές του N φαίνεται στο Σχήμα.



243

Σχήμα Fig_10_1_03

Απόδειξη τύπων:

Για το όριο της πρώτης τάξης, όπου $m=+1$, μπορούμε να δείξουμε ότι αν το β τείνει στο π , το όριο της παράστασης $\sin N\beta / \sin \beta$ ισούται με $\pm N$.

Πράγματι, αν $\beta = \pi - \epsilon$,

$$\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \rightarrow \frac{\sin N(\pi - \epsilon)}{\sin(\pi - \epsilon)} \rightarrow (-1)^{N+1} \frac{\sin N\epsilon}{\sin \epsilon} \rightarrow (-1)^{N+1} N = \pm N$$

Γωνιακό εύρος του κυρίως μεγίστου.

Η μεταβολή του $N\beta$ ώστε να έχουμε την πρώτη ρίζα του αριθμητή (χωρίς να μηδενίζεται και ο παρονομαστής) δίνεται από τη συνθήκη

$$\delta(N\beta) = \pi \rightarrow \delta(N \pi d \sin \theta / \lambda) = \pi \rightarrow N d \sin \theta / \lambda = 1 \rightarrow \sin \theta = \lambda / (Nd) \text{ ή}$$

$$\theta \approx \lambda / (Nd) \propto 1/N$$

Δηλαδή βρίσκουμε πως περνάμε από ένα κύριο μέγιστο στη διπλανή ρίζα του πλάτους όταν η διαφορά δρόμου $d \sin \theta$ αυξάνει κατά λ/N .
 Αν ο αριθμός κεραιών τείνει στο άπειρο, η σχετική μετατόπιση φάσης μεταξύ διαδοχικών κεραιών τείνει στο μηδέν. Όταν N τεράστιο, $\Phi = (N-1) \Delta\phi = kD \sin \theta$

$$\Phi \approx N \Delta\phi, N \gg 1$$

$$A(r, \theta) = A(r) \frac{\sin \frac{1}{2} N \Delta\phi}{\sin \frac{1}{2} \Delta\phi} \approx A(r) \frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\sin \left[\frac{1}{2} \frac{\Phi}{N} \right]}$$

Στο όριο που το N είναι πολύ μεγάλο, μπορούμε να αμελήσουμε όλους τους όρους της σειράς Τέιλορ εκτός του πρώτου όρου

244

$$A(r, \theta) = NA(r) \frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\frac{1}{2} \Phi}$$

Το N δηλαδή είναι τώρα συντελεστής στο πλάτος.

Όταν θ τείνει στο μηδέν, και το Φ τείνει στο μηδέν, ο λόγος στο κλάσμα της προηγούμενης σχέσης τείνει στη μονάδα

$$\sin x / x = (x - (1/6)x^3 + \dots) / x = (1 - (1/6)x^2 + \dots) = 1 \text{ για } x \rightarrow 0$$

Άρα, $NA(r, 0)$ ισούται με μονάδα επί $NA(r)$

άρα

$$E(r, \theta, t) = \frac{A(r, 0) \sin \frac{1}{2} \Phi}{\frac{1}{2} \Phi} \cos(kr - \omega t)$$

$$\text{με } \Phi = 2\pi \frac{D \sin \theta}{\lambda}$$

Η μέση χρονική ροή της ενέργειας έχει γωνιακή κατανομή

$$I(r, \theta) = I_{\max} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Phi}{\left(\frac{1}{2} \Phi \right)^2} \quad (1)$$

Γωνιακές θέσεις μεγίστων και ελαχίστων κατά την περίθλαση

Από τη σχέση (1) με $\alpha = 1/2 \Phi$, μπορούμε να βρούμε τη θέση του πρώτου μηδενισμού της έντασης: Η ένταση είναι μηδέν, κάθε φορά που $\sin \alpha = 0$, δηλαδή όποτε το α είναι πολλαπλάσιο του π , ή

$$\alpha = \pi d \sin \theta / \lambda = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \text{ δίνοντας, } d \sin \theta / \lambda = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ ή } \sin \theta = \pm \lambda / d, \pm 2\lambda / d, \dots$$

Ανάμεσα σε αυτές τις θέσεις, υπάρχουν γωνιακές θέσεις τοπικών μεγίστων, τα οποία προσδιορίζονται με τη συνθήκη:

$$dI(r, \theta) / d\alpha = 0 = (d/d\alpha) (\sin \alpha / \alpha) = (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) / \alpha^2 = 0 \text{ ή } \alpha = \tan \alpha$$

Από τη γραφική παράσταση των 2 σκελών της εξίσωσης αυτής, φαίνεται πως οι ρίζες της προσεγγίζονται αρκετά καλά από,

$$\alpha = \pm 3/2 \pi, \pm 5/2 \pi, \dots$$

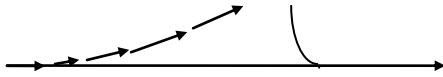
Μπορούμε έτσι να κατασκευάσουμε ένα πίνακα των σχετικών εντάσεων των τοπικών μεγίστων:

Γωνιακό Εύρος Ζώνης Περιοριζόμενο από φαινόμενα περίθλασης

Το ελάχιστο γωνιακό εύρος είναι $\Delta \theta = \lambda / D$, όπου D το εύρος σχισμής. Συνεπώς το εύρος δέσμης είναι

$$E = L \lambda / D$$

Αυτό προκύπτει από τη σχέση (1) θέτοντας $1/2 \Phi = \pi$, οπότε προκύπτει ότι



Η γωνία φ στο κάτω μέρος του σχήματος $\Delta 2$ προκύπτει ότι ισούται με τη διαφορά φάσης μεταξύ των ακτίνων στο ανώτερο και κατώτερο μέρος της σχισμής. Από τη γεωμετρία φαίνεται ότι φ είναι επίσης ίση με τη γωνία μεταξύ των δύο ακτίνων R . Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$E_{\theta} = 2R \sin(\varphi/2)$$

Σε ακτίνα, η φ ισούται με το ημίγειο του μέτρου του μήκους του τόξου δια της ακτίνας

$$\varphi = E_m/R$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις

$$E_{\theta} = \frac{E_m}{\varphi/2} \sin(\varphi/2)$$

ή

$$E_{\theta} = E_m \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$$

$$\text{με } \alpha = \varphi/2 \quad (1)$$

Αν τώρα, a , είναι το εύρος της σχισμής και θ η γωνία παρατήρησης της εικόνας συμβολής, επειδή οι ακτίνες από το άνω και κάτω άκρο της σχισμής έχουν διαφορά δρόμου $a \sin(\theta)$, έχουμε την αναλογία

$$\frac{\text{Διαφορά φάσης}}{2\pi} = \frac{\text{Διαφορά δρόμου}}{\lambda}$$

και συνεπώς

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (a \sin(\theta))$$

και άρα, λόγω και της (1)

$$\alpha = \varphi/2 = (\pi a/\lambda) \sin\theta$$

Η ένταση I_{θ} είναι τώρα ανάλογη προς το τετράγωνο του πλάτους

$$I_{\theta} = I_m \left(\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right)^2 \quad (2)$$

με $\alpha = \varphi/2 = (\pi a/\lambda) \sin\theta$

Μέγιστα στην κατανομή έντασης περίθλασης

Η συνθήκη μεγίστων είναι

$$d \sin\alpha - d\alpha \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2 = 0$$

και τούτο συμβαίνει όταν $\tan\alpha = \alpha$

Η εξίσωση αυτή λύνεται γραφικά, και προσεγγιστικά δίνει το αποτέλεσμα $\alpha = \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$

Μικροσκοπία Κοντινού Πεδίου:

<http://ej.iop.org/links/q17/zQrFpfUXVRrjzpLSPRcBKg/r605r2.pdf>

Wave optics:

<http://www.nano-optics.ethz.ch/teaching/pcix/pdf/saleh02.pdf>

Fourier Optics:

Rayleigh's limit:

<http://ej.iop.org/links/q09/mt5lbrnJe39mGV6ksXQMTg/rpv14i1p95.pdf>

<http://www.nano-optics.ethz.ch/teaching/pcix/pdf/saleh04.pdf>

Φάμπρυ Περό εφαρμογές:

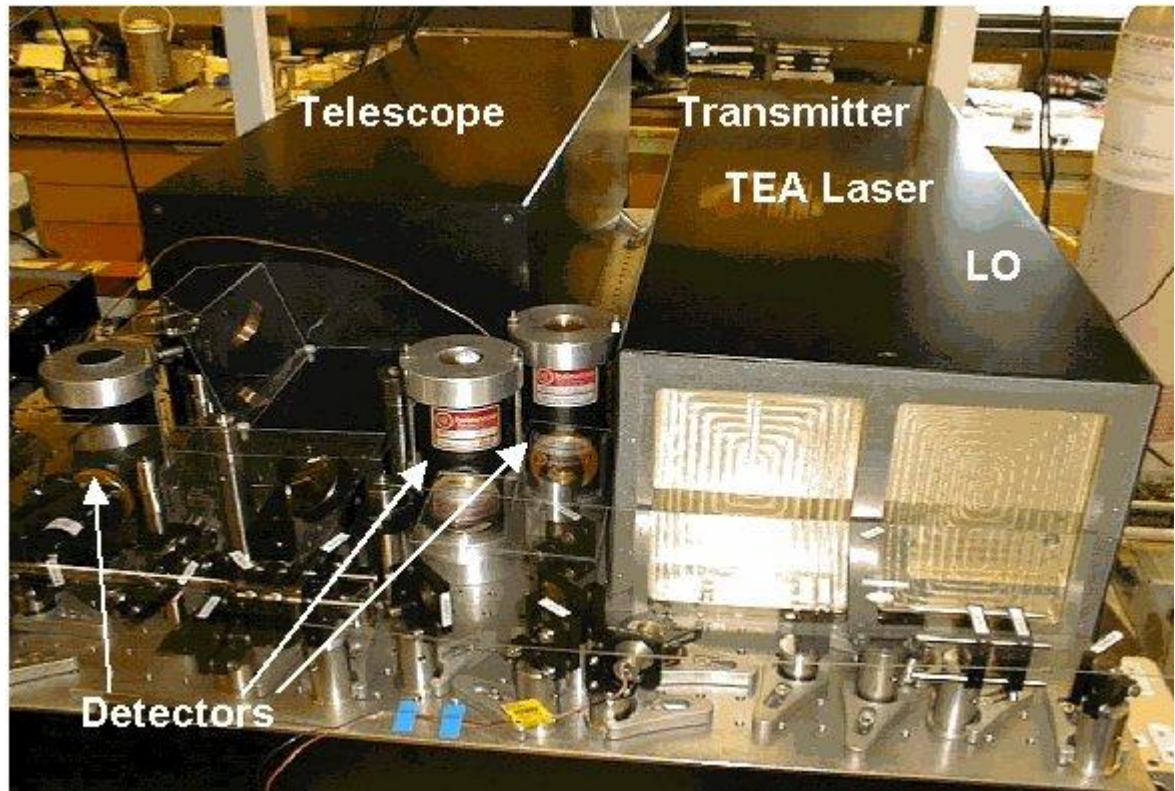
- 1) **A Near-Infrared Diode Laser Spectrometer of High Resolution and Wide Scanning Range** • *Journal of Molecular Spectroscopy, Volume 216, Issue 1, November 2002, Pages 24-29*
Michael Thompson, John G. Baker and Nicholas J. Bowring
- 2) **Probing molecular species by cavity ringdown laser absorption spectroscopy, application to the spectroscopy and dynamics of jet-cooled NO₂** (science direct) *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IV - Physics, Volume 2, Issue 7, September 2001, Pages 929-964*
Patrick Dupré
- 3) **Observations of vertical winds in the thermosphere with a Fabry-Perot Doppler imager at Syowa station, Antarctica** • (science direct)
Advances in Space Research, Volume 24, Issue 11, 1999, Pages 1439-1442
T. Sakanoi and H. Fukunishi
- 4) **Response of scanning Fabry-Pérot interferometer to the speed dependent Voigt profile** • ARTICLE
Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, Volume 53, Issue 5, May 1995, Pages 493-500
R. Ciuryło, A. Bielski, S. Brym and J. Jurkowski

Scanning probe Microscopy:

<http://www.sci.port.ac.uk/spm/overview.pdf>

<http://spm.phy.bris.ac.uk/techniques/>

<http://www.eng.yale.edu/reedlab/research/spm/spm.html>



249

<http://repairfaq.ece.drexel.edu/sam/CORD/leot/>

Space qualified FP filter:

<http://sbir.gsfc.nasa.gov/SBIR/successes/ss/5-059text.html>

Γρηγορή εισαγωγή στα κύματα:

http://www.acs.psu.edu/users/sparrow/CALA/U3L1_v7/U3L1_v7.html

Φωτονικοί Κρύσταλλοι (θεωρία):

<http://www.elettra.trieste.it/experiments/beamlines/lilit/htdocs/people/luca/tesihtml/node3.html>

Εισαγωγή σε φωτονικούς κρυστάλλους:

http://guava.physics.uiuc.edu/~nigel/courses/463/Essays_2004/files/crecea.pdf

Airguiding in PBG fibers:

http://asger.hjem.wanadoo.dk/papers/JOSAB_20_2046.pdf

Φίλτρα με φωτοεφρακτιωε:

<http://techdigest.jhuapl.edu/td1703/schuster.pdf>

Acceleration measurement:

<http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-12132000-162210/unrestricted/chapter1-introduction.pdf>

<http://www.microsolutions.com/index.html>

Ανίχνευση σεισμών:

<http://ej.iop.org/links/q72/hffyQ3cscRyYNXKLgi6Ixw/pev18i2p64.pdf>

Πρόσθετες Αναφορές:

<http://www.amanogawa.com/archive/docs/EM1.pdf>

<http://www.amanogawa.com/archive/docs/EM7.pdf>

http://www.micronoptics.com/tele_components_over.htm

http://www.optics.arizona.edu/Milster/505%20LAB/2002/lab_note/lab7.pdf

Telecom applications:

http://intranet2.fpms.ac.be/telecom/paper/Sciamanna_OL_1543.pdf

Μετρήσεις υπερηχητικών ταχυτήτων με FabryPerot:

<http://ej.iop.org/links/q11/nYTzGhn26ZSNDiBKCwE2wA/jev4i3p173.pdf>

Σημειώσεις Οπτικών Κυματοδηγών :

<http://www.utdallas.edu/~cantrell/ee6310/lectures/optical-wg.pdf>

http://www.shef.ac.uk/physics/teaching/phy205/lecture_18.htm

http://www.shef.ac.uk/physics/teaching/phy205/lectures_20_and_21.htm

Αναφορές σε τηλεσκόπια:

<http://nsokp.nso.edu/mp/cphistory.html> (διαθέσιμο στο home laptop directory waves2005)

Κατάλογος τιμηθέντων με βραβείο Νόμπελ Φυσικής:

<http://www.cartage.org.lb/en/themes/Sciences/Physics/aboutphysics/physicstimeline/1900/1900.htm>

από 1941 ως 1960:

http://www.truephysics.com/history/timeline/timeline1941_1960.html

61 ως 80:

http://www.truephysics.com/history/timeline/timeline1961_1980.html

81 ως 98:

http://www.truephysics.com/history/timeline/timeline1981_1999.html

00:

<http://www.truephysics.com/history/timeline/timeline2000.html>

Fresnel zone plates:

<http://www.elmagn.chalmers.se/courses/feynman/seminar2.ppt#1>

Planning of student works for year 2006

- a. Telescope mirror polishing
- b. Interferometer mirror polishing
- c. Liquid crystals (Hecht Optics p. 371), LEDs

Φράγματα Περίθλασης

Φράγματα τηλεπικοινωνιών:

Όταν θέλουμε να θεωρήσουμε την συνδυασμένη περίθλαση με συμβολή, εξετάζουμε πρώτα για απλότητα την συμβολή από δύο σχισμές που έχουν πεπερασμένο εύρος. Τότε, αναμένουμε πως το συνδυασμένο αυτό αποτέλεσμα, θα έχει τη μορφή

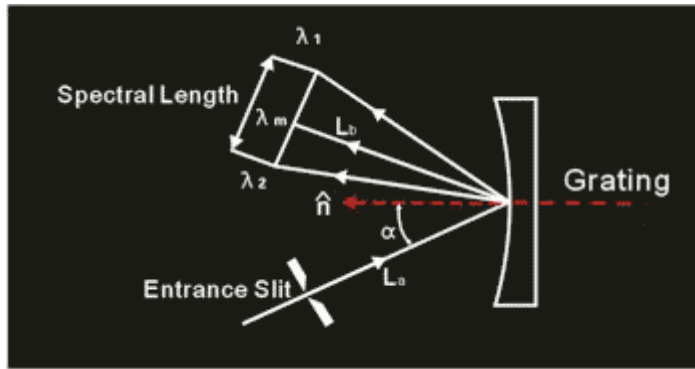
$$I_{\theta} = I_0 \cos^2 \delta / 2 \sin^2 \alpha^2 / \alpha^2, \text{ όπου } \delta = 2\pi f \sin \theta / \lambda, \text{ και } \alpha = (\pi / \lambda) d \sin \theta$$

Αναφορές:

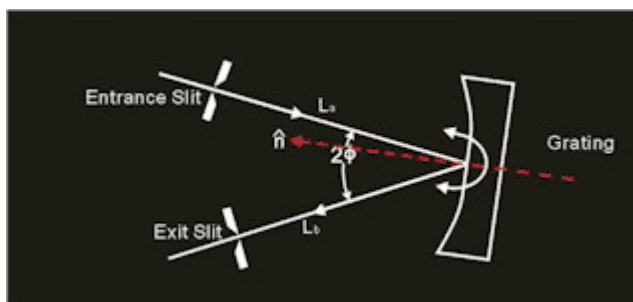
http://www.gratingworks.com/products/flat_field_concave_grating.htm

LCD Phd : http://eigg.res.cse.dmu.ac.uk/publications/surman_phd_chap6.pdf

>>>>>>>>>>http://eigg.res.cse.dmu.ac.uk/publications/surman_phd_chap5.pdf



Ολογραφικά κοίλα φράγματα:



252

Κεραίες:

Μία γραμμική συστοιχία κεραιών. Σαν παράδειγμα γραμμικής συστοιχίας δεκτών σύμφωνων κυμάτων θεωρείστε ένα «ραδιοσυμβολόμετρο» που αποτελείται από τέσσερις ισαπέχουσες ραδιοφωνικούς δέκτες-κεραίες. Οι δέκτες απορροφούν εκείνα τα μέρη του προσπίπτοντος μετώπου κύματος που προσπίπτουν στην ενεργό επιφάνεια εκάστης κεραίας, μετατρέποντας την ενέργεια του προσπίπτοντος ηλεκτρομαγνητικού κύματος συχνότητας f σε ηλεκτρικό σήμα ίδιας συχνότητας f . Κάθε σήμα είναι σε φάση με το αντίστοιχο προσπίπτον κύμα, και είναι σε μέγεθος ανάλογο της έντασης (?) του κύματος. Τα καλώδια σήματος προσαρμόζονται, σε μήκος, ώστε να δίνουν ίσες διαδρομές από έκαστον δέκτη στην συνένωση J , και κατόπιν στον ενισχυτή.

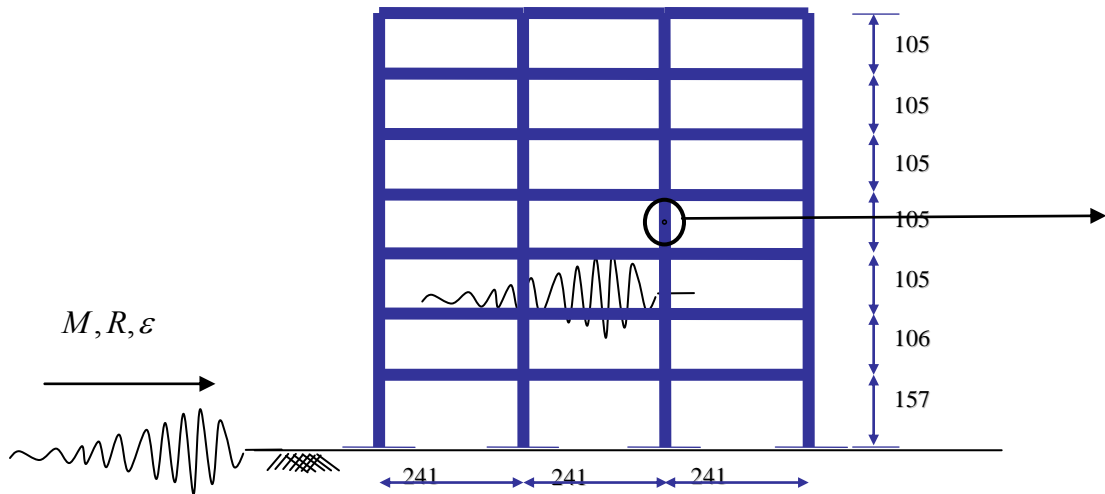
in each signal cable

Έτσι, η συστοιχία κεραιών-δεκτών δρα σαν 4 σύμφωνες πηγές κυματικής διαταραχής, κατά τρόπον όμοιο (ή ανάλογο) προς την χρήση από τον Thomas Young ενός ζεύγους σχισμών για παραγωγή δύο συμφώνων πηγών.

Η διαφορά φάσης μεταξύ διαδοχικών κεραιών θα είναι

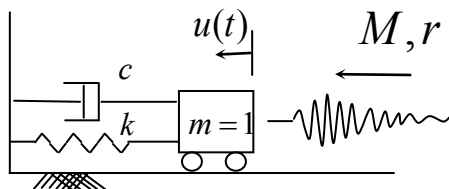
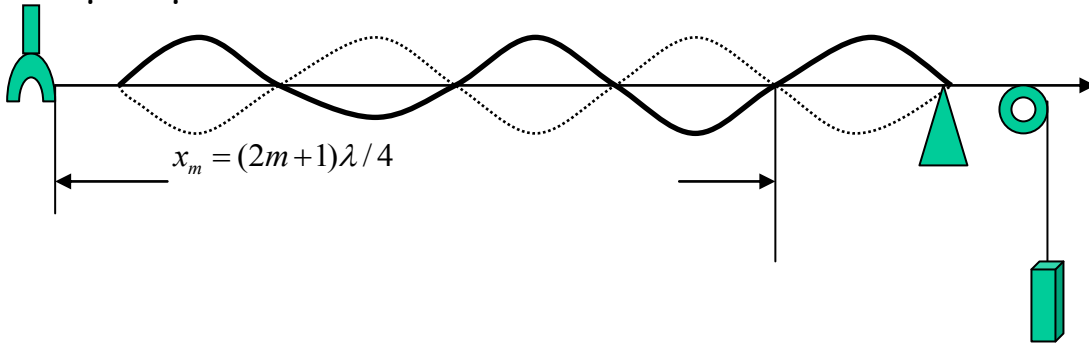
$$\varphi = (2\pi/\lambda) d \sin \theta$$

και επειδή είναι γνωστά τα μεγέθη d , τότε μπορούμε από παρατηρήσεις με γνωστό θ , να βρούμε το λ ή από παρατηρήσεις γνωστού λ να βρούμε το θ της πηγής.



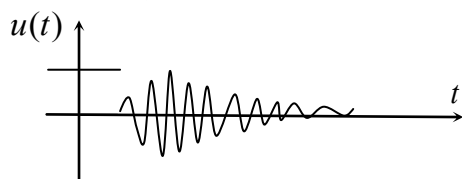
253

Στάσιμα Κύματα:

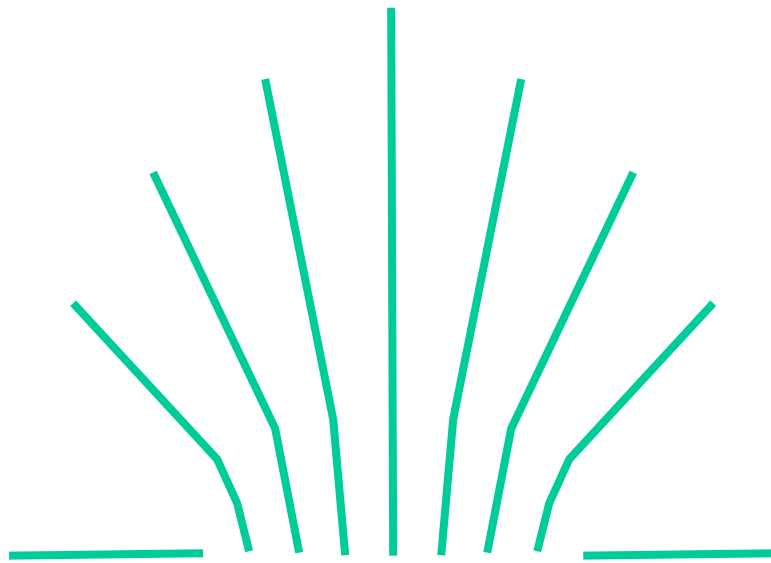


T_1 = period of the oscillator

ξ = damping coefficient



$$S_a(T_1, \xi) = \frac{4\pi^2}{T^2} \max(\text{abs}(u(t)))$$



Πόλωση (αρχείο :WavesOverview...ppt)

254

Ελλείπουσες τάξεις:

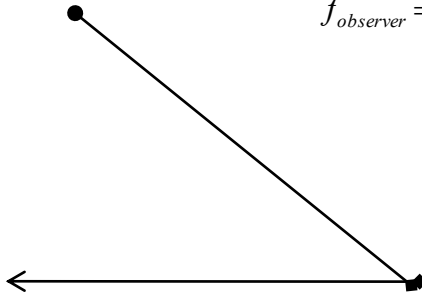
<http://daveb.net/physics/phys47.pdf>

Ultrasonic Doppler blood-flow instrument (血流仪)

Ultrasonic Doppler blood-flow instrument is based on the Doppler effect. The probe of this instrument consists of two crystals, one is transmitter and the other is receiver. The velocity of blood-cell (血细胞) flow can be obtained by this instrument.

$$f_{\text{blood_cell}} = \frac{v_{\text{sound}} + v_o \cos \theta}{v_{\text{sound}}} \cdot f_{\text{generator}}$$

$$f_{\text{observer}} = \frac{v_{\text{sound}} \pm v_o \cos \beta}{v_{\text{sound}} \pm v_s \cos \alpha} \cdot f_{\text{source}}$$



$$\begin{aligned} f_{\text{receiver}} &= \frac{v_{\text{sound}}}{v_{\text{sound}} - v_s \cos \theta} \cdot f_{\text{blood_cell}} \\ &= \frac{v_{\text{sound}} + v_{\text{blood}} \cos \theta}{v_{\text{sound}} - v_{\text{blood}} \cos \theta} f_{\text{generator}} \end{aligned}$$

255

The difference of the generating and receiving frequencies is Doppler frequency displacement

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_{\text{receiver}} - f_{\text{generator}} \\ &= \frac{2v_{\text{blood}} \cos \theta}{v_{\text{sound}} - v_{\text{blood}} \cos \theta} f_{\text{generator}} \end{aligned}$$

The speed of blood flow could be calculated using above formula

$$v_{\text{blood}} = \frac{v_{\text{sound}}}{2 \cos \theta} \cdot \frac{\Delta f}{f_{\text{emitting}}}$$

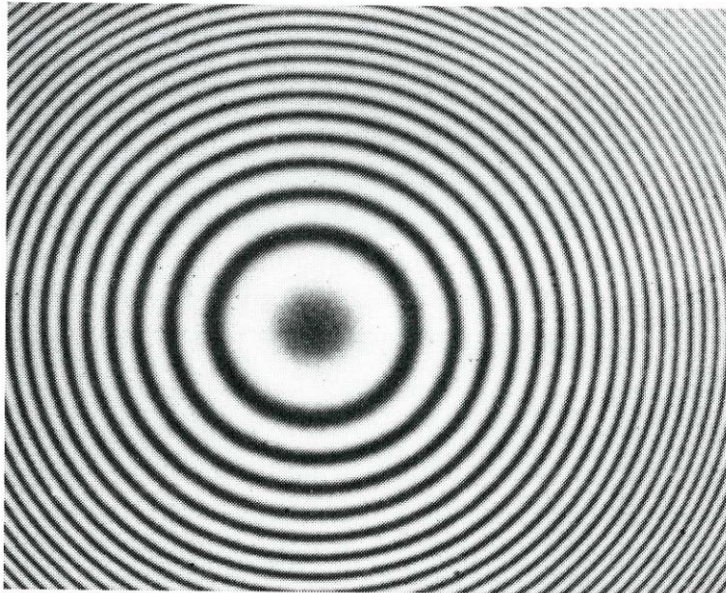
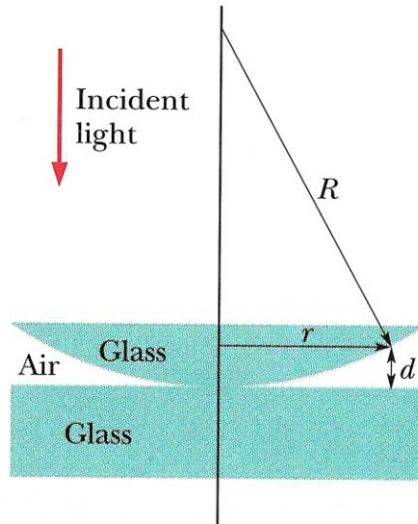
Παρμένο από το αρχείο : WavesMedicine-chapter4b.ppt

Δακτύλιοι του Νεύτωνα:

Newton's Rings



Figure 5



257

Radius, rm , of a "far zone" – a fringe of higher order, $m \gg 1$, is:

$$r_m = \sqrt{\lambda R / m}$$

-
- **Electromagnetic waves contain momentum.**
 - **The momentum transferred to a surface depends on the area of the surface. Thus Pressure is a more useful quantity.**
 - **If a surface completely absorbs the incident light, the momentum gained by the surface is,**
-

$$p = \frac{U}{c}$$

We use the above expression plus Newton's Second Law in the form $F=dp/dt$ to derive the following expression for the Pressure

$$P_{abs} = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{A} \frac{dU}{dt} \right) = \frac{I}{c}$$

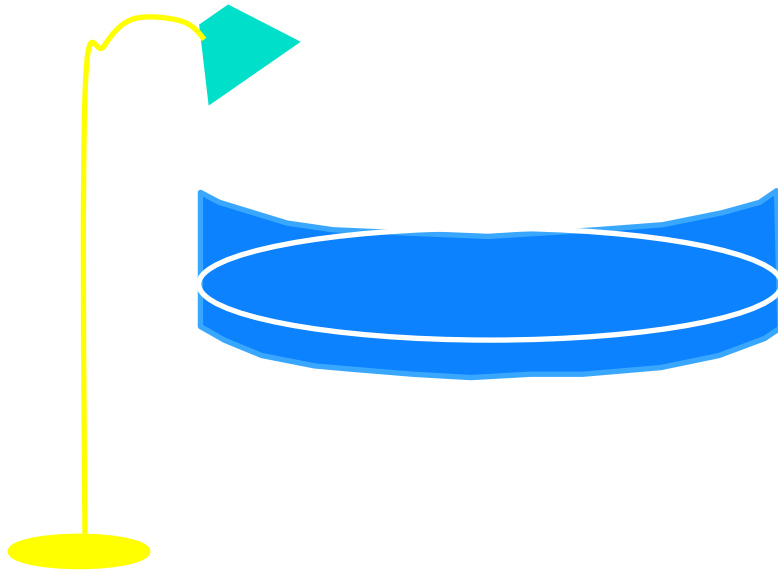
258

If the surface completely reflects the light, conservation of momentum indicates the light pressure will be double that for the surface that absorbs

$$P_{refl} = \frac{2I}{c}$$

Πρόβλημα:

What is the force exerted on a disk ($r=0.5$ cm) floating on the water surface by a 100 W light bulb placed 2.5 m from the disk at an angle of 37° as shown ?



-
- **We know how to calculate the radiation pressure on the disk:**
-

259

Λύση:

Ιδείτε αρχείο: sy19UnivConnecticut

Φράγμα Ανάκλασης:

Παρμένο από RobertsonsBasicSpectroscop...

Αναφορές

- Κυματοδηγοί, Μικροκυματικές συσκευές κλπ:

<http://www.technology.niagarac.on.ca/courses/elnc423/notes/423micro.ppt#81>

- Εισαγωγή σε επεξεργασία ψηφιακών σημάτων:

<http://faculty.etsu.edu/blanton/Impedance%20Matching.ppt>

- Fields and Waves course:

hibp.ecse.rpi.edu/~connor/education/Fields/summer/lectures/FWI-Lec6.ppt

Η διαλεξη lec6 είναι πολύ καλή για γραμμές μεταφοράς

hibp.ecse.rpi.edu/~connor/education/Fields/summer/lectures/FWI-Lec20.ppt

- Transmission Lines Israel :

technology.cs.hcc.cc.il.us/faculty/chris/

data%20comm/Power%20Points/Ch14%20transmission%20lines.ppt

- Γραμμές μεταφοράς :Πολύ αναλυτικό!!!

<http://eeweb.poly.edu/faculty/bertoni/docs/02WaveProp.ppt>

- Τερματισμός Κυμάτων: Περιλαμβάνει μουσικά όργανα

http://icb.olin.edu/spring_05/eds/lectures/Wave%20Termination.ppt#23

- Εργαστήριο Δοκιμών : <http://bears.ece.ucsb.edu/class/ece224b/>

- http://www.ece.umd.edu/courses/enee204-2.S2000/Lecture_31/Lecture_31.PPT#1

- Laser Modes :

Εργαστήριο : <http://www.atsweb.neu.edu/mark/APL/OpenCavityLaser2.pdf>

Εργαστήριο με Mach Zehnder:

<http://www.physics.gla.ac.uk/Physics3/Lab%20scripts/Laser%20Modes%20Laboratory.pdf>

- <http://www.optics.rochester.edu/workgroups/novotny/papers/novotny01b.pdf>

- Εναγγαλισμός πεδίου λείζερ – μοναδικού ατόμου

<http://info.phys.unm.edu/~deutschgroup/Publications/PRA42308.pdf>

- Εργαστήριο συμβολόμετρο Fizeau: surface irregularities FabryPerot

http://www.optics.arizona.edu/milster/505%20LAB/2002/lab_note/lab7.pdf

-Berkeley Physics Lab:Lasers:

<http://www-inst.eecs.berkeley.edu/~ee119/Lasers.post.pdf>

- Ελεγχος σταθερότητας συστήματος laser, Ολλανδία:

http://www.cs.ru.nl/ita/publications/mastertheses/200112_michiel_alsters/Final_v1.21.pdf

Waves Overview , Univ. Iowa:

<http://www.engineering.uiowa.edu/~advem/Lecture/170%20-%2016.ppt#31>

260

Βιοαισθητήρες με οπτικούς κυματοδηγούς (διατριβή):

http://textorgroup.ch/pdf/publications/phdtheses/9/Hofer_PhD_2000.pdf (300

σελίδες)

Rapid, differential microthermometry using Zeeman interferometry

Applied Physics Letters

Applied Physics Letters -- January 16, 1989 -- Volume 54, Issue 3, pp. 289-291

[Roger G. Johnston](#)

Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico 87545

(Received 19 September 1988; accepted 7 November 1988)

Κυματοδηγοί:

nrotc.unm.edu/ns201/Lecture%2003%20-%20Radar%20Principles%20and%20Systems.ppt

<http://www.lancs.ac.uk/users/spc/teaching/py221/part4-v1-2.pdf>

1 . Modelling and Optimizaton VCSLAs

<http://enr.ucsb.edu/~piprek/piprek01pw.pdf>

2. Diffraction gratings

<http://www.jobinyvon.com/usadivisions/oos/index.htm>

3. Fast light –slow light:

[http://physics.pdx.edu/~larosaa/Applied_Optics_464-](http://physics.pdx.edu/~larosaa/Applied_Optics_464-564/Projects_Presented/2005_David_Jun_Fast_light_Slow_Light_Optics_Presentation.ppt#1)

[564/Projects_Presented/2005_David_Jun_Fast_light_Slow_Light_Optics_Presentation.ppt#1](http://physics.pdx.edu/~larosaa/Applied_Optics_464-564/Projects_Presented/2005_David_Jun_Fast_light_Slow_Light_Optics_Presentation.ppt#1)

4. Diffraction grating monochromators:

<http://www-esg.lbl.gov/Personnel/howells/SSGmonosSGM.pdf>

5. Electrical analogue to diffraction grating:

<http://ej.iop.org/links/q27/p6cI+mELugAclLdpVit3pg/pev5i6p332.pdf>

6. Electromagnetic theory diffractive optics:

<http://focus.hut.fi/~en/dr.pdf>

6. Grating theory:

http://www.cfai.dur.ac.uk/fix/projects/dispersion/grating_spectroscopy_theory.pdf

8. Modeling photonic crystal fibers • ARTICLE

Advances in Applied Mathematics, In Press, Corrected Proof, Available online 15 November 2005,

Sofiane Soussi

9. Λυμένες ασκήσεις:

<http://www.physics.orst.edu/~tate/COURSES/ph424/hwk/hw1sol.pdf>

10. Μαθηματική Φυσική:

<http://people.uncw.edu/hermanr/phy311/MathPhysBook/>

11. Introduction to Fourier Transform:

http://info.phys.unm.edu/~deutschgroup/Classes/Phys491F03/Supplements/Fourier_Transform.pdf

12. STUDYING ELECTROMAGNETIC WAVE-GUIDING AND RESONATING DEVICES

<http://lib.tkk.fi/Diss/2004/isbn9512269805/isbn9512269805.pdf>

14. Infrared filters lab:

http://www.irfilters.reading.ac.uk/library/technical_data/substrate_optical_properties/page01.htm

Μάθημα 15-12—05 τέλος

Μάθημα 19-12—05 αρχή

Ολοκλήρωση ιδιοτήτων Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων

Σύνθετη αντίσταση αγωγίμου μέσου σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Η σύνθετη αντίσταση ενός μέσου χωρίς απώλειες είναι πραγματικό μέγεθος. Για μία γραμμική μεταφοράς, είναι

$$Z_0 = V_+/I_+ = (L_0/C_0)^{1/2}$$

Ενώ για το ηλεκτρομαγνητικό κύμα σε διηλεκτρικό

$$Z = E_x/H_y = (\mu/\epsilon)^{1/2}$$

(ίδτετε και σελ. 192 Γραμμές μεταφοράς)

Αν έχουμε και απώλειες, όπως φαίνεται από την περίπτωση γραμμών μεταφοράς (βάζοντας εν σειρά προς το L_0 μία ωμική αντίσταση R , και εν παραλλήλω προς το C_0 Ωμική αντίσταση διαρροών G_0) έχουμε:

$$Z = [(R_0 + i\omega L_0) / (G_0 + i\omega C_0)]^{1/2}$$

Συμβολή από πολλαπλές σύμφωνες πηγές

Τρίτο σύνολο ασκήσεων:

Άσκηση 1. Μέτρηση δείκτη διάθλαση αέρα με χρήση συμβολομέτρων.

Στη διάταξη ενός συμβολομέτρου Michelson, τοποθετούμε σε έναν από τους δύο βραχίονες ένα κυλινδρικό δοχείο του οποίου οι βάσεις είναι επίπεδα πλακίδια, κάθετα στην διαδρομή του φωτός της πηγής. Να δείξετε πως η διαφορά φάσης που προκύπτει όταν η ατμοσφαιρική πίεση εντός του δοχείου μεταβάλλεται αργά αργά από πίεση πρακτικά ίση με μηδέν ως πίεση P (τυπικά ίση με την ατμοσφαιρική) μεταβάλλεται, και έτσι η εικόνα κροσσών σε ένα πέτασμα αλλάζει με εμφάνιση διαδοχικών μεγίστων και ελαχίστων έντασης στο κέντρο του συστήματος κροσσών. Ειδικότερα, δείξετε την ισχύ της σχέσης

$$n(P)-1 = \mathcal{N}\lambda/d$$

όπου \mathcal{N} το πλήθος των κροσσών που παρατηρούνται κατά την ως άνω μεταβολή της πίεσης, d το μήκος του κυλίνδρου ανάμεσα στις εσωτερικές επιφάνειες των δύο γυάλινων βάσεων, και λ το μήκος κύματος της ακτινοβολίας.

Άσκηση 2.

Αμέσως μετά τις δύο σχισμές ενός πειράματος τύπου Thomas Young τοποθετείται επίπεδη πλάκα γυαλιού πάχους 6 mm. Στη συνέχεια, με κατάλληλη διεργασία επιστρώνουμε στο τμήμα του γυαλιού που αντιστοιχεί στη δεύτερη σχισμή, με πολύ βραδύ και σταθερό ρυθμό, ατμούς SiO_2 που έχει ουσιαστικά την ίδια σύσταση με το γυαλί, μετά την συμπύκνωση των πάνω στο γυαλί. (α) Να εξηγήσετε τι είδος μετατόπισης της εικόνας των κροσσών συμβολής θα παρατηρήσουμε σε ένα πέτασμα σε μεγάλη απόσταση από τις 2 σχισμές, με χρήση λέιζερ με $\lambda=632.8$ nm, εάν το πάχος του υλικού που θα επιστρωθεί είναι ίσο με $5\lambda/n$, όπου n ο δείκτης διάθλασης του συμπυκνωμένου SiO_2 . (β) Να σχεδιάσετε την αναμενόμενη εικόνα της έντασης συναρτήση της γωνίας θ από τον άξονα συμμετρίας της πειραματικής διάταξης, αν το πάχος της επίστρωσης έχει γίνει ίσο με $\beta_1) \lambda/8n$, και $\beta_2) \lambda/4n$.

262

Άσκηση 3. Συμβολόμετρο Doppler

Θεωρήστε ένα συμβολόμετρο Fabry-Perot με απόσταση κατόπτρων 10 cm, και απόκλιση από επιπεδότητα στα δύο κάτοπτρα της τάξης του $\lambda/200$, για $\lambda=632.8$ nm. Ο παραλληλισμός των δύο κατόπτρων μεταξύ των έχει απόκλιση από ιδανικό παραλληλισμό της τάξης των $\lambda/100$ για διάμετρο κατόπτρων 3 cm. Αν η δέσμη laser σκεδαστεί κατά 50% με μόρια που έχουν μη μηδενική κινητική ενέργεια, και συνεπώς η δέσμη δίνει λόγω οπισθοσκέδασης ένα κυματικό αριθμό $k'=k * 1.002$ (μετατοπισμένη λόγω φαινομένου Doppler). Ωστόσο, η δέσμη σκεδάζεται και από σωματίδια σκόνης, και δίνει με οπισθοσκέδαση (κατά ένα ποσοστό 50%) κύμα με κυματικό αριθμό $k=2\pi/\lambda$. Αν η ανακλαστικότητα των κατόπτρων του συμβολομέτρου είναι 99.0 %, ενώ η διαπερατότητα των είναι 0.3%, να απαντήσετε αν το συμβολόμετρο μπορεί να διακρίνει τις δύο κορυφές από τα κύματα με κυματικούς k και k' .

Άσκηση 4. Περίθλαση από 1 σχισμή

A. Υπολογίστε προσεγγιστικά το γωνιακό εύρος στην περίθλαση ενός επιπέδου κύματος, μήκους κύματος λ , από μία σχισμή εύρους d . **B.** Να προσδιορίσετε προσεγγιστικά τις γωνιακές θέσεις των τοπικών μεγίστων της έντασης καθώς τις

αντίστοιχες εντάσεις σε σχέση με την μέγιστη ένταση περίθλασης. Ειδικότερα, δείξτε, ότι:

$$I_{n,μεγ} = \frac{I_0}{(n+1/2)^2 \pi^2}$$

Άσκηση 5. (α) Να προσδιορίσετε αν ένα φράγμα διάδοσης με εύρος 1 cm, και συχνότητα χαραγών 3600 χαρ./mm, έχει την δυνατότητα να αναλύσει μία δυάδα στο φάσμα ενός ατόμου με $\lambda_1=266.4\text{nm}$ και $\lambda_2=266.5\text{nm}$. (β) Αν το εύρος εκάστης σχισμής είναι 92.5 nm, να παραστήσετε γραφικά τη γωνιακή εξάρτηση της περίθλασης από εκάστη σχισμή, και να απαντήσετε κατά πόσο κάποια τάξη του φράγματος είναι ελλείπουσα. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (γ) Απαντήστε σχετικά με την ελλείπουσα τάξη αν το φράγμα έχει 720 χαρ./mm.

Λύση:

Είναι,

$d \sin\theta = \lambda$, και $\sin\theta = \lambda/d$. Είναι $\lambda/d = 266 \mu\text{m} / (1000 \mu\text{m} / 3600) = 0.9576$. Άρα, η γωνία περίθλασης είναι περίπου $\theta = \arcsin 0.9576$

Τότε, η διακριτική ικανότητα είναι:

$\Delta\lambda = N\lambda = 0.266 / (36000 \times 1) = .007 \text{ nm}$. Άρα, υπάρχει η απαραίτητη διακριτική ικανότητα.

263

15. Microwaves Physics and Techniques, Nassari Argon Lab

<http://www.aps.anl.gov/asd/people/nassiri/USPAS2003/Lecture3.pdf>

Waveguides:

<http://www.aps.anl.gov/asd/people/nassiri/USPAS2003/Lecture7.pdf>

Microwave network analysis:

<http://www.aps.anl.gov/asd/people/nassiri/USPAS2003/Lecture9.pdf>

Modern Concentrators History:

<http://www.ies-def.upm.es/ies/CRATING/Chapter3.pdf>

<http://www.ies-def.upm.es/ies/CRATING/Chapter4.pdf>

Concentrators Qualification Standards:

<http://www.nrel.gov/docs/fy04osti/35346.pdf>

Εισαγωγή στην Οπτική MIT Μέρος I:

- [http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Aeronautics-and-Astronautics/16-](http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Aeronautics-and-Astronautics/16-851Fall2003/98BDB6A5-03C2-44F4-80AF-154792EB3416/0/16_optics_1.pdf)

[851Fall2003/98BDB6A5-03C2-44F4-80AF-154792EB3416/0/16_optics_1.pdf](http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Aeronautics-and-Astronautics/16-851Fall2003/98BDB6A5-03C2-44F4-80AF-154792EB3416/0/16_optics_1.pdf)

- Πολυμερή:

[http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-02192003-](http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-02192003-120507/unrestricted/Chapter_2.pdf)

[120507/unrestricted/Chapter_2.pdf](http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-02192003-120507/unrestricted/Chapter_2.pdf)

-MIT:

<http://www.cse.sc.edu/~tiecheng/csce590/download/introduction%20to%20optics.ppt#29>

Intensity of Waves: Ακουστική

<http://www.physics.cornell.edu/courses/p204/lectures2004/Lecture7.pdf>

Αναλυτικός Ηλεκτρομαγνητισμός, Ισραήλ:

<http://minerva.tau.ac.il/physics/bsc/3/3109/>

<http://minerva.tau.ac.il/physics/bsc/3/3109/exercises/03/ex7.pdf>

<http://minerva.tau.ac.il/physics/bsc/3/3109/solutions/03/sol7.pdf>

Κβαντομηχανική:

<http://qfizik.upm.edu.my/phy3601/lecture06.pdf>

Κυματα, Κβαντα , Σωματίδια, Νουβέλα:

http://books.lulu.com/items/volume_4/166000/166271/2/preview/Chapter_13.pdf

http://faculty.capebretonu.ca/dingraham/physics122/Physics_122_ch15.pdf

Ηχος:

http://faculty.capebretonu.ca/dingraham/physics122/Physics_122_ch16.pdf

Cherenkov, Τσιριγώτης EAP:

<http://www.eap.gr/tsirigotis/PhD/contents.htm>

http://www.eap.gr/tsirigotis/PhD/Chapter02_Neutrino.pdf

http://www.eap.gr/tsirigotis/PhD/Chapter03_NeutrinoDetection.pdf

http://www.eap.gr/tsirigotis/PhD/Chapter04_MuonDetection.pdf

http://www.eap.gr/tsirigotis/PhD/Chapter08_DAQ.pdf

http://www.eap.gr/tsirigotis/PhD/Chapter09_Simulation2.pdf

http://www.eap.gr/tsirigotis/PhD/Chapter10_SignalProcessing.pdf

http://www.eap.gr/tsirigotis/PhD/Chapter14_CosmicRayMeasurement.pdf

264

Applied Multilayers LEDs:

http://www.vitexsys.com/new/downloads/mrs_02%20.pdf

Lithography EUV:

<http://www.intel.com/technology/itj/q31998/pdf/euv.pdf>

Heat Transfer in Dielectrics using Femtosecond lasers:

<http://www.intel.com/technology/itj/q31998/pdf/euv.pdf>

Ενεργειακή έκθεση Νανοτεχνολογίας, Γερμανία Centech.com:

<http://www.intel.com/technology/itj/q31998/pdf/euv.pdf>

Εξομοίωση φαινομένων Κυματικής:

-
1. **Ηλεκτρομαγνητισμός :** <http://www.e-yliko.gr/physyliko/physilektr.htm#mag>
 2. **Ταλαντώσεις σε Κυκλοτρόνιο:**
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/viewtopic.php?t=50>
 3. **Κυματικά φαινόμενα, αναλυτικά:** <http://www.e-yliko.gr/physyliko/physatom.htm#wav>
 4. **Το πιάνο:** <http://lectureonline.cl.msu.edu/%7Emmp/applist/sound/sound.html>
 5. **Συμβολή, movie:**
http://www.colorado.edu/physics/2000/schroedinger/big_interference.html
 6. <http://www.ngsir.netfirms.com/englishhtm/TwaveA.htm>
 7. <http://www.ngsir.netfirms.com/englishhtm/Interference.htm>
 8. **Φαινόμενο Doppler :** <http://webphysics.ph.msstate.edu/jc/library/15-6/index.html>
-

Ακτινοβολία, έκθεση σε:

<http://courses.washington.edu/envh453a/Section%2012.pdf>

Διαλέξεις μαθημάτων:

<http://www.ece.arizona.edu/~ece459/>

Physics of Piano:

Phys332_Wk.....

The Physics of Music:

<http://positron.ps.uci.edu/~dkirkby/music/html/lectures/Lecture1.pdf>

<http://positron.ps.uci.edu/~dkirkby/music/html/lectures/Lecture10.pdf>

<http://positron.ps.uci.edu/~dkirkby/music/html/lectures/Lecture11.pdf>

<http://positron.ps.uci.edu/~dkirkby/music/html/lectures/Lecture13.pdf>

<http://positron.ps.uci.edu/~dkirkby/music/html/lectures/Lecture14.pdf>

Επιστήμη και Τεχνολογία Μουσικών Ηχων:

www.cas.unt.edu/~matteson/1251-001/mwf07.ppt

Φωνητική:

<http://www.ling.upenn.edu/courses/ling520/lectures/lecture5/lecture5.ppt>

Concave Grating:

<http://www.chem.wvu.edu/chem210/hw/hw03ans.pdf>

Normal Modes Physics 118 Sfasu edu:

www.physics.sfasu.edu/markworth/Phy118/Chapter7.ppt

GPS Receivers:

1. <http://www.septentrio.com/papers/SimskySleewaegenEUREF2005article.pdf>
2. <http://www.estec.esa.nl/wsmwww/finalreport/ChipideaFrontEndFeasibilityStudy.pdf>
3. <http://shiba.iis.u-tokyo.ac.jp/member/current/dinesh/research/GNSS/GPS/SoftwareGPS.pdf>
4. Γαλλικού Technical Status:
http://www.hessen-it.de/mm/03_John_Dow.pdf

Galileo GPS Status:

<http://www.oosa.unvienna.org/SAP/act2005/vienna/presentations/01-08.pdf>

Αρχείο: GalileoOverviewAilio01-08.pdf

<http://www.septentrio.com/papers/SimskyGalileoReceiversIONGNSS2005.pdf>

[http://forschung.unibw-](http://forschung.unibw-muenchen.de/papers/rcg6nq4z6dezsdsqsnrhtiaal9e7wx.pdf)

[muenchen.de/papers/rcg6nq4z6dezsdsqsnrhtiaal9e7wx.pdf](http://forschung.unibw-muenchen.de/papers/rcg6nq4z6dezsdsqsnrhtiaal9e7wx.pdf)

Αρχείο: SimskyGalileoReceiversIONGNSS2005DevelopmentStrategy

5. Current status of GPS Univ. Montana:

www.montana.edu/places/gps/lres357/slides/GPSstatus.ppt

6. Εισαγωγή στο GPS:

www.nps.gov/gis/gps/gps4ics/2_PreWork/PreWork.ppt

7. <http://www.physics.nus.edu.sg/einstein/lect6/lect6.ppt>

8.
www.soe.ucsc.edu/classes/cmpe003/Spring05/Lecture_fifteen.ppt

http://physics.ucsd.edu/~tmurphy/phys10/lectures/19_radio.ppt#5

9. Συμβολή, Peter Manson:

<http://www.physics.otago.ac.nz/teaching/PHSI110/manson/Interference.PDF>

Αρχείο: InterferencePeterManson
