μαθηματα ηλεκτρο-μαγνητισμου

κατα τις παραδοσεις
του καθηγητη κ. Α. Φιλιππα

Αθηνα 1976

Οἱ σημειώσεις αὐτές ἀποτελοῦν σύντομη περίληψη τοῦ μαθήματος πού διδάχθηκε στούς δευτεροετεῖς σπουδαστές τοῦ Ἐθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου. Ἡ ἔκδοσή τους ἐπιταχύνθηκε πολύ ἀπό τή συμβολή τῆς ὁμάδας σπουδαστῶν πού ἐπιμελήθηκε γιά τήν ἔκδοσή τους.

Η Λ Ε Κ Τ Ρ Ο Μ Α Γ Ν Η Τ Ι Σ Μ Ο Σ

Μπορούμε νά ποῦμε ὅτι ἡ μοντέρνα φυσική ἄρχισε στά τέλη τοῦ περασμένου αἰῶνα μέ τίς ἀνακαλύψεις τῶν ἀκτίνων X ἀπό τόν Roentgen τό 1895, τή ραδιενέργεια ἀπό τόν Becquerel τό 1896 καί τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπό τούς Thomson, Wiechert καί Kaufmann τό 1897. Πρίν ἀπό τίς ἀνακαλύψεις αὐτές οἱ γνώσεις μας γιά τή φυσική περιοριζόταν στή μελέτη τῶν φαινομένων βαρύτητας καί ἠλεκτρισμοῦ-μαγνητισμοῦ. Ἦταν γνωστοί οἱ νόμοι πού διέπουν τίς ἀντιδράσεις βαρύτητας καί ἠλεκτρισμοῦ, π.χ. οἱ ἐνέργειες ἀντιδράσεως γιά βαρύτητα καί ἠλεκτρισμό δίνονται ἀπό τίς σχέσεις

Βαρύτητα	Ἠλεκτρομαγνητισμός
$Hgrav(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r}$	$Hem(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

ὅπου m_1, m_2 εἶναι οἱ μᾶζες καί q_1, q_2 τά φορτία πού ἀντιδροῦν, r ἡ ἀπόστασή του καί G καί ε_0 σταθερές. Ὅ,τι καί νάκαναν οἱ φυσικοί τῆς ἐποχῆς ἐκείνης δέν κατώρθωσαν νά ἐξηγήσουν τίς καινούργιες ἀνακαλύψεις μέ τούς νόμους αὐτούς. Ἄρχισαν ὅμως νά γίνωνται ἐκτεταμένες ἔρευνες πού ὡδήγησαν σέ καινούργιες ἀνακαλύψεις. Τό 1903 οἱ Rutherford καί Soddy ἀνακάλυψαν τό φαινόμενο τῆς μεταστοιχειώσεως κατά τό ὁποῖο ραδιενεργά στοιχεῖα ἐκπέμπουν ἀκτῖνες α καί β καί μετασχηματίζονται σέ ἄλλα στοιχεῖα. Βρῆκαν ἐπίσης ὅτι τά ποσά ἐνεργείας πού συνοδεύουν αὐτές τίς ἀντιδράσεις εἶναι πολύ μεγαλύτερα ἀπό τά ποσά ἐνεργείας πού παίρνουν μέρος στίς χημικές ἀντιδράσεις. Ὁ Rutherford τό 1911 πειραματιζόμενος μέ σκέδαση ἀκτίνων α ἀπό ἄτομα ἀνακάλυψε ὅτι σχεδόν ὅλη ἡ μᾶζα τοῦ ἀτόμου συγκεντρώνεται στόν πυρῆνα πού εἶναι θετικά φορτισμένος. Ὁ πυρήνας ἔχει διαστάσεις πολύ μικρότερες ἀπό τίς διαστάσεις τοῦ ἀτόμου. Οἱ διαστάσεις τῶν πυρήνων μεταβάλλονται ἀπό περίπου 1.5×10^{-13} cm ἕως 7×10^{-13} cm, ἐνῶ τῶν ἀτόμων ἀπό 10^{-8} cm ἕως 3×10^{-8} cm, ὁ πυρήνας δηλαδή εἶναι περίπου 100000 φορές μικρότερος ἀπό τό ἄτομα

Γιά σύγκριση άναφέρομε ότι ή άπόσταση γής-ήλίου είναι περίπου 1.5 X 10^{13} cm.

Άπό τίς έρευνες τοῦ Rutherford καί άλλων βρέθηκε ότι γιά νά έξηγηθῆ ή δομή τῶν άτόμων έπρεπε νά παίζουν ρόλο καί δυνάμεις άσχετες μέ τίς δυνάμεις Coulomb (ήλεκτρικές). Οί δυνάμεις αύτές ώνομάστηκαν πυρηνικές -τώρα τίς λέμε καί ίσχυρές ή άκόμη άδρονικές. Γιά νά κατανοήσομε τίς πυρηνικές δυνάμεις είμαστε άναγκασμένοι νά ώρίσομε στοιχειώδη σωμάτια. Μέχρι τό 1932 τά μόνα γνωστά στοιχειώδη σωμάτια ἦταν τά πρωτόνια (p) καί ήλεκτρόνια (e). Γιά νά έξηγήση τήν έκπομπή άκτίνων β καί συγκεκριμένα τό ένεργειακό τους φάσμα, ό Pauli τό 1930 πρότεινε τήν ύπαρξη ένός νέου σωματιδίου τοῦ νετρίνου (ν). Τό 1932 ό Chadwick άνακάλυψε τό νετρόνιο (n). Ό Heisenberg γιά νά έξηγήση τή δυνατότητα νά συγκρατοῦνται τά πρωτόνια καί νετρόνια στόν πυρῆνα πρότεινε τήν ύπαρξη δυνάμεων άνταλλαγῆς καί τό 1934 ό Yukawa τήν ύπαρξη τοῦ μεσονίου (π) σάν ύπευθύνου φορέα τῶν δυνάμεων άνταλλαγῆς πού συγκρατοῦν τά νουκλεόνια μεταξύ τους. Τό μεσόνιο π βρέθηκε πειραματικά τό 1947. Μέχρι σήμερα έχουν βρεθῆ πολλά στοιχειώδη σωμάτια καθώς καί σωμάτια πού χαρακτηρίζονται άπό τίς ίδιες ίδιότητες, άλλά έχουν άντίθετο φορτίο, π.χ. ήλεκτρόνιο-ποζιτρόνιο, πρωτόνιο-άντιπρωτόνιο. Αύτά καλοῦνται άντισωμάτια. Άντισωμάτια ύπάρχουν καί γιά τά μή φορτισμένα στοιχειώδη σωμάτια, π.χ. νετρόνιο-άντινετρόνιο νετρίνο-άντινετρίνο. Γιά κάθε σωμάτιο πού έχει βρεθῆ ύπάρχει καί τό άντίστοιχο άντισωμάτιο. Τά περισσότερα άπό τά στοιχειώδη σωμάτια διασπῶνται σέ άλλα στοιχειώδη σωμάτια. Π.χ. τό έλεύθερο νετρόνιο διασπᾶται σέ πρωτόνιο, ήλεκτρόνιο καί άντινετρίνο. Ή διάσπαση αύτή γράφεται:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

Τό πρωτόνιο δέν διασπᾶται όταν είναι έλεύθερο. Σέ ώρισμένους ραδιενεργούς πυρῆνες μπορεῖ νά μετατραπῆ σέ νετρόνιο ποζιτρόνιο καί νετρίνο.

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu$$

Στίς διασπάσεις αύτές ρόλο παίζουν οί λεγόμενες άσθενεῖς άντιδράσεις.

Σήμερα λοιπόν διακρίνομε τεσσάρων είδῶν άντιδράσεις. Αύτές είναι οί:

Βαρυντικές
Άσθενεῖς
Ήλεκτρομαγνητικές
Ίσχυρές (άδρονικές)

Οί ήλεκτρομαγνητικές καί οί δυνάμεις βαρύτητας έχουν σφαῖρα έπιρροῆς πού έκτείνεται στό άπειρο. Άντίθετα οί άσθενεῖς καί ίσχυρές δροῦν σέ πάρα πολύ μικρές άποστάσεις, τῆς τάξεως 10^{-13} cm ή καί μικρότερες.

Άπό τίς τέσσερις άντιδράσεις πιό καλά γνωρίζομε τήν ήλεκτρομαγνητική καί τήν ~~βαρυντική~~. Ή τελευταία έμφανίζεται σέ φαινόμενα μεγάλης κλίμακας. Ή ύπαρξη τοῦ σύμπαντος πχ. όφείλεται στίς δυνάμεις βαρύτητας. Ύπάρχουν πολλά άναπάντητα έρωτήματα όπως τά βαρυντικά κύματα καί ή κβάντωση τοῦ βαρυντικοῦ πεδίου (στοιχειῶδες σωμάτιο τό graviton).

Ή κλασική ήλεκτρομαγνητική άντίδραση μπορεῖ νά μελετηθῆ έξ όλοκλήρου μέ τίς έξισώσεις Maxwell. Στό χῶρο τοῦ μικροκόσμου φυσικά πρέπει νά έφαρμόσωμε τήν κβαντοηλεκτροδυναμική, ή όποία δίνει άποτελέσματα πού συμφωνοῦν μέ τό πείραμα μέ άκρίβεια τουλάχιστον 1:10^5. Οί ήλεκτρομαγνητικές άντιδράσεις είναι ύπεύθυνες γιά τήν άτομική δομή τῆς ύλης -ή χημεία καί πολύ πιθανόν ή βιολογία κυβερνοῦνται άπό αύτή. Άπό πειράματα γνωρίζομε ότι κρατάει μέχρι άποστάσεις τῆς τάξεως τῶν 10^{-15} cm άλλά δέν ξέρομε άν καταρρίπτεται σέ μικρότερες άποστάσεις.

Τήν έρμηνεία τῶν παραπάνω άντιδράσεων προσπαθοῦμε νά τήν κάνωμε μέ τή βοήθεια πεδίων καί κβάντων. Τά κβάντα πού είναι ύπεύθυνα γιά τήν ήλεκτρομαγνητική άντίδραση είναι τά φωτόνια. Ό παρακάτω πίνακας συνοψίζει τίς άντιδράσεις μέ τ'άντίστοιχα κβάντα καί τίς ίδιότητές τους.

Άντιδράσεις	Κβάντο	Μᾶζα (Mev) (περίπου)	Σπίν	Φορτίο μέ τό όποῖο μποροῦν νά ύπάρχουν.
Άδρονική	π	137	0	+, -, 0
	κ	496	0	+, -, 0
	ρ	770	1	+, -, 0
	ω	783	1	0
Ήλεκτρομαγνητική	φωτόνιο	0	1	-
Άσθενεῖς	W;	≳5000	1	-
Βαρυτητική	Graviton	0	2	-

Συμπληρώνομε κάνοντας τήν παρατήρηση ὅτι σ' ἕνα κλειστό σύστημα τό συνολικό φορτίο πού περιέχεται παραμένει ἀναλλοίωτο, ὁποιαδήποτε ἀντίδραση νά συμβαίνη μέσα σ' αὐτό. Αὐτό ἔχει ἐλεγθῆ πειραματικά καί βρέθηκε ὅτι ἰσχύει σ' ὅλες τίς μέχρι τώρα γνωστές ἀντιδράσεις.

<u>Ὁ νόμος τοῦ Coulomb:</u> Ἀντίθετα μέ ὅτι συμβαίνει στό πεδίο βαρύτητας πού οἱ μᾶζες πάντοτε ἕλκονται καί τοῦτο συμβαίνει καί μεταξύ σωματίων καί ἀντισωματίων, τά ἠλεκτρικά φορτία ἐάν μέν ἔχουν τό ἴδιο σημεῖο ἀπωθοῦνται ἐάν δέ ἀντίθετο ἕλκονται. Ὁ Coulomb βρῆκε πειραματικά μέ τό ζυγό στρέψεως τοῦ Cavendish ὅτι ἡ δύναμη μεταξύ δύο φορτίων δίνεται ἀπό τή σχέση.

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r$$

ὅπου q_1, q_2 τά δυό φορτία, r ἡ μεταξύ τους ἀπόστασις καί $\hat{a}_r$ τό μοναδιαῖο διάνυσμα κατά τή διεύθυνση τῶν δύο φορτίων.

$$\varepsilon_0 = 8.85418 \times 10^{-12} C^2 nt^{-1} m^{-2}$$

καί $$1/4\pi\varepsilon_0 \simeq 9 \times 10^9 ntm^2 C^{-2}$$

Ὁ ἐκθέτης 2 στήν ἀπόσταση εἶναι ἀριθμός πολύ σημαντικός καί ὅλες οἱ ἰδιότητες τοῦ Η-Μ πεδίου πηγάζουν ἀκριβῶς ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ τιμή αὐτή εἶναι ὄντως 2. Πειραματικά ἔχει βρεθῆ ὅτι ὁ ἐκθέτης εἶναι 2 μέ ἀκρίβεια 9 δεκ.ψηφίων.

<u>Παράδειγμα</u> Ἐάν σ' ἕνα νόμισμα ἀποχωρίσωμε τά θετικά ἀπό τά ἀρνητικά φορτία, σέ πόση ἀπόσταση πρέπει νά τά βάλωμε γιά νά ἕλκωνται μέ δύναμη 0,5kg (≈5nt);

$$F = q_1 q_2 / 4\pi\varepsilon_0 r^2 \qquad q_1 = q_2 = q$$

$$r = q\left(\frac{1/4\pi\varepsilon_0}{F}\right)^{1/2}$$

ἔστω ἀτομικό ἤ μοριακό βάρος A=64 καί μᾶζα M=6,4gr τότε:

$$q \cong \frac{(6 \times 10^{23}\ at/mol)(6{,}4gr)}{64\ gr/mol} \times (4.8 \times 10^{-18} Coul/at)$$

$$q = (6 \times 10^{22}\ at)(4{,}8\ Coul/at) \simeq 3 \times 10^5\ Coul$$

$$r = 3 \times 10^5\ Coul \left(\frac{9 \times 10^9\ ntm^2 Coul^{-2}}{5nt}\right)^{1/2} = 1{,}27 \times 10^{10}\ m$$

<u>Ἀρχή ἐπαλληλίας</u>. Ἡ δύναμη Coulomb σ' ἕνα φορτίο q_3 πού ὀφείλεται στήν ὕπαρξη δύο ἄλλων φορτίων q_1 καί q_2 σέ ἀπόσταση ἀπό

τό q_3 r_{13} καί r_{23} ἀντιστοίχως δίνεται ἀπό τόν τύπο

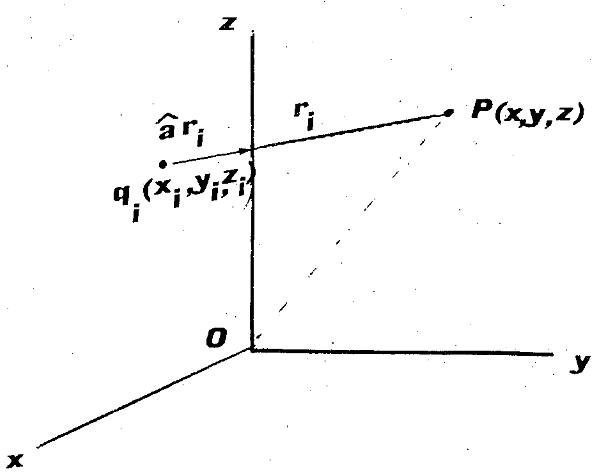
$$\vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{r_{13}^2}\hat{a}_{r_{31}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_2}{r_{23}^2}\hat{a}_{r_{32}}$$

ὅπου $\hat{a}_{r_{ij}}$ τό μοναδιαῖο ἄνυσμα στή διεύθυνση πού ἐνώνει τά φορτία q_i καί q_j. Γενικώτερα ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἀπάνω σ' ἕνα φορτίο Ω ἡ ὁποία ὀφείλεται στήν ὕπαρξη N φορτίων $q_1, q_2 \ldots q_N$ ἰσοῦται πρός

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{\Omega q_i}{r_i^2}\hat{a}_{r_i} \qquad (5\text{-}1)$$

r_i εἶναι ἡ ἀπόσταση κάθε φορτίου q_i ἀπό τό Ω. Ὅσο μεγάλο καί ἄν εἶναι τό N ἡ παραπάνω σχέση ἰσχύει. Ἡ σχέση αὐτή εἶναι ἡ βάση τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαλληλίας. Ἐπαλληλία σημαίνει νά συνδυάσωμε δύο σύνολα πηγῶν σέ ἕνα σύστημα μέ τό νά προσθέσωμε τό ἕνα σύνολο "ἀπάνω" στό ἄλλο χωρίς ν' ἀλλάξωμε τή διάταξη κανενός συνόλου. Ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖται σ' ἕνα φορτίο Ω σέ κάποιο σημεῖο τοῦ χώρου εἶναι τό ἀνυσματικό ἄθροισμα τῶν δυνάμεων πού ἐξασκοῦνται στό Ω ἀπό κάθε σύνολο πηγῶν ξεχωριστά.

<u>Ἠλεκτρικό πεδίο</u>. Ἐάν τήν (5-1) διαιρέσωμε μέ Ω εὑρίσκομε ἕνα καινούργιο ἄνυσμα πού ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό πῶς εἶναι διατεταγμένα τά φορτία q_i καί ἀπό τό σημεῖο τοῦ χώρου (x,y,z).



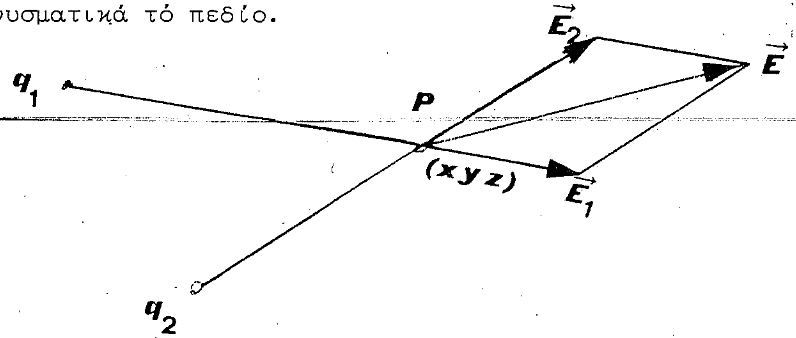
Τό σημεῖο P ἔχει συντεταγμένες (x,y,z) καί τό q_i (x_i, y_i, z_i)

$$r_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$$

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{a}_{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}\hat{a}_{r_i}$$

καί $$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+(z_i-z)^2}\,\hat{a}_{r_i} \qquad (6\text{-}1)$$

Τό ἄνυσμα $\vec{E}$ πού εἶναι συνάρτηση τῶν συντεταγμένων (x,y,z) ὀνομάζομε ἠλεκτρικό πεδίο πού πηγάζει ἀπό τά φορτία $q_1, q_2, q_3 .. q_N$ καί τά φορτία αὐτά ὀνομάζομε πηγές τοῦ πεδίου. Γιά $N=2$ π.χ. βρίσκομε ἀνυσματικά τό πεδίο.

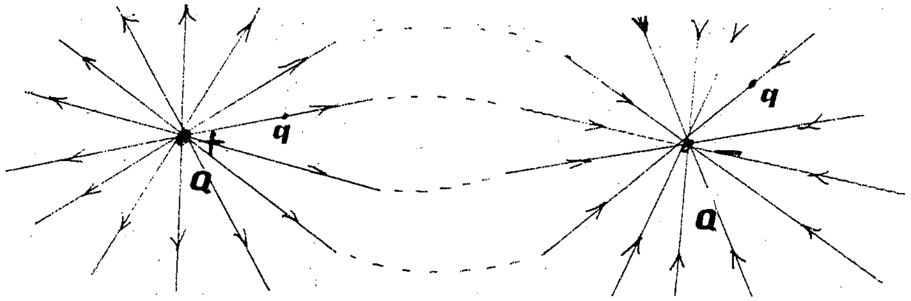


Ἡ γνώση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου σέ κάθε σημεῖο τοῦ χώρου εἶναι ἀρκετή γιά νά μᾶς ἐπιτρέψη νά ὑπολογίσωμε τή δύναμη πού ἐξασκεῖται ἀπάνω σέ ὁ π ο ι ο δ ή π ο τ ε φορτίο πού βάζομε σ' αὐτό τό σημεῖο.

$$\vec{F} = q\,\vec{E} \qquad (6\text{-}2)$$

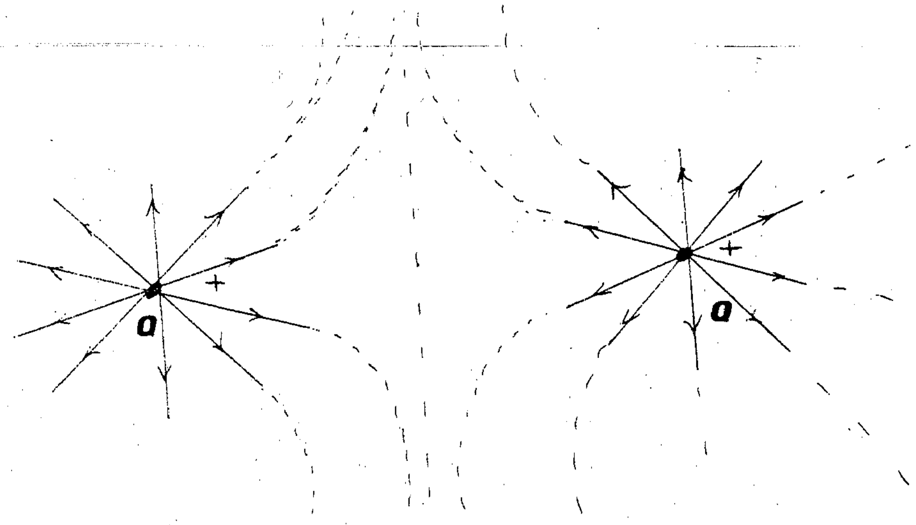
Ἡ παραπάνω σχέση μᾶς λέει ὅτι ὅταν γνωρίζωμε τό πεδίο σέ κάποια περιοχή τοῦ χώρου ξαίρομε, χωρίς καμμιά ἄλλη διαδικασία τί θά συμβῆ σ' ἕνα φορτίο πού θά τοποθετήσωμε σ' αὐτή τήν περιοχή.

Γιά ἕνα φορτίο Q τό πεδίο εἶναι ἀκτινικό, πού σημαίνει



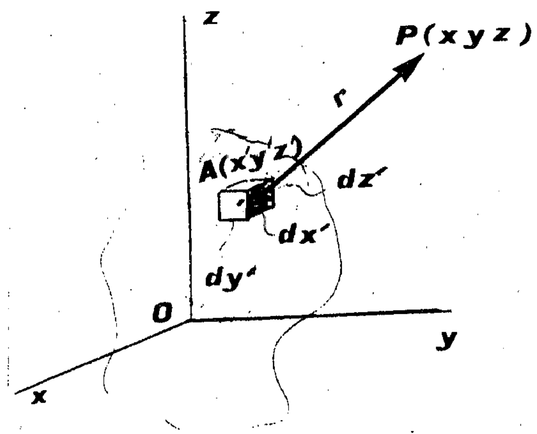
ὅτι σ' ὅλα τά σημεῖα πού βρίσκονται στήν ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας μέ κέντρο τό φορτίο τό μέτρο τοῦ πεδίου ἔχει τήν ἴδια τιμή ἤ ὅτι ἡ δύναμη πού ἀναπτύσσεται σ' ἕνα ἄλλο δοκιμαστικό θετικό φορτίο q ἔχει διεύθυνση ἀπό τό Q πρός τό q ὅταν τό Q εἶναι θετικό καί ἀπό τό q πρός Q ὅταν τό Q εἶναι ἀρνητικό.

Ὅταν δύο φορτία Q (θετικό καί ἀρνητικό) πλησιάσουν σέ κάποια ἀπόσταση, τό πεδίο πού ὀφείλεται στά δύο φορτία δέν εἶναι πιά ἀκτινικό ἀλλά παραμορφώνεται ὅπως φαίνεται στίς διακεκομμένες γραμμές. Οἱ γραμμές πού δείχνουν τή φορά τῆς δυνάμεως ἡ ὁποία θά ἐξασκηθῆ σέ ἕνα σημειακό θετικό δοκιμαστικό φορτίο q ὀνομάζονται γραμμές πεδίου. Γιά δύο φορτία $+|Q|$ καί $+|Q|$ οἱ γραμμές πεδίου διαμορφώνονται ὅπως στό παρακάτω σχῆμα:



Σέ πολλή μακρυνή ἀπόσταση ἀπό τά δύο φορτία τό πεδίο ξαναγίνεται ἀκτινικό σάν νά ἦταν ἕνα σημειακό φορτίο 2Q.

Κατανεμημένα φορτία



Μικροσκοπικά δέν μποροῦμε νά ἔχωμε συνεχῆ κατανομή φορτίου μιά καί ξαίρομε ὅτι τά φορτία εἶναι κβαντισμένα. Ἐάν ἀγνοήσωμε κβαντομηχανικά φαινόμενα μποροῦμε νά μιλᾶμε γιά συνεχή κατανομή φορτίου ἐφ' ὅσον οἱ διαστάσεις γιά τίς ὁποῖες ἐνδιαφερόμαστε εἶναι πολλές φορές μεγαλύτερες ἀπό τίς ἐνδοατομικές διαστάσεις. Ἐάν ἔχομε μιά τέτοια συνεχῆ κατανομή φορτίου Q καί θεωρήσωμε ἕνα στοιχειώδη ὄγκο $dv=dx'dy'dz'$, στοιχειώδη ὄγκο μέ τή μακροσκοπική ἔννοια πού εἴπαμε παραπάνω, τό φορτίο στόν ὄγκο dv ἰσοῦται πρός dq. Καλοῦμε πυκνότητα φορτίου $\rho=dq/dv$. Τό πεδίο $d\vec{E}$ πού προκαλεῖται ἀπό τό φορτίο dq στό σημεῖο P(x,y,z) εἶναι:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{a}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}\hat{a}_r$$

ὅπου (x',y',z') οἱ συντεταγμένες τοῦ κέντρου τοῦ στοιχειώδους ὄγκου dv. Τό ὁλικό πεδίο $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'\,\text{φορτίου } Q}\frac{dq}{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}\hat{a}_r$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(x',y',z')\,dx'dy'dz'}{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}\hat{a}_r$$

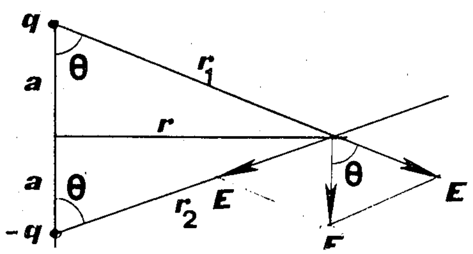
Βλέπομε ὅτι ἐνῶ γιά σημειακό φορτίο τό $\vec{E}$ γίνεται ἄπειρο γιά $r\to 0$ (στή φύση δέν ὑπάρχουν σημειακά φορτία) γιά πεπερασμένη κατανομή φορτίου τό $\vec{E}$ παραμένει πεπερασμένο ἀκόμα καί στό ἐσωτερικό τῆς κατανομῆς τοῦ φορτίου. Τοῦτο ἐξηγεῖται εὔκολα γιατί ὁ στοιχειώδης ὄγκος $dv=dx'dy'dz'$ εἶναι ἀνάλογος τοῦ r^2dr. Τό μέτρον E λοιπόν θά εἶναι ἀνάλογο τοῦ

$$E\propto\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho r^2\,dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(x',y',z')\,dr$$

πού εἶναι ποσότητα πεπερασμένη.

<u>Ὑπολογισμός τοῦ E</u>

<u>Ἠλεκτρικό Δίπολο</u> (στό ἐπίπεδο συμμετρίας)



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2} = E_2$$

$$E = 2E_1\cos\theta\ ,\quad r_1^2 = r^2 + a^2$$

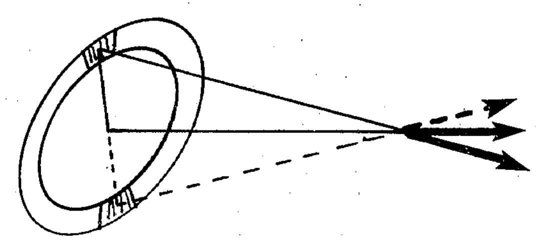
$\cos\theta = a/\sqrt{r^2+a^2}$

$$E = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2+a^2}\frac{a}{(r^2+a^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{(r^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{r^3(1+\frac{a^2}{r^2})^{3/2}}$$

Γιά r>>a $\quad 1+\frac{a^2}{r^2}\approx 1 \quad$ καί $\quad E\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{r^3}$

Βλέπομε ὅτι τό πεδίο ἐλαττώνεται μέ νόμο $\frac{1}{r^3}$ καί ὅτι τό E ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό γινόμενο aq. Γιά πολύ μεγάλες ἀποστάσεις τό $E\to 0$ δηλαδή τά δύο φορτία σχεδόν ἐξουδετερώνονται ἀλλά ὄχι ἐντελῶς.

<u>Φορτισμένος Δακτύλιος</u> ἀκτίνας a καί φορτίου q (στόν ἄξονα πού περνάει ἀπό τό κέντρο τοῦ δακτυλίου καί κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ δακτυλίου).



$$dq = q\frac{ds}{2\pi a}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2\pi a}\frac{ds}{a^2+x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{(a^2+x^2)^{1/2}}$$

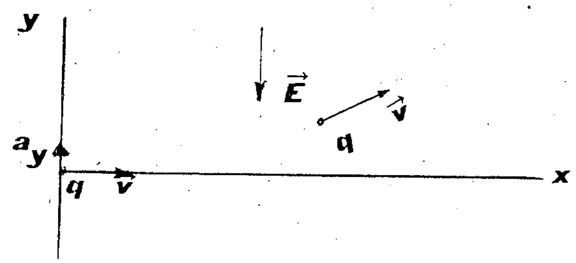
$$E = \int dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{2\pi a}\int\frac{ds}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{2\pi a}\frac{2\pi a}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{x^3(1+\frac{a^2}{x^2})^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2(1+\frac{a^2}{x^2})^{3/2}}$$

Γιά x>>a $\quad E\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση τό πεδίο γιά μεγάλες ἀποστάσεις μοιάζει μέ τό πεδίο σημειακοῦ φορτίου q.

<u>Κίνηση Φορτίου σέ ὁμογενές ἠλεκτρικό πεδίο E</u>



Τό πεδίο καλεῖται ὁμογενές ὅταν ἔχει τήν ἴδια τιμή καί διεύθυνση παντοῦ. Π.χ. τό πεδίο μεταξύ φορτισμένων πλακῶν μέ ἀντίθετο φορτίο παραλλήλων καί ἀπείρων διαστάσεων εἶναι ὁμογενές. Προσέγγισις ὁμογενοῦς πεδίου εἶναι τό πεδίο μεταξύ φορτισμένων μέ ἀντίθετο φορτίο πλακῶν πού οἱ διαστάσεις τους εἶναι πολύ μεγάλες σέ σύγκριση μέ τήν ἀπόστασή τους.

$$\vec{E} = -E\hat{a}_y \qquad (\hat{a}_y \text{ μοναδιαῖο διάνυσμα})$$

Ἐάν τό q ἔχει ταχύτητα $\vec{v}$ ὅταν βρίσκεται στήν ἀρχή τῶν ἀξόνων ($\vec{v}=v\hat{a}_x$), λόγω τῆς δυνάμεως πού ἐξασκεῖται ἀπάνω του ἀπό τό πεδίο θά παρεκλίνη ἀπό τήν ἀρχική του τροχιά. Ἐάν γιά κάποια χρονική στιγμή t τό q ἔχει συντεταγμένες (x,y) θά ἔχωμε:

$$x=v_0 t \quad : \quad t=x/v_0 \qquad y=\tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

α εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση

$$\alpha=\frac{F}{m}=\frac{qE}{m} \quad : y=\frac{qE}{2m}t^2 \qquad y=\frac{qE}{2m}\frac{x^2}{v_0^2}=\frac{qE}{2mv_0^2}x^2$$

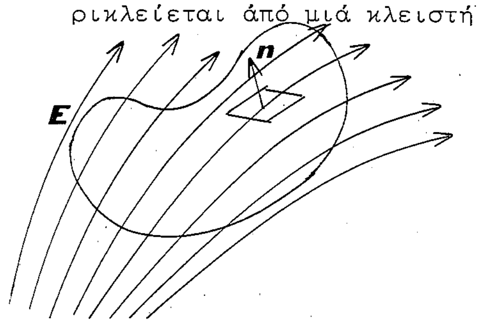
Ἡ τροχιά τοῦ q εἶναι παραβολή

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀπόκλειση y εἶναι ἀνάλογη τοῦ πεδίου καί ἀντιστρόφως ἀνάλογη τῆς μάζας m. Ἐάν δύο σωμάτια μέ ἴδιο φορτίο καί v (π.χ. e καί p) ἀλλά μᾶζες m καί M τότε σ' ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο E :

$$y_1=\frac{eE}{2mv^2} \qquad y_2=\frac{eE}{2Mv^2} \quad : \quad \frac{y_1}{y_2}=\frac{M}{m}$$

Δηλαδή ἡ ἀπόκλιση τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι περίπου 2000 φορές μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀπόκλιση τοῦ πρωτονίου. Ἡ ἰδιότητα αὐτή χρησιμοποιεῖται ἐκτεταμένα γιά τό διαχωρισμό σωματιδίων ἀπό μιά δέσμη.

Ροή. Ἡ σχέση μεταξύ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καί τῶν πηγῶν του ἐξάγεται μέ ἕνα πολύ ἁπλό τρόπο. Ἄς θεωρήσωμε ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο στό χῶρο καί ἄς θεωρήσωμε ὅτι ἕνα τμῆμα τοῦ χώρου περικλείεται ἀπό μιά κλειστή ἐπιφάνεια. Μποροῦμε νά χωρήσωμε τήν ἐπιφάνεια σέ ἕνα ἀριθμό στοιχειωδῶν ἐπιφανειῶν $d\vec{a}=\hat{n}da$ ὅπου $\hat{n}$ τό μοναδιαῖο ἄνυσμα ἐπί τῆς καθέτου στήν ἐπιφάνεια da. Ἡ ἐπιφάνεια γράφεται ὡς ἀνυσματικό μέγεθος γιά νά δείξη ὄχι μόνο



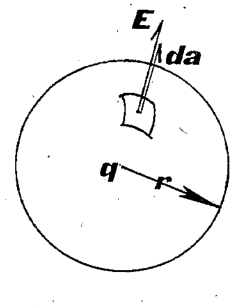
τήν τιμή τοῦ ἐμβαδοῦ ἀλλά καί τόν προσανατολισμό της. Τό γινόμενο

$$d\Phi=\vec{E}\cdot d\vec{a}$$

καλεῖται ροή τοῦ πεδίου μέσα ἀπό τήν ἐπιφάνεια da. Ὁ ὅρος ροή προῆλθε ἀπό τήν ἀντίστοιχη ἔννοια τῆς ροῆς ἑνός ὑγροῦ πού κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{v}$ μέσα ἀπό μιά ἐπιφάνεια $\vec{a}$, $\vec{v}\cdot\vec{a}$. Ἡ ὁλική ροή

$$\Phi=\int_{\substack{\text{ἐπί}\\ \text{ἐπιφανείας}}}\vec{E}\cdot d\vec{a}$$

Νόμος Gauss. Ἔστω ὅτι σημειακό φορτίο q βρίσκεται στό κέντρο σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἀκτίνας r. Ἡ ροή μέσα ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι:

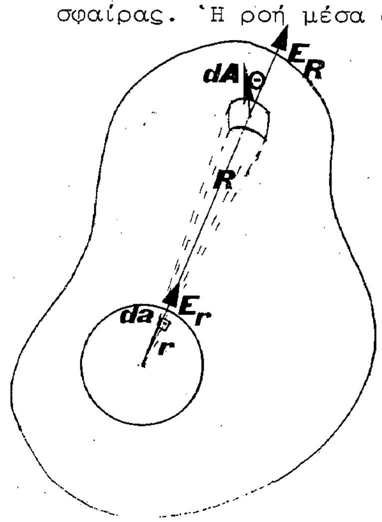


$$\Phi=\int\vec{E}\cdot d\vec{a}=\int E\,da$$

διότι εἰς τήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τά $\vec{E}$ καί $d\vec{a}$ εἶναι παράλληλα. Τό μέτρο τοῦ $\vec{E}$ εἶναι σταθερό στήν σφαιρική ἐπιφάνεια ἄρα

$$\Phi=E\int da=E\,4\pi r^2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

Βλέπομε ὅτι ἡ ροή εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τίς διαστάσεις τῆς σφαίρας. Ἡ ροή μέσα ἀπό τήν ἐπιφάνεια dA ἰσοῦται



$$d\Phi_R=\vec{E}_R\cdot d\vec{A}=E_R\,dA\cos\vartheta$$

μέσα ἀπό τήν $d\vec{a}$

$$d\Phi_r=\vec{E}_r\cdot d\vec{a}=E_r\,da$$

Οἱ da καί dA τέμνουν τήν ἴδια στερεά γωνία

$$d\Omega=\frac{da}{r^2}=\frac{dA}{R^2}\cos\vartheta$$

$$E_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad E_R=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \qquad \frac{E_R}{E_r}=\frac{r^2}{R^2}$$

$$E_R=E_r\frac{r^2}{R^2} \qquad dA\cos\vartheta=\frac{R^2}{r^2}da$$

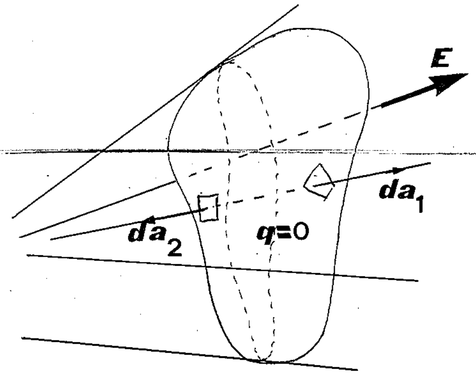
$$d\Phi_R=E_R dA\cos\vartheta=(E_r\frac{r^2}{R^2})\,(\frac{R^2}{r^2}da)=E_r\,da=d\Phi_r$$

καί $\Phi_R = \int d\Phi_R = \int d\Phi_r = \Phi_r = q/\varepsilon_0$

'Εάν άντί σημειακοῦ q έχομε μία συνεχῆ κατανομή τότε:

$$q = \int \rho\, dv$$

'Εάν τό q δέν περιέχεται μέσα στήν κλειστή έπιφάνεια τότε στό $\int \vec{E}\cdot d\vec{a}$ τό μέν $\vec{E}$ διατηρεῖ τό σημεῖο του τό δέ $d\vec{a}$ άλλάζει σημεῖο έτσι ώστε:



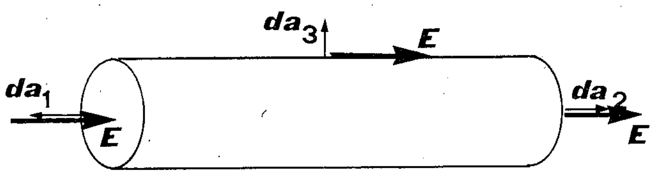
$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$$

Τό άποτέλεσμα αύτό μποροῦμε νά γράψωμε καί ώς έξῆς: 'Εφ' όσον μέσα στήν κλειστή έπιφάνεια δέν έχει φορτίο q=0 (ή ρ=0). Άρα σέ κάθε περίπτωση μποροῦμε νά γράψωμε:

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\substack{\text{κλειστή}\\ \text{έπιφάνεια}}} \rho\, dv$$

<u>Παραδείγματα</u>

Κλειστή κυλινδρική έπιφάνεια σέ όμογενές ήλεκτρικό πεδίο



$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{a}$$

Στήν κυλινδρική έπιφάνεια τά $d\vec{a}$ καί $\vec{E}$ εἶναι κάθετα καί $\vec{E}\cdot d\vec{a}_3 = 0$

Στίς έπίπεδες έπιφάνειες έχομε $\vec{E}\cdot d\vec{a}_1 = -\vec{E}\cdot d\vec{a}_2$

Άρα $\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{a}_3 + \vec{E}\cdot d\vec{a}_2 + \vec{E}\cdot d\vec{a}_3 = 0$

'Αποτέλεσμα πού έπρεπε νά τό περιμένωμε γιατί στόν κύλινδρο δέν περιέχεται ήλεκτρικό φορτίο.

<u>Φορτισμένη Σφαῖρα</u>

α β

α. Συνολικό φορτίο q σέ σφαῖρα άκτῖνος α. Θεωροῦμε τή ροή σέ έπιφάνεια όπου R>α

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dv = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{a} = E\, 4\pi R^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

Άρα $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$ (13-1)

Γιά άπόσταση R>α τό πεδίο μοιάζει μέ πεδίο σημειακοῦ φορτίου

β. Συνολικό φορτίο q σέ σφαῖρα άκτῖνος α. Θεωροῦμε τή ροή σέ έπιφάνεια όπου R<α.

'Η πυκνότητα τοῦ φορτίου $\rho = q/\frac{4}{3}\pi\alpha^3$ εἶναι σταθερή.

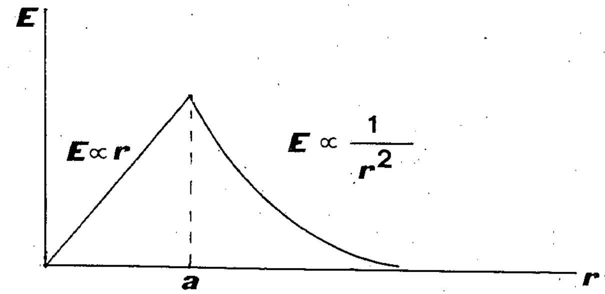
$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = E 4\pi r^2 = \int \rho\, dv = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3}\,\frac{4}{3}\pi r^3$$

$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0\alpha^3}$ (13-2)

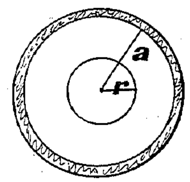
'Από τίς (13-1) καί (13-2) βλέπομε ότι γιά R=α καί r=α

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\alpha^2}$$

ήτοι καί οἱ δύο σχέσεις δίνουν τό ἴδιο πεδίο στήν έπιφάνεια τῆς σφαίρας όπως καί θά έπρεπε άλλωστε.



<u>Φορτίο μέσα σέ σφαιρικό φλοιό άκτῖνος α</u>

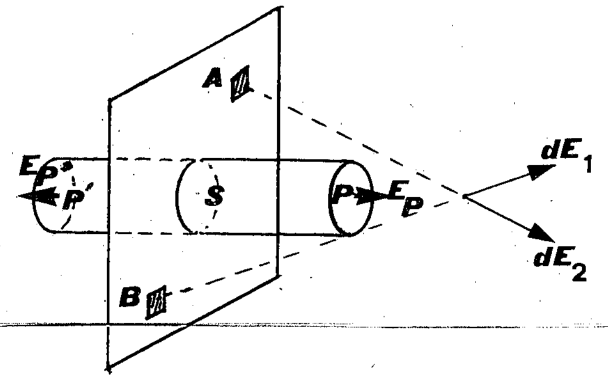


$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = E 4\pi r^2 = 0$

Διότι $\int \rho\, dv = q$ μέσα στό φλοιό = ο

Άρα E = 0

<u>Φορτίο έπιπέδου φύλλου άπείρων διαστάσεων</u> μέ έπιφανειακή κατανομή φορτίου σ (ή έπιφανειακή κατανομή μετρεῖται σέ Coul / m²)



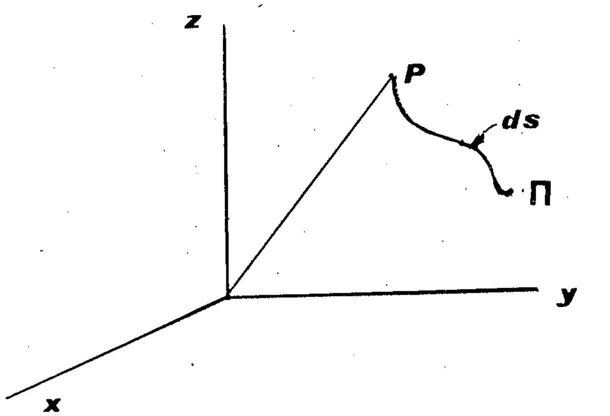
Κατ' ἀρχήν παρατηροῦμε ὅτι τό πεδίο Ε πρέπει νά εἶναι κάθετο στήν ἐπιφάνεια διότι λόγω τῶν ἀπείρων διαστάσεων τοῦ φύλλου μποροῦμε νά χωρίσωμε τό φύλλο σέ μικρές περιοχές (ἄπειρες τόν ἀριθμό), Α καί Β, ὅπου ἀνά δύο προκαλοῦν πεδία $\vec{dE}_1$ & $\vec{dE}_2$ τῶν ὁποίων οἱ κατακόρυφες συνιστῶσες ἀναιροῦνται ἀμοιβαίως. Ἐάν τά σημεῖα Ρ καί Ρ' ἰσαπέχουν τοῦ κυλίνδρου, λόγω τῆς συμμετρίας τά πεδία $E_{p'}=-E_p$. Ἐφαρμόζομε τό νόμο τοῦ Gauss σέ κύλινδρο πού περιλαμβάνει τά σημεῖα Ρ καί Ρ'. Ἐπειδή τά στοιχειώδη ἐμβαδά τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας εἶναι κάθετα στό πεδίο $\vec{E}\cdot d\vec{a}=0$

$$\text{Ἄρα} \quad \Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = E_pS + (-E_p)(-S) = 2ES = \sigma S/\varepsilon_0$$

$$\text{Ἄρα} \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Δηλαδή τό πεδίο εἶναι σταθερό ἀνεξαρτήτως τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπό τήν ἐπιφάνεια.

<u>Ἠλεκτρικό Δυναμικό</u>. Γνωρίσαμε ὅτι σ' ἕνα φορτίο q πού τοποθετεῖται σ' ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο Ε ἐξασκεῖται μία δύναμη F=qE. Γιά νά φέρωμε τό φορτίο q στή θέση Ρ μέ συντεταγμένες (x,y,z) καταναλώσαμε ἕνα ἔργο W. Ἄν τό φορτίο τό φέραμε στή θέση Ρ ἀπό τή θέση Π(X,Y,Z), τό ἔργο ἰσοῦται πρός:



$$W_{\Pi P} = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} \qquad (14,1)$$

ὅπου $d\vec{s}$ ἕνα στοιχειῶδες τμῆμα τῆς γραμμῆς πού συνδέει τά Π καί Ρ. Τό ἔργο $W_{\Pi P}$ εἶναι ἀνεξάρτητο τῆς γραμμῆς (ἤ τοῦ δρόμου) πού διαλέξαμε γιά νά πᾶμε ἀπό τό Π στό Ρ. Ὁρίζομε διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων Π καί Ρ τήν ποσότητα

$$V_{P\Pi} = V_P - V_\Pi = \frac{W_{\Pi P}}{q} = \int \frac{\vec{F}\cdot d\vec{s}}{q} = \int \vec{E}\cdot d\vec{s} \qquad (15-1)$$

(Μονάδες δυναμικοῦ 1 Volt = 1 joule / coul).

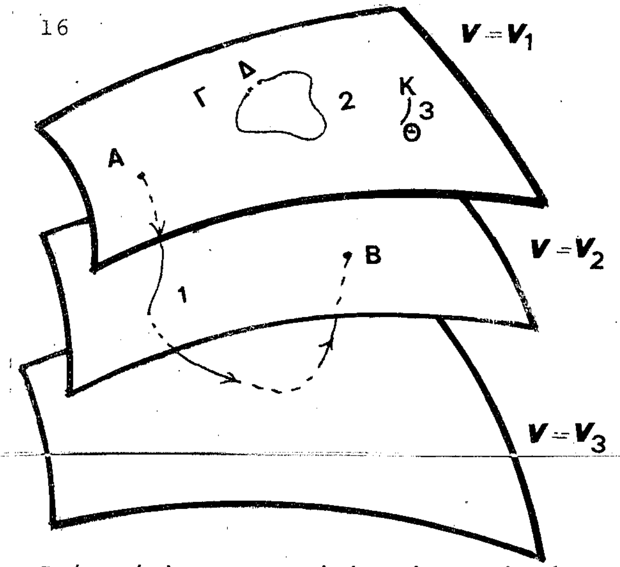
Τό ἔργο $W_{\Pi P}$ (καί ὡς ἐκ τούτου καί ἡ διαφορά $V_P - V_\Pi$), μπορεῖ νά εἶναι θετικό, ἀρνητικό ἤ μηδέν. Σ' αὐτές τίς περιπτώσεις λέμε ὅτι τό δυναμικό στό σημεῖο Ρ εἶναι ὑψηλότερο, χαμηλότερο, ἤ τό ἴδιο μέ τό δυναμικό τοῦ Π. Γιά νά μή χρειάζεται συνεχῶς νά μιλᾶμε γιά διαφορές δυναμικοῦ μεταξύ δύο τυχαίων σημείων, συνήθως κρατᾶμε ἕνα σημεῖο (ἔστω τό Π) σταθερό σέ κάποια θέση. Τότε ἡ συνάρτηση $V_{P\Pi}$ εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ Ρ, δηλαδή συνάρτηση μόνο τῶν συντεταγμένων (x,y,z). Συνήθως τό σημεῖο Π τό παίρνομε στό ἄπειρο καί ὁρίζομε τό δυναμικό στό ἄπειρο ἴσο μέ τό μηδέν. Ἔτσι τό ἠλεκτρικό δυναμικό στό σημεῖο Ρ μπορεῖ νά ὁρισθῆ μέ τή σχέση

$$V = \frac{W}{q} \qquad (15-2)$$

ὅπου W εἶναι τό ἔργο πού χρειάζεται νά καταναλωθῆ ἤ νά παραχθῆ γιά νά ἔρθη τό φορτίο q ἀπό τό ἄπειρο στό σημεῖο Ρ. Σημειώνομε ὅτι δέν πρέπει νά ξεχνᾶμε ὅτι ἡ (15-2) ἰσχύει μόνο γιά τήν περίπτωση πού δεχθήκαμε τό δυναμικό στό ἄπειρο ἴσο πρός μηδέν καί ὅτι ἡ ἐξίσωση (15-1) εἶναι ἡ σωστή ἔκφραση γιά δ ι α φ ο ρ ά δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων. Παρ' ὅλο δέ πού μετά ἀπό συμφωνία πήραμε τό δυναμικό στό ἄπειρο ἴσο μέ τό μηδέν σέ πολλά προβλήματα ἠλεκτρικῶν κυκλωμάτων δεχόμαστε ὅτι ἡ γῆ εὑρίσκεται σέ δυναμικό μηδέν. Ἡ διαφορά δυναμικοῦ $V_P - V_\Pi$ (καί τό ἔργο $W_{\Pi P}$) εἶναι ἀνεξάρτητα τοῦ δρόμου πού διαλέξαμε γιά νά πᾶμε ἀπό τό Π στό Ρ, ὅπως ἀναφέραμε καί παραπάνω καί τό γεγονός τοῦτο εἶναι αὐτό πού μᾶς ἐπιτρέπει νά ὁρίσωμε μονοσήμαντα τήν τιμή δυναμικοῦ στό Ρ. (Σέ συσχετισμό βέβαια μέ κάποιο σημεῖο Π).

Ι Σ Ο Δ Υ Ν Α Μ Ι Κ Ε Σ   Ε Π Ι Φ Α Ν Ε Ι Ε Σ

Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων πού ἔχουν τό ἴδιο δυναμικό $V_B = -\int_\infty^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l}$ καλεῖται ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια. Τό ἔργο (δρόμος 2) πού παράγεται ἤ καταναλίσκεται γιά κίνηση φορτίου ἀπάνω σέ



Ι.Ε. εἶναι ἴσο μέ μηδέν Τό ἔργο πού παράγεται γιά ὁποιαδήποτε κίνηση φορτίου πού ἀρχίζει ἔστω ἀπό τήν ἐπιφάνεια $V=V_1$ καί καταλήγει σέ μιά ἄλλη Ι.Ε. (ἔστω τή $V=V_2$) ἰσοῦται πρός:

$$W = q\,(V_2-V_1)$$

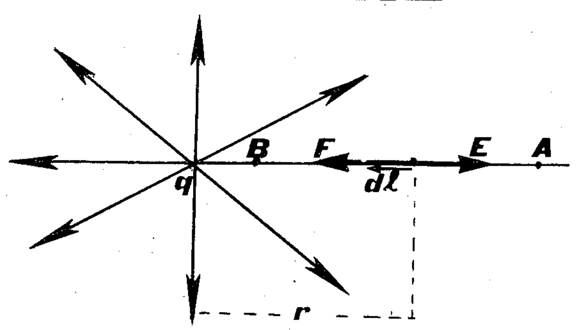
(π.χ. δρόμος 1)

Γιά μιά ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια ἰσχύει, ὅταν τά Κ καί Θ εἶναι ὅσο κοντά θέλομε (π.χ. δρόμος 3) καί σέ ὁποιοδήποτε προσανατολισμό,

$$\Delta V = V_K - V_\Theta = \vec{E}\cdot\Delta\vec{l} = \vec{E}\cdot(\vec{K\Theta}) = 0$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση συμπεραίνομε ὅτι $\vec{E}\perp\vec{K\Theta}$ ἤτοι ὅτι τό ἄνυσμα $\vec{E}$ εἶναι κάθετο στήν Ι.Ε. Ἐφ' ὅσον τό πεδίο $\vec{E}$ γιά σημειακό φορτίο εἶναι ἀκτινικό οἱ ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες εἶναι συγκεντρικοί κύκλοι μέ κέντρο τό σημεῖο.

Δυναμικό Σημειακοῦ Φορτίου



$$d\vec{l} = -\,d\vec{r}$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = Edl\cos 180 = -Edl = Edr$$

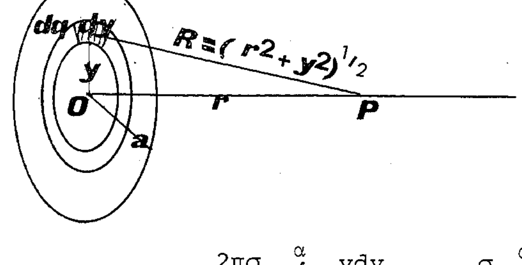
$$V_B - V_A = -\int_A^B Edr$$

$$V_B - V_A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

Ὅταν τό $A\to\infty$ τό $r_A\to\infty$ καί $\frac{1}{r_A}\to 0$, $V_A\to 0$ $\qquad V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r_B}$

Γράφομε $\qquad V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Φορτισμένος Δίσκος (Σέ ἄξονα ⊥ στό κέντρο 0)



$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{R}$$

$$dq = \sigma(2\pi y)(dy)$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2\pi\sigma y dy}{(r^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$V = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\alpha\frac{ydy}{(r^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^\alpha\frac{dy^2}{(r^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^\alpha\frac{d(r^2+y^2)}{(r^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$V = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^\alpha 2d(r^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{(r^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}-r\right\}$$

i) ὅταν $r \gg \alpha$

$$(r^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = r\left(1+\frac{\alpha^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cong r\left(1+\frac{\alpha^2}{2r^2}\right)$$

$$V \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(r+\frac{\alpha^2}{2r}-r\right) = \frac{\sigma\alpha^2}{4\varepsilon_0 r}\,\frac{\pi}{\pi} = \frac{\pi\alpha^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

δηλαδή γιά μακρυνές ἀποστάσεις ὁ δίσκος φαίνεται σάν σημειακό φορτίο.

ii) ὅταν $r \ll \alpha$

$$(r^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha\left(1+\frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cong \alpha\left(1+\frac{r^2}{2\alpha^2}\right) \cong \alpha$$

$$V \cong \frac{\sigma\alpha}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{r}{\alpha}\right)$$

Ἠλεκτρική Δυναμική Ἐνέργεια

Ἔστω ὅτι θέλομε νά φέρωμε δύο φορτία σέ κάποια ἀπόσταση μεταξύ τους. Ἐφ' ὅσον καθ' ἕνα ἀπό αὐτά ἐξασκεῖ μιά δύναμη πάνω στό ἄλλο γιά νά ἔλθουν κοντά τά δύο φορτία πρέπει νά ὑπερνικήσωμε τή δύναμη αὐτή, νά ξοδευθῆ δηλαδή κάποιο ἔργο. Ἡ κατανάλωση αὐτή τοῦ ἔργου ταυτίζεται μέ ἕνα ποσό ἐνεργείας πού τό θεωροῦμε ἀποθηκευμένο στό σύστημα τῶν δύο φορτίων. Τήν ἐνέργεια αὐτή καλοῦμε ἠλεκτρική δ υ ν α μ ι κ ή ἐ ν έ ρ γ ε ι α. Ἡ ἠλεκτρική δυναμική ἐνέργεια μπορεῖ νά μετασχηματιστῆ σέ ἄλλη μορφή π.χ. ἄν τά φορτία εἶναι ὁμόσημα καί τ' ἀφήσομε ἐλεύθερα νά κινηθοῦν, αὐτά θ' ἀρχίσουν νά ἀπομακρύνωνται καί θ' ἀποκτήσουν κινητική ἐνέργεια.

'Ορίζομε τήν ήλεκτρική δυναμική ένέργεια U ένός συστήματος φορτίων σάν τό όλικό έργο πού χρειάζεται γιά νά συγκεντρώσωμε τό σύστημα αύτῶν τῶν φορτίων μέ τό νά τά φέρωμε στή θέση τους άπό τό άπειρο. Θεωροῦμε ὅτι άρχικά (ὅταν βρίσκονταν στό άπειρο δηλαδή) τά φορτία ἦσαν σέ ήρεμία, δέν εἶχαν δηλαδή άρχική κινητική ένέργεια.

Τό δυναμικό γιά ἕνα σημειακό φορτίο q_1 εἶναι ἴσο μέ:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q_1}{r}$$

Τό έργο πού χρειάζεται γιά νά φέρωμε ἕνα φορτίο q_2 σέ άπόσταση r_{12}

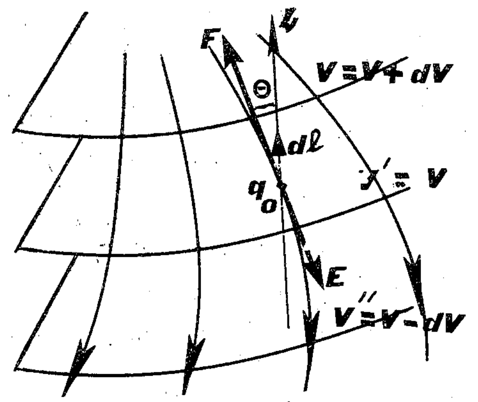
$$W = q_2 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \equiv U \qquad \text{(δυναμ. ένέργεια)}$$

<u>'Υπολογισμός τοῦ $\vec{E}$ άπό τό V</u>

"Οπως ἔχει ἤδη άναφερθῆ τά $\vec{E}$ καί V μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν ίσοδυνάμως καί εἴδαμε ὅτι τό V ὁρίζεται άπό τό $\vec{E}$ μέ τή σχέση:

$$V = -\int_{\infty}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (18.1)$$

'Εάν δηλαδή γνωρίζομε τό $\vec{E}$ σ' ὅλα τά σημεῖα τοῦ χώρου μποροῦμε νά βροῦμε τό V άπό τή σχέση (18.1). Γραφικά, ἄν ξέρωμε τίς γραμμές τοῦ $\vec{E}$ μποροῦμε νά τραβήξωμε ίσοδυναμικές έπιφάνειες, έπιφάνειες δηλαδή πού νά εἶναι κάθετες στίς γραμμές τοῦ $\vec{E}$. 'Αντίθετα ἄν γνωρίζωμε τίς ίσοδυναμικές έπιφάνειες V, V' καί V'' μποροῦμε νά βροῦμε τίς γραμμές τοῦ $\vec{E}$, κάθετες στίς ίσοδυναμικές αύτές έπιφάνειες.



Τό στοιχειῶδες έργο ΔW γιά μετακίνηση τοῦ φορτίου q_0 άπό τήν ίσοδυναμική έπιφάνεια V στήν Ι.Ε. V+ΔV ίσοῦται,

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{l} = F\Delta l\cos\vartheta$$

ἤ $$\Delta W = -q_0\vec{E}\cdot\Delta\vec{l} = -q_0 E\Delta l\cos(\pi-\vartheta) = q_0 E\Delta l\cos\vartheta$$

άλλά $$\Delta W = q_0\Delta V$$

$$q_0\Delta V = q_0 E(\Delta l)\cos\vartheta$$

ἤ $$E\cos\vartheta = \frac{\Delta V}{\Delta l}$$

Τό $E\cos\vartheta = E_\ell$ εἶναι ή προβολή τοῦ $\vec{E}$ στή διεύθυνση $\vec{\ell}$ ἤτοι τό $\vec{E}$ ἔχει φορά κατά τή διεύθυνση πού έλαττώνεται τό V. Γράφομε λοιπόν

$$E_l = -\frac{dV}{dl} \qquad \text{παίρνοντας διαφορικά}$$

'Εάν τώρα δοκιμάσωμε πολλούς δρόμους $\vec{\ell}$ τότε θά ύπάρχη, ἕνας πού ή μεταβολή $|dV/d\ell|$ θά εἶναι μέγιστη. 'Ορίζομε τό $|\vec{E}|$

$$E = -\left(\frac{dV}{d\ell}\right) \text{ μέγιστο} \qquad \text{(volts/meter)}$$

'Η διεύθυνση $\vec{\ell}$ κατά τήν όποία τό $dV/d\ell$, πού καλεῖται **βαθμίδα δυναμικοῦ**, εἶναι μέγιστο εἶναι πάντοτε κάθετη στήν ίσοδυναμική έπιφάνεια, δηλαδή σ' αύτή τήν περίπτωση $\vartheta=0$, $\cos\vartheta=1$

Οί προβολές τοῦ E στούς ἄξονες x,y,z εἶναι:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = \hat{a}_x E_x + \hat{a}_y E_y + \hat{a}_z E_z = -\left(\hat{a}_x\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

ἤ $$\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$$

$$\vec{\nabla} = \hat{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial}{\partial z} \equiv \text{άνάδελτα}$$

Τό $\vec{\nabla}V$ καλεῖται **βαθμίδα** δυναμικοῦ καί καμμιά φορά συμβολίζεται:

$$\vec{\nabla} V = \text{grad } V$$

Τό (grad V) εἶναι ἄνυσμα

<u>Παραδείγματα</u>

α) <u>Σημειακό φορτίο q</u>

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q}{r} \qquad \text{άλλά} \qquad \vec{r} = \hat{a}_x x + \hat{a}_y y + \hat{a}_z z = \hat{a}_r r$$

καί $$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\hat{a}_x\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

ἀλλά $$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x}{r}$$

τελικά $$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}$$

Μέ ὅμοιο τρόπο $$\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{y}{r^3}\,,\quad \frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}$$

καί $$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\hat{a}_x x+\hat{a}_y y+\hat{a}_z z)=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{q\hat{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

β) <u>Ἄλλος τρόπος</u> Ξαίρομε ὅτι γιά σημειακό φορτίο ἔχομε σφαιρική συμμετρία καί ὅτι γιά σφαιρική συμμετρία ἡ μεγίστη μεταβολή εἶναι κατά τή διεύθυνση τοῦ r.

$$\vec{E}=-\frac{dV}{dr}\hat{a}_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

γ) <u>Φορτισμένος δίσκος</u>

Γενική περίπτωση $$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\{(r^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}-r\}$$

$$E=-\frac{dV}{dr}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{(-r)}{(r^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}+1\right\}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{1-\frac{r}{(r^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

i) ὅταν $r>>\alpha$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{1-\frac{1}{(1+\frac{\alpha^2}{r^2})^{\frac{1}{2}}}\right\}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{1-\left\{1-\frac{\alpha^2}{2r^2}\right\}\right\}$$

$$E=\frac{\sigma\alpha^2}{4\varepsilon_0 r^2}=\frac{\pi\sigma\alpha^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ (σημειακό φορτ.

ii) ὅταν $r<<\alpha$

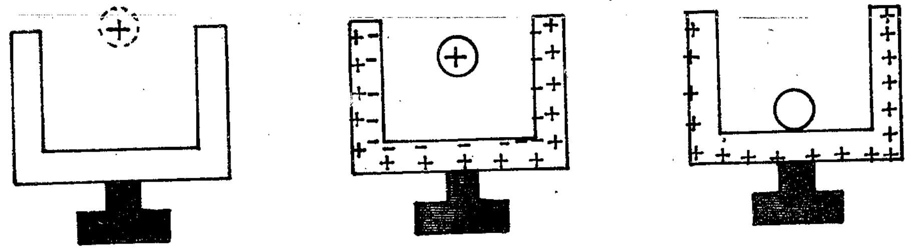
$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{1-\frac{r}{\alpha(1+\frac{r^2}{\alpha^2})^{\frac{1}{2}}}\right\}\cong\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{1-\frac{r}{\alpha}\left(1-\frac{r^2}{2\alpha^2}\right)\right\}$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{1-\frac{r}{\alpha}\right\}\cong\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Βλέπομε δηλαδή ὅτι πολύ κοντά στόν δίσκο τό πεδίο μοιάζει μέ πεδίο ἐπιπέδου κατανομῆς φορτίου ἀπείρων διαστάσεων.

<u>Κατανομή φορτίων σέ ἀγωγούς</u>. Ὅπως θά δοῦμε παρακάτω ἀγωγοί (μέταλλα καί κράματα στήν προκειμένη περίπτωση) εἶναι σώματα στά ὁποῖα τά φορτία εἶναι ἐλεύθερα νά κινηθοῦν. Ὅταν φορτίζομε ἕνα ἀγωγό τά φορτία ἐφ' ὅσον εἶναι ἐλεύθερα νά κινηθοῦν καταλαμβάνουν μιά θέση ἰσορροπίας. Τό κάθε φορτίο ἀπωθεῖται ἀπό ὅλα τά ἄλλα καί ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν. Τά φορτία πού τοποθετοῦνται σ' ἕνα ἀγωγό πού εἶναι μονωμένος συγκεντρώνονται στήν ἐξωτερική του ἐπιφάνεια.

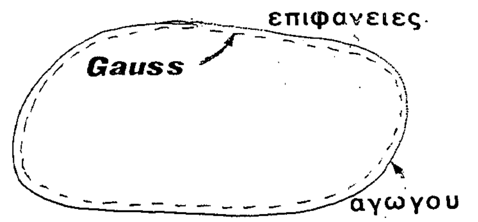
Πειραματικά ἀποδεικνύομε τοῦτο μέ τό νά φέρομε μέσα σέ ἕνα μεταλλικό δοχεῖο ἀπομονωμένο καί ἀφόρτιστο ἀρχικά ἕνα φορτίο ἔστω θετικό (α). Στό δοχεῖο ἐπάγονται ἀρνητικά καί θετικά φορτία(β). Ὅταν τό σῶμα ἔλθη σέ ἐπαφή μέ τό ἐσωτερικό τοῦ δοχείου



α β γ

παρατηροῦμε ὅτι τά θετικά φορτία κατανέμονται στό ἐξωτερικό τοῦ δοχείου (γ).

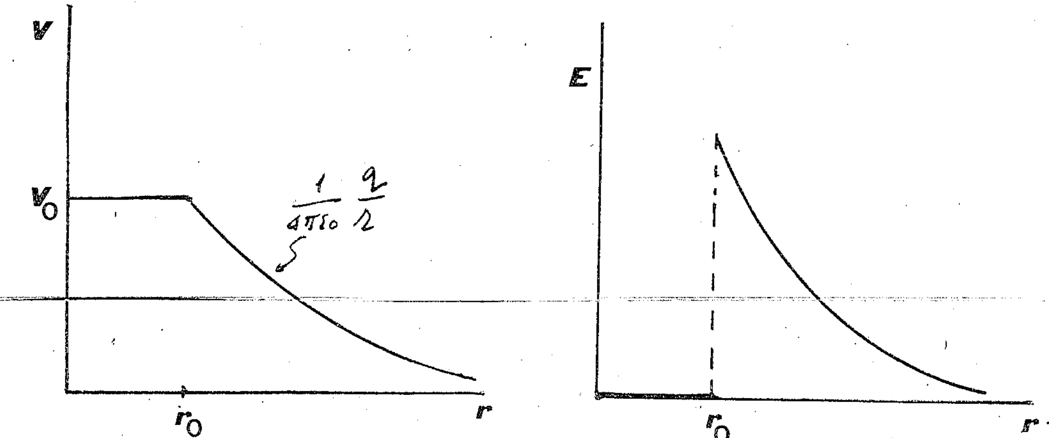
Στήν κατάσταση τῆς ἰσορροπίας -ὅταν τά φορτία θά ἔχουν κατανεμηθῆ στήν ἐξωτερική ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ καί δέν θά κινοῦνται πλέον- τό πεδίο στό ἐσωτερικό τοῦ ἀγωγοῦ θά εἶναι μηδέν. Ἡ ἐξωτερική ἐπιφάνεια καί τό ἐσωτερικό τοῦ ἀγωγοῦ θά εἶναι στό ἴδιο δυναμικό γιατί ἄν δέν ἦταν φορτία θά ἐκινοῦντο ἀπό τό ὑψηλότερο στό χαμηλότερο δυναμικό. Τό πεδίο στό ἐξωτερικό τοῦ ἀγωγοῦ θά εἶναι διάφορο τοῦ μηδενός καί θά εἶναι κάθετο στήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ μιά καί ὁ ἀγωγός εἶναι ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια. Ἐφαρμόζομε τό θεώρημα Gauss στό ἐσωτερικό τοῦ ἀγωγοῦ. Πέρνομε μιά ἐπιφάνεια (διακεκομένη γραμμή) ὅσο κοντά θέλομε στήν ἐξωτερική ἐπιφάνεια.



$$\int\vec{E}\cdot d\vec{s}=0 \quad \text{γιατί} \quad \vec{E}=0$$

ἀλλά $$\int\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$ ἄρα $q=0$ μέσα στόν ἀγωγό

Τό δυναμικό καί τό πεδίο πού ὀφείλεται σέ μονωμένο σφαιρικό ἀγωγό φλοιό ἔχουν τή μορφή:



Τά ἴδια ἰσχύουν καί γιά συμπαγῆ σφαιρικό ἀγωγό.
Ὅπως ἔχουμε δεῖ προηγουμένως τό E ἔχει διαφορετική συμπεριφορά γιά σφαιρική ὁμογενῆ κατανομή φορτίου.
Εἴχαμε ἀποδείξει στή σελίδα 13 ὅτι

$$E = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2} & r > r_0 \\[2ex] \dfrac{q\,r}{4\pi\varepsilon_0 r_0{}^3} & r < r_0 \end{cases}$$

Τό δυναμικό $V_r - V_{r_0} = -\int_{r_0}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\dfrac{q\,r^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0^3} + \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$

ἀλλά $\quad V_{r_0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_0}$ καί $V_r = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0} - \dfrac{q\,r^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0^2} + \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$

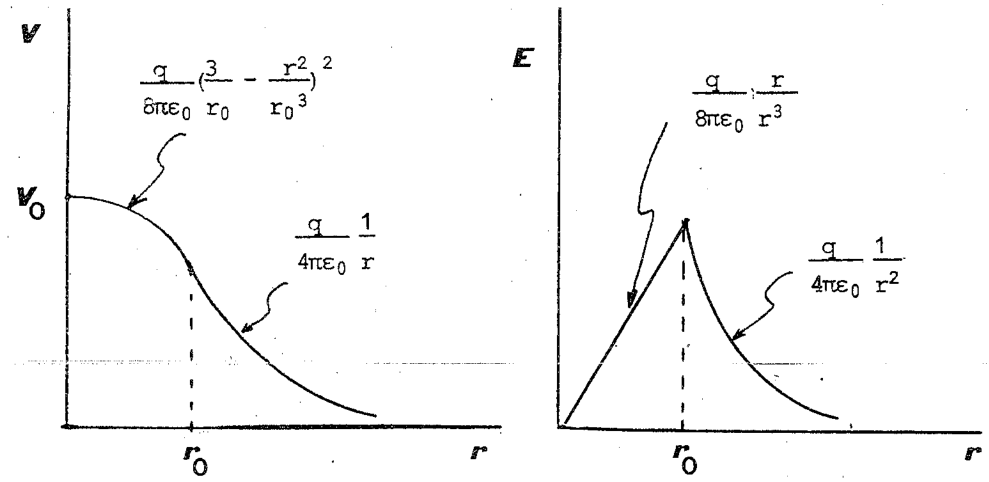
$$V_r = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3}{r_0} - \frac{r^2}{r_0^3}\right\}$$

Γιά $r = r_0 \qquad V_{r_0} = \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{3}{r_0} - \dfrac{r_0}{r_0^3}\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$

Γιά $r = 0 \qquad V_0 = \dfrac{3\,q}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$

Ἡ διαφορά τῶν δύο περιπτώσεων ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι στή δεύτερη περίπτωση τό φορτίο εἶναι συνεχῶς κατανεμημένο σ' ὅλο τό χῶρο τῆς σφαίρας.

Σημειώνομε ὅτι στήν ἰσοδυναμική μεταλλική ἐπιφάνεια ἡ ἐπι-

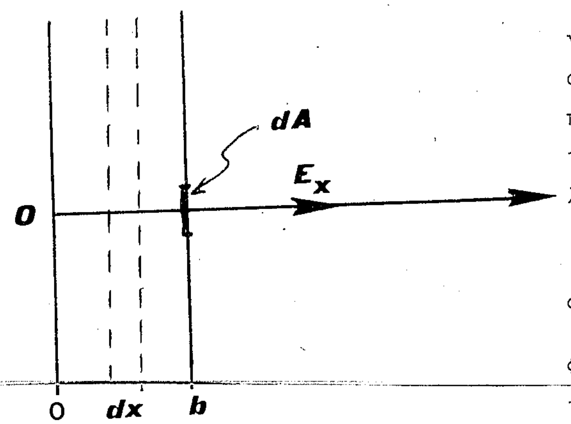


φάνειακή πυκνότητα τοῦ φορτίου εἶναι μεγαλύτερη στίς περιοχές ὅπου ὑπάρχει μικρή ἀκτῖνα καμπυλότητος. Ἐπί παραδείγματι ἡ ἔνταση τοῦ πεδίου E εἶναι μεγάλη σέ αἰχμηρά σημεῖα τῆς ἐπιφανείας καί εἶναι σχετικῶς μικρή σέ ἐπίπεδες περιοχές τῆς ἐπιφανείας.

ΔΥΝΑΜΗ ΕΞΑΣΚΟΥΜΕΝΗ ΕΠΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

Θέλομε νά ὑπολογίσωμε τή δύναμη πού ἐξασκεῖται ἐπάνω σ'ἕνα στοιχειῶδες φορτίο καί ἡ ὁποία ὀφείλεται στήν ὕπαρξη τῶν ὑπολοίπων φορτίων ὁμοιομόρφου ἐπιφανειακῆς κατανομῆς. Ἡ δύναμη F εἶναι ἴση πρός EσdA ὅπου σ ἡ πυκνότητα καί dA ἡ στοιχειώδης ἐπιφάνεια. Τό ἐρώτημα εἶναι ποιά εἶναι ἡ τιμή τοῦ πεδίου E. Στή μεταλλική σφαῖρα π.χ. πού ἐξετάσαμε παραπάνω, τό πεδίο στό ἐσωτερικό ἔστω καί πολύ κοντά στήν ἐξωτερική ἐπιφάνεια εἶναι μηδέν ἐπάνω δέ στήν ἐπιφάνεια $(1/4\pi\varepsilon_0\alpha)$. Γενικώτερα ὅταν ἔχομε μιά ἐπιφάνεια τό δυναμικό ἀπό τή μιά μεριά τῆς ἐπιφανείας (E_{in}) εἶναι διάφορο τοῦ δυναμικοῦ ἀπό τήν ἄλλη μεριά (E_{out}). Στή μεταλλική σφαῖρα π.χ. $E_{in}=0$, $E_{out}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$. Ἡ σωστή ἀπάντηση εἶναι $dF=\dfrac{1}{2}(E_{in}+E_{out})dq$

Γιά νά δοῦμε αὐτό θεωροῦμε μιά πλάκα πάχους β μέ πολύ μεγάλες (ἄπειρες) τίς ἄλλες διαστάσεις της. Γιά νά ἑρμηνεύσωμε τήν ἐπιφανειακή κατανομή σ μποροῦμε νά φανταστοῦμε ὅτι ἡ σεῖ-



ναι μιά ὁριακή περίπτωση στήν ὁποία κάποια χωρική πυκνότητα φορτίου ρ συγκεντρώνεται στήν ἐπιφάνεια δηλαδή μποροῦμε νά γράψωμε (πέρνοντας τό ὅριο β→0)

$$\sigma = \int_0^{\beta\to 0} \rho dx = \rho\beta \qquad \text{ὅπου } \rho dx = d\sigma$$

Φυσικά πρέπει νά ἔχομε πάντα ὑπ' ὄψη ὅτι στή φύση πραγματική ἐπιφανειακή πυκνότητα (δηλαδή πάχος =0) δέν ὑπάρχει.

'Από τά προηγούμενα γνωρίζομε ὅτι:

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$dF_x = dqE_x = \sigma dA \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dA$$

$$f_x = \frac{dF_x}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad \text{(μονάδες πιέσεως)}$$

Μποροῦμε ὅμως νά ὑπολογίσωμε τό f_x καί ὡς ἑξῆς. Στό στοιχειῶδες φορτίο στό τμῆμα d_x ἐξασκεῖται μιά δύναμη ἀνά μονάδα ἐπιφανείας.

$$df_x = d\sigma E_x = \frac{d\sigma\,\sigma}{2\varepsilon_0} = 2\varepsilon_0 dE_x E_x$$

$$f_x = 2\varepsilon_0 \int_0^{\beta} E_x dE_x = \varepsilon_0 (E_\beta^2 - E_0^2)$$

$$f_x = \varepsilon_0 (E_\beta - E_0)(E_\beta + E_0)$$

ὅταν $\beta \to 0$, $E_\beta - E_0 \to E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$$f_x = \frac{1}{2}(E_0 + E_\beta)\,\sigma$$

Στήν ἴδια ὁριακή περίπτωση ὅπου $\beta \to 0$ μποροῦμε νά θεωρήσωμε ὅτι $E_0 \to E_{in}$, $E_\beta \to E_{out}$ καί νά γράψωμε

$$f_x = \frac{1}{2}(E_{in} + E_{out})\,\sigma$$

ἤ $F_x = \frac{1}{2}(E_{in} + E_{out})\, q_0$ ὅπου q_0 τό φορτίο στήν ἐπιφάνεια dA

Παράδειγμα γιά ὁμοιογενῆ ἐπιφανειακή σφαιρική κατανομή σ

$$E_{out} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} = \frac{4\pi r_0^2\,\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E_{in} = 0$$

$$f_x = \frac{1}{2}(E_{in} + E_{out})\sigma = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

$$dF_x = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dA$$

'Η φορά τῆς δυνάμεως κατευθύνεται πρός τά ἔξω γιατί εἶναι ἀπωστική. Μιά ὅμως πού τά φορτία δέν ἀπομακρύνονται ἀπό τήν ἐπιφάνεια πρέπει νά τά κρατάη ἐκεῖ μιά ἄλλη δύναμη, ἀτομικῆς ἤ μοριακῆς φύσεως, ἡ ὁποία δέν ἔχει περιληφθῆ στίς παραπάνω ἐξισώσεις. 'Εάν φορτίζαμε ἕνα κοινό μπαλόνι, τοῦτο θά τείνη νά ἐκταθῆ.

'Εάν θελήσωμε νά ἐλαττώσωμε τήν ἀκτῖνα μιᾶς ἐπιφανειακῆς σφαιρικῆς κατανομῆς φορτίου κατά dr θά πρέπη νά καταβάλωμε ἔργο γιά νά κατανικήσωμε τή δύναμη

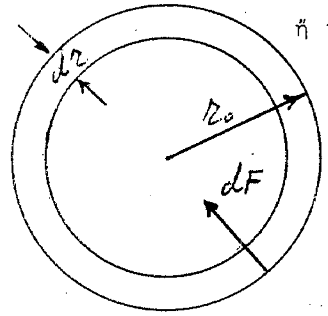
$$F = \int \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dA = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}(4\pi r_0^2)$$

Τό ἔργο $dW = Fdr = (\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0})(4\pi r_0^2)dr$

ἀλλά $4\pi r_0^2 \sigma = Q$ καί $dW = \frac{Q^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 r_0^2}$

ἤ $dW = \frac{Q^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 r_0^2} = (4\pi r_0^2 dr)(\frac{\varepsilon_0}{2})(\frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r_0^4}) = (dv)(\frac{\varepsilon_0}{2})(E^2)$

ἤ τέλος $dW = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dv$



Παρατηροῦμε ὅτι κατά τή μεταβολή τῆς ἀκτῖνος ἀπό r_0 εἰς $r_0 - dr$ τό ἠλεκτρικό πεδίο ἄλλαξε μόνο εἰς τήν περιοχή dr (r_0, $r_0 - dr$) ἐνῶ σέ ὅλον τόν ὑπόλοιπο χῶρο τό πεδίο ἔμεινε τό ἴδιο.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΥΝΔΕΔΕΜΕΝΗ ΜΕ ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

'Η δυναμική ἐνέργεια U συστήματος φορτίων (τό ὁλικό ἔργο δηλαδή πού ἀπαιτήθηκε γιά νά δημιουργηθῆ τό σύστημα) μπορεῖ νά ὑπολογισθῆ ἀπό τό ἴδιο τό ἠλεκτρικό πεδίο μέ τό νά θεωρήσωμε σέ κάθε στοιχειώδη ὄγκο dv τοῦ χώρου μιά ποσότητα ἐνεργείας dW καί ἐν συνεχεία νά ὁλοκληρώσωμε τό dW σέ ὅλο τό χῶρο

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\substack{\text{σέ ὅλο}\\ \text{τό πεδίο}}} E^2 dv \qquad (E^2 = \vec{E}\cdot\vec{E})$$

Γιά σφαῖρα ἀκτῖνος r_0 π.χ.

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{r_0}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

Τό ἴδιο ἀποτέλεσμα εὑρίσκομε ἄν ὑπολογίσωμε τό ἔργο πού ἀπαιτεῖται γιά νά συγκεντρώσωμε τά φορτία ἀπό τό ∞ στό r_0

$$U = \int_{\infty}^{r_0} -\frac{Q^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

Σημειῶστε ὅτι ἡ δυναμική ἐνέργεια καί τό δυναμικό εἶναι δύο διαφορετικές ἐντελῶς ἔννοιες. Ἡ δυναμική ἐνέργεια συστήματος στασίμων φορτίων εἶναι τό ἔργο πού ἀπαιτήθηκε γιά νά συγκεντρωθοῦν τά φορτία καί τό ὁποῖο μποροῦμε νά θεωρήσωμε ὅτι ἀποθηκεύτηκε στό σύστημα. Εἶναι βαθμωτή (ὄχι ἀνυσματική δηλαδή) ποσότητα καί ἰδιότητα τοῦ συστήματος στό σύνολό του. Τό ἠλεκτρικό δυναμικό εἶναι συνάρτηση θέσεως στό χῶρο γιά κάποια δεδομένη κατανομή φορτίων. Ἡ διαφορά τοῦ δυναμικοῦ σέ δύο σημεῖα τοῦ χώρου εἶναι τό ἔργο ἀνά μονάδα φορτίου πού ἀπαιτεῖται γιά νά μεταφέρωμε φορτίο ἀπό τό ἕνα σημεῖο στό ἄλλο.

Γιά νά τονίσωμε τή διαφορά μεταξύ U καί V ὑπολογίζομε τό U συναρτήσει τοῦ V δεδομένου ὅτι

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$U = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\substack{\text{σέ ὅλο}\\ \text{τό χῶρο}}} |\nabla V|^2 dv$$

Μποροῦμε ὅμως καί ἄλλιῶς

Γιά δύο φορτία q_1 q_2 $\qquad U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$

Γιά τρία φορτία $\qquad U_{123} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$

Γιά N φορτία

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\left\{\sum_{j=1}^{N}{}' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

ὅπου $\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}$, $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}{}'$ σημαίνει τό ἄθροισμα στό ὁποῖο ὁ δείκτης j παίρνει τιμές ἀπό 1 μέχρι N ἀλλά δέν παίρνει τίς τιμές πού ἰσοῦνται μέ i, δηλαδή ἀποκλείονται ἀπό τό ἄθροισμα ὅροι $q_i q_i$, V_i εἶναι τό δυναμικό στή θέση τοῦ φορτίου q_i λόγω τῆς ὑπάρξεως ὅλων τῶν ἄλλων φορτίων.

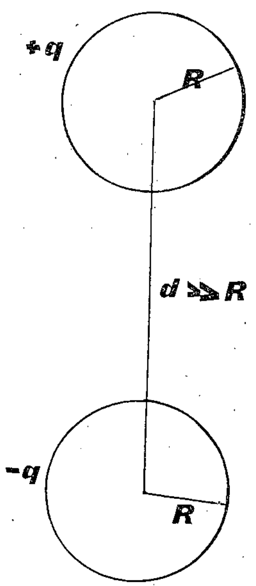
Γιά συνεχῆ κατανομή φορτίου.

$$U = \frac{1}{2}\int \rho V dv$$

ΠΥΚΝΩΤΕΣ ΚΑΙ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ

Θεωροῦμε δύο σφαῖρες μέ φορτία +q καί −q σέ πολύ μεγάλες ἀποστάσεις μεταξύ τους (ἔτσι ὥστε τό δυναμικό τῆς μιᾶς νά μή ἐπηρεάζη τό δυναμικό τῆς ἄλλης, τά δυναμικά καί τά πεδία δηλαδή παραμένουν ἀκτινικά). Σέ ἄπειρη ἀπόσταση καί ἀπό τίς δύο σφαῖρες τό δυναμικό $V_\infty = 0$. Ἔχομε λοιπόν:

$V'_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$ στήν ἐπιφάνεια



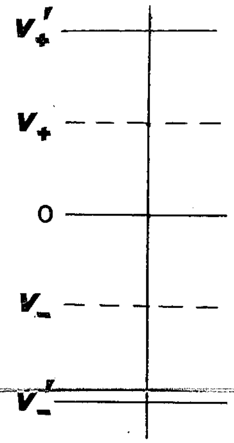
$V_\infty = 0$

$V'_- = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$

Ἡ διαφορά

$$V' = V'_+ - V'_- = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{R} \qquad (33.1)$$

εἶναι ἡ μεγίστη μεταξύ τῶν δύο σφαιρῶν. Σέ ἄξονα πού θεωροῦμε ὡς ἄξονα δυναμικῶν σημειώνομε τά V'_+, V'_- καί V_∞.



Τήν (33.1) γράφομε:

$$q = (2\pi\varepsilon_0 R)V' = C'V'$$

Ἐάν οἱ σφαῖρες πλησιάσουν, τά δυναμικά V_+, V_- θά ἐλαττωθοῦν (οἱ ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες δέν εἶναι πλέον σφαῖρες). Ἡ νέα διαφορά θά εἶναι:

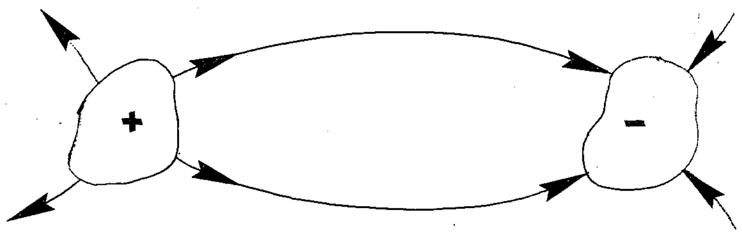
$$V = V_+ - V_- < V'$$ Τό φορτίο $$q = C\,V$$

Ἐφ' ὅσον $V < V' \Rightarrow C > C'$

Τό C καλεῖται χ ω ρ η τ ι κ ο τ η τ α τοῦ συστήματος τῶν 2 σφαιρῶν. Γιά μιά ἀπομονωμένη σφαῖρα μέ φορτίο ἔστω +q ὁρίζομε τό C μέ τό νά θεωρήσωμε μιά ἄλλη σφαῖρα μέ ἴδιο κέντρο μέ τή πρώτη καί ἀκτῖνα ∞

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

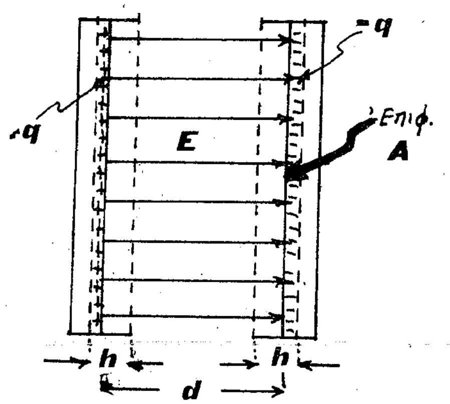
Τό C μετρεῖται σέ Farad καί ἔχει μονάδες (Coul/Volt)



Ἕνα σύστημα φορτισμένων ἀγωγῶν μέ + καί - φορτία καλεῖται πυκνωτής. Οἱ μεταλλικές ἐπιφάνειες καλοῦνται ὁπλισμοί. Στήν πράξη χρησιμοποιοῦμε πιό συμμετρικά σχήματα.

ΠΥΚΝΩΤΗΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες πού φέρουν φορτία +q καί -q καί εὑρίσκονται σέ ἀπόσταση d ἀποτελοῦν ἕνα π υ κ ν ω τ ή π α ρ α λ λ ή λ ω ν π λ α κ ῶ ν. Ἐφαρμόζομε τό θεώρημα Gauss σέ μιά ἀπό τίς δύο πλάκες:



$$\varepsilon_0\Phi = \varepsilon_0 E\,A = q$$

Τό ἔργο πού χρειάζεται γιά νά μεταφερθῆ ἕνα φορτίο ἀπό τήν πλάκα + στήν - εἶναι ἴσο μέ:

$$W = qV \quad \text{ἤ} \quad W = Fd = q\,E\,d$$

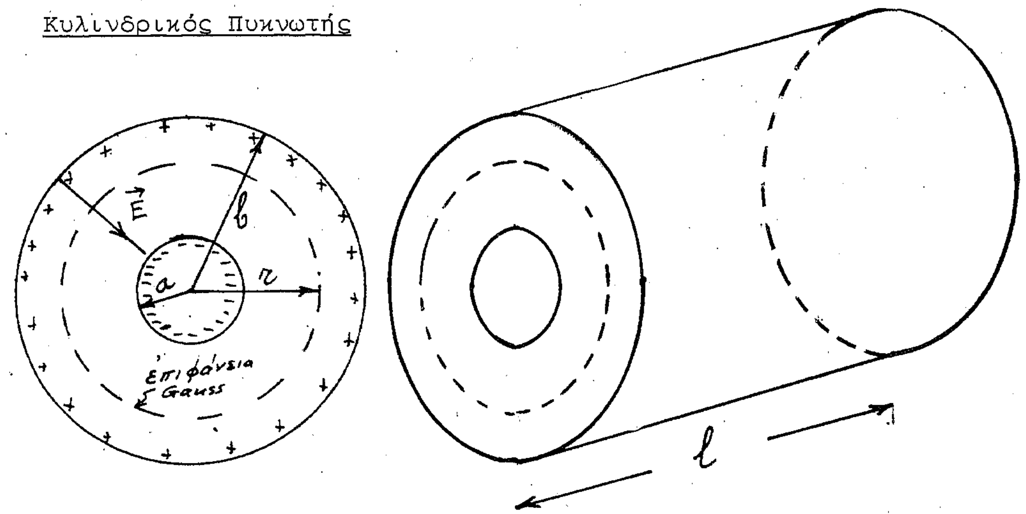
$$V = E\,d$$

Γενικώτερα ὑπολογίζομε τό V ἀπό

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = E\,d$$

Ἡ χωρητικότητα $C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 EA}{Ed} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

Κυλινδρικός Πυκνωτής



Ἀπό θεώρημα Gauss $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q$

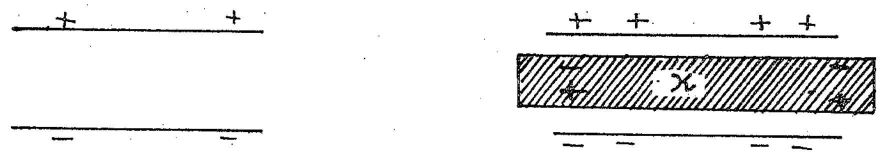
$$\varepsilon_0 E\,(2\pi r)\,l = q \qquad E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l r}$$

$$V = -\int_\alpha^\beta \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_\alpha^\beta E\,dr = \int_\alpha^\beta \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\,\frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

καί $$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(\beta/\alpha)}$$

Ἡ χωρητικότητα ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τίς γεωμετρικές διαστάσεις τοῦ ὑλικοῦ.

ΠΥΚΝΩΤΗΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ



$q=cv$ $\qquad$ $q'=c'v$ $\quad$ $q'>q$ $\quad$ $c'>c$

ἤ $\quad$ $q=c'v'$ $\quad$ $v'=v/\kappa$ $\quad$ $v'<v$

Ἐάν τοποθετήσουμε διηλεκτρικό (μονωτή) μεταξύ τῶν δύο πλακῶν παρατηροῦμε πειραματικά ὅτι:

α) Ἐάν V χωρίς διηλεκτρικό = V μέ διηλεκτρικό τότε τό φορτίο q αὐξάνει καί γίνεται q' καί ἐπειδή V=V ∴ C'>C. Ὁ λόγος C'/C=κ καλεῖται διηλεκτρική σταθερά τοῦ διηλεκτρικοῦ

β) Ἐάν ἀφήσωμε τό V νά ἀλλάξη (V'≠V) ἀλλά κρατήσωμε τό ἴδιο φορτίο τότε παρατηροῦμε ὅτι V'=V/κ ἤτοι τό V ἐλαττώθηκε.

Τό ἀποτέλεσμα τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ διηλεκτρικοῦ ἦταν νά αὐξήση τή χωρητικότητα τοῦ πυκνωτοῦ κατά κ. Ἐν γένει λοιπόν ἡ διηλεκτρική σταθερά κ≥1 εἰσέρχεται εἰς τόν τύπο τῆς χωρητικότητας

Γράφομε:

$$C = \kappa \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

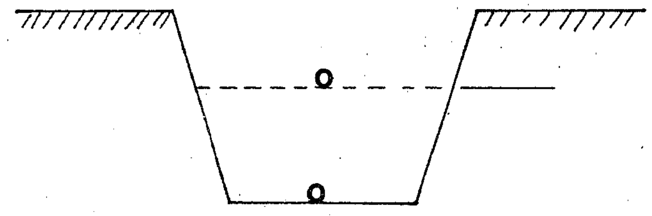
Γιά τυχόν σχῆμα $\qquad C = \kappa\, \varepsilon_0 L$

ὅπου L ἐξαρτᾶται ἀπό τή γεωμετρία.

ΑΓΩΓΟΙ, ΜΟΝΩΤΕΣ (ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ), ΗΜΙΑΓΩΓΟΙ

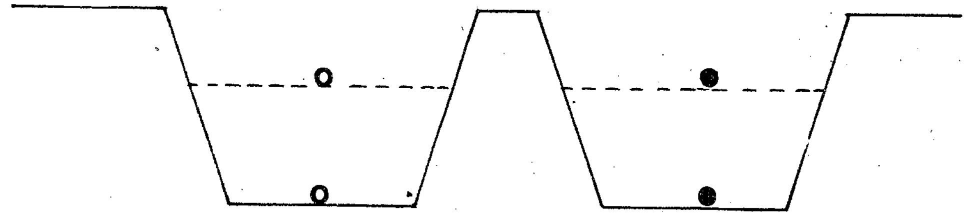
Γιά νά κατανοήσωμε τή συμπεριφορά τῶν ὑλικῶν (ἀγωγῶν, μονωτῶν κλπ) πρέπει νά καταφύγωμε στήν ἀτομική θεωρία τῆς ὕλης. Θά χρησιμοποιήσωμε ἐδῶ ἕνα χονδρικό μοντέλλο γιά νά καταλάβωμε ποιοτικά τί συμβαίνει. Ἀπό τήν ἀτομική θεωρία ξέρομε ὅτι τά ἄτομα εἶναι οὐδέτερα καί ὅτι τά ἠλεκτρόνια εἶναι παγιδευμένα γύρω ἀπό τόν πυρῆνα καί ὅτι εὑρίσκονται σέ διαφορετικές ἐνεργειακές στάθμες. Γιά νά ἀπομακρυνθῆ ἕνα ἠλεκτρόνιο ἀπό ἕνα ἄ-

τομο (γιά νά ἰονισθῆ δηλαδή τό ἄτομο) χρειάζεται νά δώσωμε ἔργο. Παράδειγμα ἀπό κλασική μηχανική, σῶμα μέσα σέ φρέαρ.



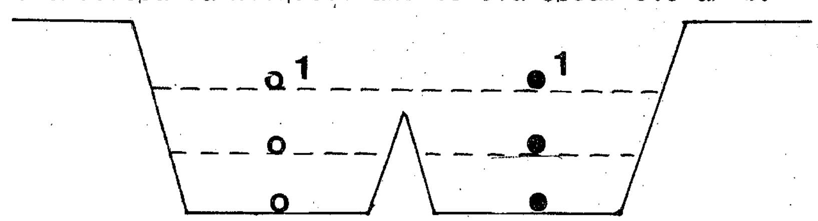
Σῶμα πού βρίσκεται μέσα στό φρέαρ χρειάζεται νά πάρη ἐνέργεια (h ἤ H π.χ.) γιά νά βγῆ ἀπό τό φρέαρ.

Ἐάν ἔχομε δύο φρέατα



Κάθε σῶμα "ἀνήκει στό δικό του φρέαρ", δέν μπορεῖ δηλαδή νά πάη ἀπό τό ἕνα φρέαρ στό ἄλλο χωρίς νά πάρη κάποια ἐνέργεια.

Ἐάν ὅμως τά φρέατα πλησιάσουν ὅπως στό ἑπόμενο σχῆμα τότε μπορεῖ νά ὑπάρξη περίπτωση ὥστε ἕνα ἤ περισσότερα σώματα νά εἶναι ἐλεύθερα νά κινηθοῦν ἀπό τό ἕνα φρέαρ στό ἄλλο.



Τά σώματα 1 εἶναι ἐλεύθερα νά κινηθοῦν ἀπό τό ἕνα φρέαρ στό ἄλλο.

Ἡ εἰκόνα εἶναι πολύ ἀφελής περιέχει ὅμως τά χαρακτηριστικά τῶν ἀγωγῶν καί μονωτῶν. Στούς ἀγωγούς ὡρισμένα ἀπό τά ἠλεκτρόνια μποροῦν νά κινηθοῦν ἐλεύθερα ἀπό ἄτομο σέ ἄτομο, τά ὁποῖα ἄτομα κατέχουν σταθερές θέσεις στό κρυσταλλικό πλέγμα. Στούς ἠλεκτρολύτες ὡρισμένα ἀπό τά οὐδέτερα μόρια διασπῶνται σέ θετικά καί ἀρνητικά ἰόντα τά ὁποῖα κινοῦνται πλέον ἐλεύθερα μέσα στό διάλυμα. Φυσικά καί τά μέταλλα καί οἱ ἠλεκτρολύτες ἔχουν συνολικά οὐδέτερο φορτίο, ἐφ' ὅσον ἐμεῖς ἐξωτερικά δέν ἔχομε προσδώσει ἠλεκτρικό φορτίο σέ αὐτά. Ἀντιθέτως οἱ μονωτές ἔχουν ὅλα τους τά ἠλεκτρόνια δεσμευμένα μέ τά ἄτομα ἤ τά μόρια τῶν διαλυτῶν δέν διΐστανται σέ ἰόντα.

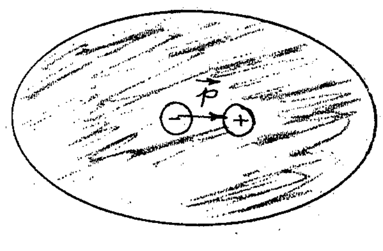
Ὅταν λοιπόν ἐφαρμόσωμε σ' ἕνα ὑλικό ἕνα ἐξωτερικό ἠλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στά μέν μέταλλα (καί κράματα) τά ἠλεκτρόνια θά κινηθοῦν λόγω τῆς δυνάμεως $e\vec{E}$ πού θ' ἀσκηθῆ σ' αὐτά (τά ἰονισμένα ἄτομα θά μείνουν στή θέση τους στό κρυσταλλικό πλέγμα) στούς δέ ἠλεκτρολύτες θά κινηθοῦν καί τά θετικά καί τ' ἀρνητικά ἰόντα (κατ' ἀντίθετες φορές). Στούς μονωτές διακρίνομε δύο περιπτώσεις:

α) Τά μόρια ἔχουν μόνιμη διπολική ροπή ὅπως π.χ. τά μόρια τοῦ ὕδατος. Σέ αὐτήν τήν περίπτωση οἱ ἠλεκτρικές διπολικές ροπές $\vec{p}$ τείνουν νά προσανατολισθοῦν πρός τό ἠλεκτρικό πεδίο. Ἡ θερμική κίνηση τῶν μορίων τείνει νά τά ἀποπροσανατολίση.

β) Τά μόρια δέν ἔχουν μόνιμη διπολική ροπή. Κατά τήν ἐφαρμογή τοῦ $\vec{E}$ θά μετατοπισθοῦν τά θετικά καί ἀρνητικά φορτία κατ' ἀντίθετη φορά, θά ὑπάρξη δηλαδή μιά ἐπαγωμένη διπολική ροπή.

$E = 0$

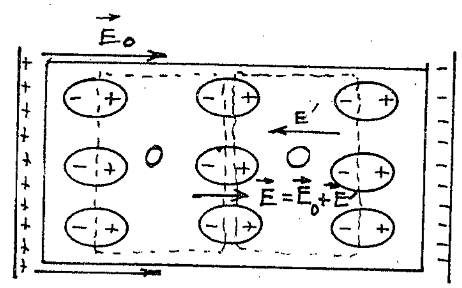
Κέντρο + καί -
φορτίου συμπίπτουν



$\vec{E} \neq 0$

Κέντρο + καί - φορτίου μετατοπίζεται, Ἐπάγεται διπολική ροπή $\vec{p}$

Ἐάν λοιπόν τοποθετήσωμε τό διηλεκτρικό μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν ἑνός πυκνωτοῦ μέ παράλληλες πλάκες τά δίπολα (ἐπαγόμενα ἤ μόνιμα) προσανατολίζονται πρός τό πεδίο. Τό διηλεκτρικό παραμένει οὐδέτερο ἀλλά στίς ἐπιφάνειές του κοντά στούς ὁπλισμούς τοῦ πυκνωτοῦ ἐμφανίζονται φορτία ἀντιθέτου σημείου ἀπό τό ση-



μεῖο τοῦ φορτίου τοῦ ὁπλισμοῦ. Τά φορτία αὐτά δέν εἶναι ἐλεύθερα ἀλλά δεσμευμένα, ἐξακολουθοῦν δηλαδή ν' ἀνήκουν στά ἄτομα ἤ μόρια τοῦ ὑλικοῦ καί καλοῦνται φορτία π ο λ ώ σ ε ω ς.

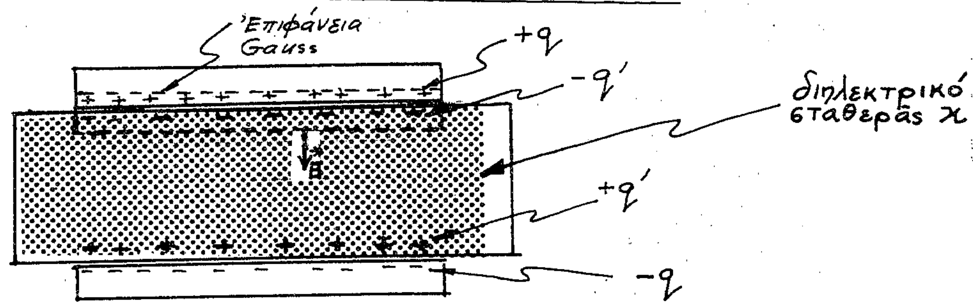
Τό συνιστάμενο πεδίο $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ (ὅπου $\vec{E}'$ τό πεδίο λόγω τῶν ἐπαγωμένων φορτίων στά ἄκρα τοῦ διηλεκτρικοῦ) εἶναι μικρότερο ἀπό τό ἐφαρμοζόμενο E_0 ($E=E_0-E'$)

Γιά παράλληλο πυκνωτή

$$\frac{E_0}{E} = \frac{V_0}{V} = \kappa$$

Μέ τούς ἡμιαγωγούς (ἐνδιάμεση κατάσταση) θ' ἀσχοληθοῦμε μελλοντικά.

NOMOΣ GAUSS ΓΙΑ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ



Ἐάν δέν ὑπῆρχε διηλεκτρικό ὁ νόμος τοῦ Gauss:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E_0 A = q$$

Ἐάν τοποθετήσωμε διηλεκτρικό

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E A = q - q'$$

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A}$$

Τό q' τό ἐπαγώμενο ἐπιφανειακό φορτίο, εἶναι διαφορετικό ἀπό τό q τό ἐλεύθερο φορτίο ἐπάνω στούς ὁπλισμούς. Τό $q - q'$ εἶναι τό καθαρό φορτίο μέσα στήν ἐπιφάνεια Gauss. Ἔχομε:

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa\varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A} \Longrightarrow q' = q\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

Βλέπομε ὅτι $q'<q$ καί $q' = 0$ ἐάν $\kappa = 1$

Ὁ νόμος τοῦ Gauss γράφεται

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = q - q' = q/\kappa \quad ἤ \quad \varepsilon_0 \oint \kappa\vec{E}\cdot d\vec{S} = q$$

Παρ' ὅλο πού ἡ παραπάνω σχέση ἐξήχθη γιά πυκνωτή παραλλήλων πλακῶν ἰσχύει γενικώτερα. Ὅταν ἔχωμε διηλεκτρικά (γραμμικά, δηλαδή ἡ τιμή τῆς διηλεκτρικῆς σταθερᾶς εἶναι γραμμική συνάρτηση τῶν x,y,z) τότε ὁ νόμος Gauss εἶναι:

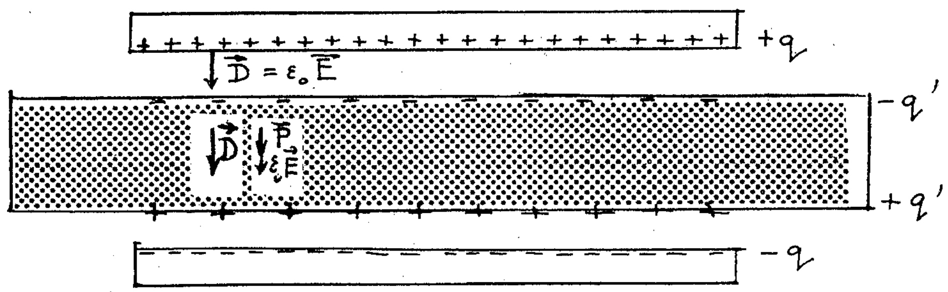
$$\varepsilon_0 \int \kappa\, \vec{E}\cdot d\vec{S} = q_{\text{πραγματικό}}$$

ΤΑ ΑΝΥΣΜΑΤΑ $\vec{E}$, $\vec{D}$ καί $\vec{P}$

Ἡ σχέση πού βγάλαμε γιά πυκνωτή μέ παράλληλους ὁπλισμούς γράφεται:

$$\frac{q}{\varepsilon_0\kappa A} = \frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A} \quad ἤ \quad \frac{q}{A} = \varepsilon_0\left(\frac{q}{\varepsilon_0\kappa A}\right) + \frac{q'}{A}$$

Τό $(q/\varepsilon_0\kappa A)$ εἶναι ἡ ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου στό διηλεκτρικό. Τό (q'/A) εἶναι μιά καινούργια ποσότητα πού καλεῖται ἠλεκτρική πόλωση P



Ἔχομε: $P = \frac{q'}{A} = \frac{q'd}{Ad} = \frac{\text{Ἐπαγωγημένη Ἠλεκτρική Διπολική Ροπή}}{\text{Ὄγκος Διηλεκτρικοῦ μέσα στόν Πυκνωτή}}$

Τέλος γράφομε:

$$\frac{q}{A} = \varepsilon_0 E + P \quad ἤ \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

Τό ἄνυσμα $\vec{D}$ Ἠλεκτρική Μετατόπιση ἤ Ἠλεκτρική Διέγερση

Ἡ ἀνυσματική σχέση $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ ἰσχύει γενικά γιά ὅλα τά διηλεκτρικά γραμμικά ἤ ὄχι. Ἀπό τόν ὁρισμό τῶν ἀνυσμάτων $\vec{D}, \vec{E}$ καί $\vec{P}$ βλέπομε τά παρακάτω:

1. Τό $\vec{D}$ σχετίζεται μόνο μέ τά ἐλεύθερα φορτία. Τό $\vec{D}$ παριστάνεται μέ δυναμικές γραμμές τοῦ $\vec{D}$ ὅπως τό $\vec{E}$ παριστάνεται μέ δυναμικές γραμμές τοῦ $\vec{E}$. Οἱ γραμμές τοῦ $\vec{D}$ ἀρχίζουν καί καταλήγουν σέ ἐλεύθερα φορτία.
2. Τό $\vec{P}$ σχετίζεται μόνο μέ τά φορτία πολώσεως. Οἱ δυναμικές γραμμές τοῦ $\vec{P}$ ἀρχίζουν καί καταλήγουν σέ φορτία πολώσεως.
3. Τό $\vec{E}$ σχετίζεται μέ ὅλα τά φορτία πού εἶναι παρόντα. Ἐλεύθερα καί πολώσεως. Σημειῶστε ὅτι οἱ μονάδες τῶν $\vec{D}$ καί $\vec{P}$ (coul/m²) διαφέρουν ἀπό τίς μονάδες τοῦ $\vec{E}$ (nt/coul)

Τό ἀνυσματικό ἠλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, τό ὁποῖο εἶναι τό πεδίο μέ τό ὁποῖο ὑπολογίζομε τή δύναμη πού δρᾶ σ' ἕνα κατάλληλο δοκιμαστικό φορτίο, παραμένει τό ἄνυσμα μέ τό βασικό ἐνδιαφέρον.

Τά $\vec{D}$ καί $\vec{P}$ γιά γραμμικά διηλεκτρικά μποροῦν νά ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τοῦ $\vec{E}$.

ἀπό τή σχέση (ταυτότητα) $\frac{q}{A} = \kappa\, \varepsilon_0 \left(\frac{q}{\kappa\varepsilon_0 A}\right)$

Συνάγομε ὅτι μποροῦμε νά γράψωμε

$$\vec{D} = \kappa\varepsilon_0\vec{E}$$

Τό ἄνυσμα πολώσεως γράφεται:

$$P = \frac{q'}{A} = \frac{q}{A}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

καί $\vec{P} = \varepsilon_0(\kappa - 1)\,\vec{E}$

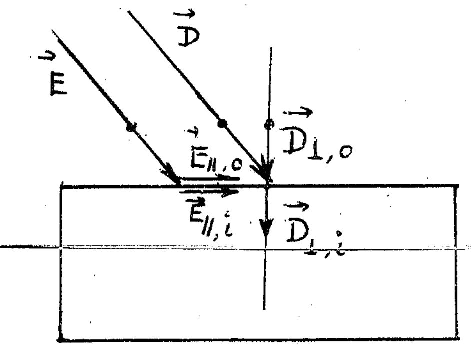
Στό κενό $(\kappa = 1)$ $\vec{P} = 0$

Τέλος ὁ νόμος τοῦ Gauss παρουσία διηλεκτρικοῦ γράφεται:

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = q$$

Ὡρισμένα ὑλικά (σιδηροηλεκτρικά) παρουσιάζουν μόνιμη πόλωση καί γιά $\vec{E}=0$. Τά ὑλικά καλοῦνται ἠλεκτρῆτες (ἀνάλογοι μέ μόνιμους μαγνῆτες).

<u>Όριακές συνθῆκες</u>. Σχέσεις πού συνδέουν ἤ δίνουν τίς τιμέςπού ἔχουν τά πεδία ἤ οἱ συνιστῶσες τους στίς ὀριακές ἐπιφάνειςπού χωρίζουν δύο ὑλικά.



$$\vec{D}_{\perp,o} = \vec{D}_{\perp,i}$$

$$\vec{E}_{\parallel,o} = \vec{E}_{\parallel,i}$$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ἔνταση Ἠλεκτρικοῦ πεδίου $\vec{E}$	Συνδέεται μέ ὅλα τά φορτία	ἔχει συνεχῆ τήν ἐφαπτομενική συνιστῶσα
Ἠλεκτρική Μετατόπιση (Διέγερση) $\vec{D}$	Συνδέεται μέ τά πραγματικά φορτία μόνο	ἔχει συνεχῆ τήν κάθετη συνιστῶσα
Πόλωση (Ἠλεκτρική Διπολική Ροπή ἀνά μονάδα ὄγκου) $\vec{P}$	Φορτία πολώσεως μόνο	μηδενίζεται στό κενό.
Σχέση πού ὁρίζει τό $\vec{E}$	$\vec{F} = q\,\vec{E}$	
Σχέση μεταξύ $\vec{E},\vec{D},\vec{P}$.	$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$	
Νόμος Gauss παρουσία ὑλικῶν	$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_{ἐλ.}$	(ἐλεύθερα φορτία μόνο)
Ἐμπειρικές Σχέσεις πού ἰσχύουν γιά γραμμικά ὑλικά	$\vec{D} = \kappa\,\varepsilon_0\vec{E}$ $\vec{P} = (\kappa-1)\,\varepsilon_0\vec{E}$	

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΑΠΟΘΗΚΕΥΜΕΝΗ ΣΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Ὁ φορτισμένος πυκνωτής ἔχει ἀποθηκευμένη ἐνέργεια U πού ἰσοῦται μέ τό ἔργο πού χρειάστηκε γιά νά φορτισθῆ. Ἡ ἐνέργεια ἀποδίδεται ὅταν ὁ πυκνωτής ἐκφορτίζεται. Ἔστω ὅτι στό χρόνο t φορτίο q′(t) μεταφέρθηκε ἀπό τόν ἕνα ὁπλισμό στόν ἄλλο. Ἡ διαφορά δυναμικοῦ V(t) μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν εἶναι:

$$V(t) = \frac{q'(t)}{C}$$

Ἐάν μεταφέρουμε φορτίο dq′ θά καταναλώσωμε ἔργο:

$$d\,W = V\,d\,q' = \left(\frac{q'}{C}\right) d\,q'$$

Γιά νά μεταφέρουμε συνολικά φορτίο q

$$W = \int_0^q d\,W = \int_0^q \frac{q'dq'}{C} = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{C}$$

$$q = C\,V$$

$$W = U = \frac{1}{2}\,C\,V^2$$

<u>Ἡ πυκνότητα ἐνεργείας</u> (ἐνέργεια ἀνά μονάδα ὄγκου)

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad}\,, \qquad C = \kappa\varepsilon_0 A/d$$

$$u = \frac{\kappa\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\kappa\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\kappa\varepsilon_0 E^2$$

$$u = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\kappa\,E\,E = \frac{1}{2}\,D\;E$$

Γιά τή γενική περίπτωση γράφομε

$$u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

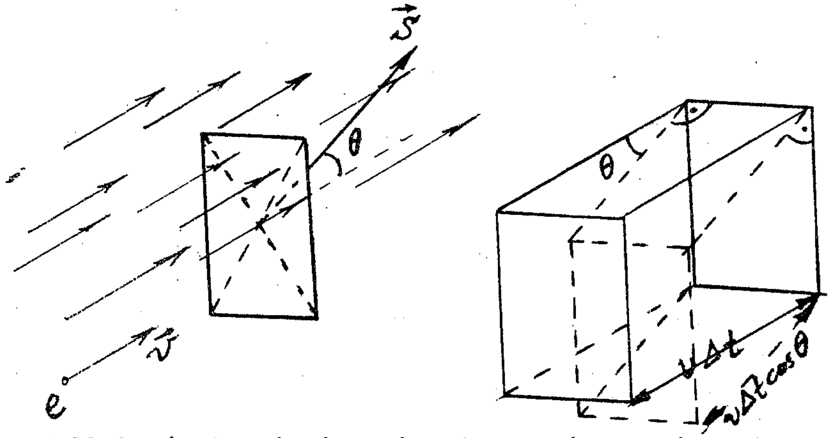
Σέ κάθε σημεῖο τοῦ χώρου πού ὑπάρχει ἠλεκτρικό πεδίο θεωροῦμε ὅτι ὑπάρχει ἀποθηκευμένη ἐνέργεια ἀνά μονάδα ὄγκου $u = (1/2)\vec{D}\cdot\vec{E}$

ΡΕΥΜΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

<u>Ρεῦμα καί Πυκνότητα Ρεύματος</u>. Τό ἠλεκτρικό ρεῦμα προκαλεῖται ἀπό κίνηση ἠλεκτρικῶν φορτίων. Τά ἠλεκτρόνια μέσα σ' ἕνα μέταλλο κινοῦνται πρός ὅλες τίς κατευθύνσεις χωρίς νά ὑπάρχη μιά κατεύθυνση πρός τήν ὁποία νά κινοῦνται ὅλα μαζί. Ἐάν θεωρήσωμε μιά ὁποιαδήποτε ἐπιφάνεια κατά μέσο ὅρο ὁ ἴδιος ἀριθμός ἡ-

λεκτρονίων περνάει ἀπό τήν μιά πλευρά ἀπ' ὅ,τι ἀπό τήν ἄλλη. Ὁ μέσος ρυθμός εἶναι μηδέν. Ἄς θεωρήσωμε τώρα ὅτι στά ἄκρα τοῦ μεταλλικοῦ ἀγωγοῦ συνδέομε τούς πόλους μιᾶς μπαταρίας. Μέσα στόν ἀγωγό θά δημιουργηθῆ ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο λόγω τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ ἀγωγοῦ, καί σέ κάθε ἠλεκτρόνιο θά ἐξασκηθῆ μιά δύναμη eE καί ἔτσι ἀνεξάρτητα ἀπό τήν ὁποιαδήποτε κίνησή τους, θά κινηθοῦν ὅλα μαζί σέ μιά συνισταμένη κατεύθυνση ἀντίθετη πρός τό πεδίο. Ἡ κίνηση αὐτή τῶν ἠλεκτρονίων συνιστᾶ ἕνα ρεῦμα. Γιά νά ὑπολογίσωμε τό ρεῦμα σκεφτόμαστε κατά τόν παρακάτω τρόπο:

Ἔστω ὅτι ὅλα τά ἠλεκτρόνια ἔχουν τήν ἴδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Ὁ ἀριθμός τῶν ἠλεκτρονίων πού περνᾶ μέσα ἀπό τό πλαίσιο σέ χρόνο Δt ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμό τῶν ἠλεκτρονίων πού εὑρίσκονται σέ



ἕνα παραλληλεπίπεδο μέ βάση τό πρίσμα καί πλευρές μήκους $\upsilon\Delta t$ παράλληλες πρός τήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρός $S\upsilon\Delta t \cos\theta$ ($\upsilon\Delta t\cos\theta$ εἶναι τό ὕψος του). Ἐάν στό σῶμα ὑπάρχουν n ἠλεκτρόνια ἀνά cm^3 τότε ὁ ἀριθμός τῶν ἠλεκτρονίων πού βρίσκεται μέσα στό πρίσμα εἶναι ἴσος μέ:

$$n S \upsilon \Delta t \cos\theta = n\, \vec{S}\cdot\vec{\upsilon}\Delta t$$

Ὁ μέσος ρυθμός κατά τόν ὁποῖο φορτίο περνάει ἀπό τό πλαίσιο (φορτίο ἀνά μονάδα χρόνου) ἰσοῦται

$$I(S) = \frac{e(n\vec{S}\cdot\vec{\upsilon}\Delta t)}{\Delta t} = (-e)\, n\, \vec{S}\cdot\vec{\upsilon}$$

Ἐάν εἴχαμε ἠλεκτρόνια μέ διαφορετικές ταχύτητες ἔτσι ὥστε n_i

ἠλεκτρόνια νά εἶχαν ταχύτητα υ_i τότε

$$I(S) = \vec{S}\cdot\Sigma(-e)n_i\vec{\upsilon}_i$$

Γενικώτερα ἄν n_i σωμάτια μέ φορτίο q_i τό καθένα εἶχαν ταχύτητα υ_i τότε:

$$I(S) = \vec{S}\cdot\Sigma n_i q_i \vec{\upsilon}_i$$

Ἡ πυκνότητα ρεύματος εἶναι ἕνα ἄνυσμα πού ἐκφράζει τή διέλευση φορτίου ἀνά μονάδα χρόνου καί ἀνά μονάδα ἐπιφανείας. Εἶναι ἴση μέ:

$$\vec{J} = \Sigma\, n_i q_i \vec{\upsilon}_i$$

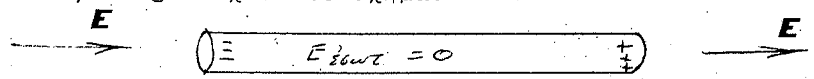
Γιά ἕνα ἀγωγό σέ μορφή σύρματος πού ἔχει N_e ἠλεκτρόνια ἀνά μονάδα ὄγκου ($N_e=\Sigma n_i$)

$$\vec{J} = -e\,\Sigma\, n_i\vec{\upsilon}_i = -e\, N_e\left(\frac{1}{N_e}\Sigma\, n_i\vec{\upsilon}_i\right) = -eN_e\langle\vec{\upsilon}_e\rangle \quad (39.1)$$

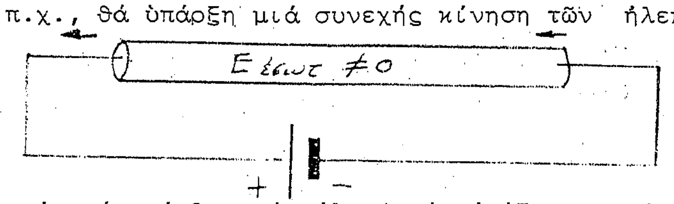
ὅπου $\langle\vec{\upsilon}_e\rangle$ ἡ μέση ταχύτητα τῶν ἠλεκτρονίων.

Ἐάν τό ἐσωτερικό πεδίο εἶναι μηδέν, τότε $\langle\vec{\upsilon}_e\rangle = 0$ καί δέν περνάει ρεῦμα ἀπό τόν ἀγωγό.

<u>Παρατήρηση</u>: Γνωρίζομε ὅτι τό ἐσωτερικό πεδίο σέ ἀγωγούς εἶναι μηδέν ἔστω καί ἄν ἐξωτερικά ὑπάρχει ἠλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$. Διευκρινίζουμε ὅτι τά παραπάνω δέν ἀντικρούουν αὐτό τό γεγονός διότι τό ἐσωτερικό πεδίο εἶναι μηδέν μόνο ἀφοῦ ἀφήσωμε τά φορτία νά ἰσορροπήσουν στήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ. Ὅταν π.χ. βάλωμε ἕνα ἀγωγό μέσα σέ ἠλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ παρατηροῦμε κίνηση τῶν φορτίων τοῦ ἀγωγοῦ πρός τήν ἐπιφάνεια μέχρις ὅτου νά ἐπέλθη ἰσορροπία, ὅπως δείχνει τό σχῆμα.



Ἄν ὅμως συνδέσωμε τά ἄκρα τοῦ ἀγωγοῦ μέ τούς ἀκροδέκτες μιᾶς μπαταρίας π.χ., θά ὑπάρξη μιά συνεχής κίνηση τῶν ἠλεκτρονίων



ἀπό τόν ἀγωγό πρός τό θετικό πόλο (γιά νά ἐξουδετερώση τά θετικά φορτία) τῆς μπαταρίας καθώς καί ἔξοδος τῶν ἠλεκτρονίων ἀπό τόν ἀρνητικό πόλο τῆς μπαταρίας πρός τόν ἀγωγό. Σ' αὐτή τήν περίπτωση δέν ἔχει ἐπέλθη ἀκόμα ἰσορροπία καί τό ἐσωτερικό πεδίο μέσα στόν ἀγωγό μπορεῖ νά ἔχη τιμή διάφορη τοῦ μηδενός.

Σταθερά Ρεύματα. Τό ρεῦμα πού περνᾶ ἀπό ὁποιαδήποτε ἐπιφάνεια S ἰσοῦται:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Ἀπό τό νόμο τοῦ Gauss γράφομε γιά κλειστή ἐπιφάνεια S.

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dV$$

ἀλλά ἀπό ὅσα εἴπαμε προηγουμένως,

$$\vec{J} \cdot \Delta\vec{S} = -eN_e \sum \frac{n_i \upsilon_i \Delta S_i \cos\vartheta_i}{N_e} = -e \sum \frac{n_i \upsilon_i \Delta S_i \cos\vartheta_i \Delta t}{\Delta t} = -e \sum n_i \frac{\Delta V_i}{\Delta t}$$

Τό en_i μπορεῖ νά ἀντικατασταθῆ ἀπό μιά πυκνότητα φορτίου $\Delta\rho_i$ καί ἔχομε:

$$\vec{J} \cdot \Delta\vec{S} = \sum \Delta\rho_i \Delta V_i / \Delta t \overset{\text{ἤ κατά μέσο ὅρο}}{\Longrightarrow} \langle\Delta\rho\rangle\langle\Delta V\rangle / \Delta t$$

Τό $\langle\Delta\rho\rangle/\Delta t$ εἶναι ὁ ρυθμός μέ τόν ὁποῖο τό φορτίο κατά μέσο ὅρο ἀφήνει τόν ὄγκο $\langle\Delta V\rangle$. Γενικεύοντες μποροῦμε νά γράψωμε

$$\left(\begin{array}{l}\text{Ρυθμός μέ τόν ὁποῖο}\\ \text{φορτίο ἀφήνει τόν ὄγκο V}\end{array}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\begin{array}{l}\text{ὁλικό φορτίο πού πε-}\\ \text{ριέχεται στόν ὄγκο V}\end{array}\right)$$

ἤ

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV$$

ἤ

$$\int_S \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dV = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV \qquad (40.1)$$

ἡ παραπάνω σχέση ἰσχύει γενικῶς καί ἰσχύει ὅσο μικρό καί νά πάρωμε τόν ὄγκο V ἄρα θά ἰσχύη καί ὡς διαφορικό

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dV = -\frac{d\rho}{dt}\, dV$$

ἤ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\left\{\frac{d\rho}{dt}\right\}$$

Ἐπειδή τό ρ μπορεῖ νά εἶναι συνάρτηση καί τῶν x,y,z (δηλαδή νά μήν ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό χρόνο), ὁ ρυθμός ὅμως μέ τόν ὁποῖο τό φορτίο ἀφήνει τόν ὄγκο ΔV ἐκφράζει διαφορικό ὡς πρός χρόνο καί ὄχι ὡς πρός συντεταγμένες x,y,z ἡ τελευταῖα σχέση πρέπει νά γραφῆ:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (41.1)$$

ὅπου ἡ μερική παράγωγος ἐκφράζει τό ποσό τοῦ φορτίου πού ἀφήνει τόν ὄγκο ΔV στή μονάδα τοῦ χρόνου.

Οἱ σχέσεις (40.1) καί 41.1) ἐκφράζουν τή διατήρηση τοῦ φορτίου. Δηλαδή φορτίο δέν μπορεῖ ν' ἀπομακρυνθῆ ἀπό κάποια περιοχή τοῦ χώρου χωρίς νά ἔχωμε ταυτόχρονο μείωση τοῦ φορτίου στήν ἴδια περιοχή.

Ἐάν τό $\vec{J}$ παραμένει σταθερό μέ τό χρόνο παντοῦ (εἶναι δηλαδή παντοῦ ἀνεξάρτητο τοῦ χρόνου) τότε ἀπό κάποια περιοχή τοῦ χώρου ἡ ἴδια ποσότητα φορτίου ἐγκαταλείπει τό χῶρο μέ τήν ποσότητα φορτίου πού εἰσέρχεται στό χῶρο, τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι τό συνολικό φορτίο σ' αὐτή τήν περιοχή τοῦ χώρου παραμένει σταθερό. Ἄρα $\partial\rho/\partial t = 0$ καί

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \qquad (41.2)$$

Τά ρεύματα αὐτά καλοῦνται σταθερά.

Συνοψίζομε:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad \text{(κατανομή φορτίου ἐξαρτᾶται ἀπό χρόνο)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \qquad \text{(κατανομή φορτίου ἀνεξάρτητη τοῦ χρόνου)}$$

Ἀντίσταση, Ἀγωγιμότητα Νόμος Ohm

Ἐάν στά ἄκρα ἑνός μεταλλικοῦ ἀγωγοῦ ἐφαρμόσωμε μιά διαφορά δυναμικοῦ V, ὅπως εἴδαμε θά ἀναπτυχθῆ μέσα στόν ἀγωγό ἕνα πεδίο καί λόγω τοῦ πεδίου φορτία (ἠλεκτρόνια π.χ.) τείνουν νά κινηθοῦν λόγω τῆς δυνάμεως qE πού ἀσκεῖται πάνω σ' αὐτά, μέ ἀποτέλεσμα τή δημιουργία ρεύματος I. Πειραματικά ὁ Ohm βρῆκε ὅτι:

$$I = \frac{V}{R}$$

ὅπου R σταθερά πού δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ποσότητα ρεύματος τό ὁποῖο διαρρέει τόν ἀγωγό ἀλλά μόνο ἀπό τό ὑλικό, τή γεωμετρία τοῦ ἀγωγοῦ καί τή θερμοκρασία

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

R εἶναι ἡ ἀντίσταση τοῦ μεταλλικοῦ ἀγωγοῦ (σύρματος π.χ.), l τό μῆκος καί S τό ἐμβαδόν τῆς διατομῆς του. Ἡ ποσότητα ρ εἶναι ἡ εἰδική ἀντίσταση καί ἐξαρτᾶται ἀπό τό ὑλικό καί τή θερμοκρασία ~~Ἡ ἀντίσταση μετρεῖται σέ "Ohm" ἐνῶ ἡ εἰδική ἀντίσταση "Ohm-m"~~

Ἡ ποσότητα $\alpha = \frac{d\rho}{\rho dT}$ ὅπου T θερμοκρασία,

καλεῖται θερμικός συντελεστής εἰδικῆς ἀντίστασης. Τό α μεταβάλλεται ἐπίσης μέ τή θερμοκρασία ἀλλά γιά ὄχι πολύ μεγάλες μεταβολές θερμοκρασίας καί γιά συνήθεις ὑπολογισμούς θεωρεῖται σταθερό. Γιά κάποια λοιπόν περιοχή θερμοκρασίας $T-T_0$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \langle\alpha\rangle \int_{T_0}^{T} dT \qquad \alpha = \langle\alpha\rangle$$

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \alpha\,(T-T_0)$$

ἤ

$$\rho = \rho_0\, e^{\alpha(T-T_0)}$$

Γιά μέταλλα τό α ἔχει πολύ μικρή τιμή ($\sim 10^{-3}$). Ἐάν τό $T-T_0$ δέν εἶναι πολύ μεγάλο τότε ἡ σχέση γράφεται:

$$\rho = \rho_0(1+\alpha(T-T_0))$$

Γιά στερεά ὁμοιογενῆ ὑλικά ἡ πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$ ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό ὑλικό καί τό ἠλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad (42.1)$$

ὅπου σ χαρακτηριστική τοῦ μέσου, καλεῖται ἀγωγιμότητα.

Στά περισσότερα ἀπό τά μέταλλα τό σ εἶναι βαθμωτό καί τό $\vec{J}$ ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση μέ τό $\vec{E}$. Σέ μερικά ὑλικά ἡ ἀγωγιμότητα σ εἶναι τανυστικό μέγεθος, δέν θά ἐξετάσωμε ὅμως τέτοια ὑλικά ἐδῶ.

Ὁ Νόμος τοῦ Ohm (καί ἡ σχέση 42.1) εἶναι πειραματικός καί δέν μπορεῖ νά ἐξαχθῆ ἀπό τίς θεμελειώδεις σχέσεις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἀπό τήν σχέση 42.1 παρατηροῦμε ὅτι σταθερό $\vec{E}$ παράγει σταθερό $\vec{J}$. Ἀλλά ἡ πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$ συνδέεται μέ τήν ταχύτητα (σχέση 39.1) ἐνῶ τό $\vec{E}$ μέ τήν (δύναμη) ἐπιτάχυνση. Περιμέναμε **ὅμως** σταθερό $\vec{E}$ νά ὁδηγῆ σέ σταθερή ἐπιτάχυνση τῶν φορτίων καί ὄχι σέ σταθερή ταχύτητα. Τό ὅτι τοῦτο δέν συμβαίνει στούς ἀγωγούς μᾶς ὁδηγεῖ στό συμπέρασμα ὅτι κάτι (ἄλλη δύναμη δηλαδή) ἐμποδίζει τήν κίνηση τῶν ἠλεκτρονίων. Μέ πολύ ἁπλά λόγια καί χωρίς νά μποῦμε σέ λεπτομέρειες ἑρμηνεύομε τό φαινόμενο ὡς ἑξῆς:

Τά ἠλεκτρόνια ἐλεύθερα νά κινηθοῦν μέσα στό μέταλλο, ὅταν βρεθοῦν στό πεδίο $\vec{E}$ δέχονται μιά δύναμη $e\vec{E}$ καί ἀρχίζουν νά ἐπιταχύνωνται μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = eE/m$ (ὅπου m ἡ μᾶζα τους). Στήν κίνησή τους αὐτή τά ἠλεκτρόνια ἀλληλεπιδροῦν <u>μέ τό κρυσταλλικό</u> πλέγμα τοῦ μετάλλου καί χάνουν μέρος ἀπό τήν ἐνέργειά τους. Ἡ ἀλληλεπίδραση αὐτή εἶναι ἕνα "κβαντομηχανικό φαινόμενο". Τά ἠλεκτρόνια ἐν συνεχεία ἀρχίζουν πάλι νά ἐπιταχύνωνται, χάνουν τήν ἐνέργειά τους κ.ο.κ. μέ ἀποτέλεσμα ν' ἀποκτήσουν μιά ὁρική ταχύτητα

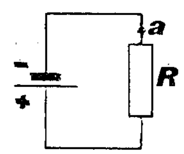
$$\langle\vec{\upsilon}_{op}\rangle = \frac{e\vec{E}\langle t_e\rangle}{m}$$

ὅπου $\langle t_e\rangle$ ὁ μέσος χρόνος πού δαπανᾶ τό ἠλεκτρόνιο χωρίς ν' ἀλληλεπιδράση.

Παρ' ὅλον ὅτι ὁ νόμος τοῦ Ohm ἰσχύει γιά πολύ εὐρεῖες περιοχές ὅταν τά πεδία γίνουν πολύ ἰσχυρά ἤ ὁ χρόνος ἐπενεργείας τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου πολύ μικρός (μικρότερος ἀπό τό $\langle t_e\rangle$ π.χ.) τότε ἡ εἰκόνα ἀλλάζει καί πρέπει ν' ἀντιμετωπίσωμε τό πρόβλημα διαφορετικά.

<u>Ἀπώλεια Ἐνεργείας σέ Ἠλεκτρικό Κύκλωμα</u>

Μιά ὁποιαδήποτε σύνδεση ἠλεκτρικῶν στοιχείων, (ὡς ἀντιστάσεων, πυκνωτῶν, πηγῶν κλπ.) ἀποτελεῖ ἕνα ἠλεκτρικό κύκλωμα. Τό ἁπλούστερο ἠλεκτρικό κύκλωμα εἶναι μία πηγή (μπαταρία π.χ.) συνδεδεμένη μέ μιά ἐξωτερική ἀντίσταση R. Στά ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως ὑπάρχει μιά σταθερή τάση (διαφορά δυναμικοῦ) V. Σέ χρόνο dt ἔχει μεταφερθῆ μέσα ἀπό τήν ἀντίσταση φορτίο $dq = Idt$ ὅπου I τό ρεῦμα πού διέρχεται ἀπό τό κύκλωμα. Ἡ ἐνέργεια πού μεταδόθηκε μέσα ἀπό τήν ἀντίσταση ἰσοῦται μέ



$$dV = dqV = IVdt$$

Ἡ ἰσχύς ἰσοῦται μέ

$$P = dU/dt = IV\ .$$

Ἐφ᾽ ὅσον

$$I = V/R \quad \text{ἤ} \quad V = I\,R$$

Ἔχομε

$$P = \frac{V^2}{R} = I^2R$$

Οἱ μονάδες εἶναι Volt - Amp = joule/sec = watt

<u>Ἠλεκτρεγερτική Δύναμη</u>. Ὑπάρχουν συσκευές οἱ ὁποῖες ἔχουν τήν ἱκανότητα νά παράγουν καί νά διατηροῦν μίαν διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων μέ τά ὁποῖα συνδέονται. Οἱ συσκευές αὐτές εἶναι μπαταρίες, ἠλεκτρικές γεννήτριες κ.ἄ. Λέμε ὅτι εἶναι πηγές ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως (ΗΕΔ). Ἐάν ἡ διαφορά δυναμικοῦ εἶναι συνεχής τότε εἰς τόν ἕνα ἀκροδέκτη τῆς συσκευῆς ἔχομε θετικό δυναμικό καί εἰς τόν ἄλλον ἀρνητικό (ἤ μηδέν) ἤ μποροῦμε νά ἔχωμε ἀρνητικό δυναμικό στόν ἕνα ἀκροδέκτη καί μηδέν στόν ἄλλο. Στήν τελευταῖα περίπτωση ὁ ἀκροδέκτης μηδέν θεωρεῖται ὡς θετικός (εἶναι δηλαδή πιό θετικός ἀπό τόν ἀρνητικό). Γενικά κάθε συσκευή παραγωγῆς ΗΕΔ σταθερᾶς διαφορᾶς δυναμικοῦ μπορεῖ νά παρασταθῆ γραφικά μέ δύο γραμμές καί τά σημεῖα + καί - π.χ.

− ı | +

Ἡ ΗΕΔ $\mathcal{E}$ ὁρίζεται ἀπό τή σχέση

$$\mathcal{E} = dW\,/\,dq$$

ὅπου dW εἶναι τό ἔργο πού παράγει ἡ πηγή ΗΕΔ γιά νά μεταφέρη ἕνα φορτίο dq ἀπό τόν ἕνα ἀκροδέκτη στόν ἄλλο.

<u>Ὑπολογισμός Ρεύματος</u>. Τό ἔργο

$$dW = Pdt = I^2Rdt\ , \quad dq = Idt$$

ἄρα $$I = \mathcal{E}/R$$

Ἐάν διαγράψωμε τό κύκλωμα στή σελίδα 43 ἀπό ὁποιοδήποτε σημεῖο καί ξαναγυρίσωμε σ᾽ αὐτό πρέπει νά βροῦμε τό ἴδιο δυναμικό μέ τό ἀρχικό. Συμπεραίνομε ὅτι:

Τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν μεταβολῶν σέ δυναμικό πού συναντᾶμε σέ μιά πλήρη διαγραφή ἑνός κυκλώματος εἶναι μηδέν.

Ἐάν κάποιο σημεῖο α ἔχει δυναμικό V τότε κατά τή διαγραφή τοῦ κυκλώματος θά ἔχωμε:

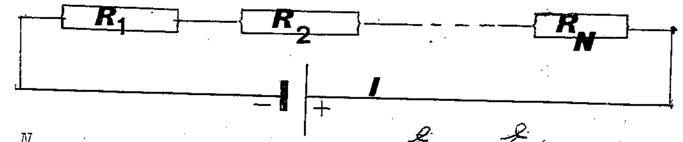
$$V - IR + \mathcal{E} - V = 0$$

$$\mathcal{E} - I\,R = 0$$

Τ᾽ ἀνωτέρω ἀποτελοῦν τόν δεύτερο κανόνα Kirchhoff.

1. Ἐάν μιά ἀντίσταση διατρέχεται κατά τή φορά τοῦ ρεύματος ἡ ἀλλαγή δυναμικοῦ εἶναι -IR ἐάν κατά τήν ἀντίθετο +IR
2. Ἐάν ἡ πηγή ΗΕΔ διατρέχεται κατά τήν διεύθυνση τῆς ΗΕΔ τότε ἡ ἀλλαγή στό δυναμικό εἶναι + , ἀλλοιῶς -

Ἐάν ἔχωμε δύο ἤ περισσότερες ἀντιστάσεις σέ σειρά.



$$\mathcal{E} - \sum_{j=1}^{N} R_j I = 0 \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{\Sigma R_j} = \frac{\mathcal{E}}{R_{ολ.}}$$

ἄρα $$R_{ολ.} = \sum_{j=1}^{N} R_j$$

Ἐάν ἔχωμε δύο ἤ περισσότερες ἀντιστάσεις σέ παράλληλη συνδεσμολογία

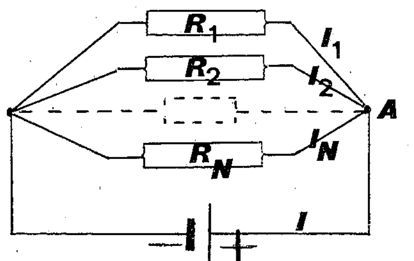
$$I_j = \frac{\mathcal{E}}{R_j}\ , \qquad I = \sum_{j=1}^{N} I_j = \Sigma\,\frac{\mathcal{E}}{R_j} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

ἄρα $$\frac{1}{R} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{R_j}$$

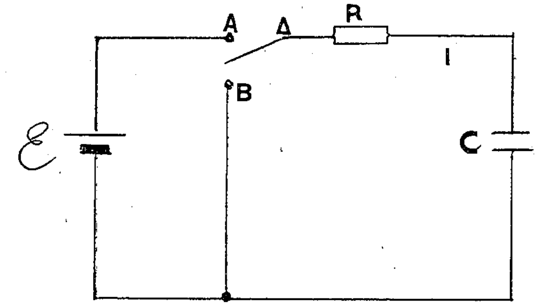
Σέ κόμβο ἠλεκτρικοῦ κυκλώματος ὅπως τό σημεῖον Α στό σχῆμα 46.1 τό ἄθροισμα τῶν ρευμάτων πού εἰσέρχονται στόν κόμβο εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ρευμάτων πού ἐξέρχονται, ἤτοι τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα ὅλων τῶν ρευμάτων θεωρουμένων ὅτι ξεκινοῦν ἀπό τόν κόμβο ἰσοῦται μέ μηδέν. (Πρῶτος κανόνας Kirchhoff).

<u>Κυκλώματα R C</u>

Ἔστω ὅτι ἔχομε ἕνα κύκλωμα πού περιέχει πηγή ΗΕΔ, $\mathcal{E}$, πυκνωτή C, καί ἀντίσταση R.



Σχῆμα 46.1



Σχῆμα 46.2

Ἔστω ὅτι συνδέομε τό διακόπτη Δ μέ τό σημεῖο Α. Τί ρεῦμα διαρρέει τό κύκλωμα;

Στό χρόνο dt περνάει ἀπό κάθε ἐγκαρσία τομή τοῦ κυκλώματος φορτίο $dq = Idt$. Τό ἔργο πού καταναλίσκεται ἀπό τήν ΗΕΔ ($=\mathcal{E}dq$) ἰσοῦται μέ τήν ἐνέργεια πού καταναλίσκεται ἀπό τήν ἀντίσταση σέ χρόνο dt (θερμότητα Joule) σύν τήν αὔξηση ἐνεργείας υ πού ἀποθηκεύεται στόν πυκνωτή ($=d\upsilon = d(q^2/2C)$).

Ἡ ἐξίσωση διατηρήσεως ἐνεργείας γράφεται

$$\mathcal{E}dq = I^2Rdt + d(\frac{q^2}{2C})$$

ἤ $$\mathcal{E}dq = I^2Rdt + \frac{q}{C}\,dq$$

ἤ $$\mathcal{E}\frac{dq}{dt} = I^2R + \frac{qdq}{Cdt}$$

ἀλλά $$\frac{dq}{dt} = I$$

Ἔτσι $$\mathcal{E}\,I = I^2R + \frac{q}{C}\,I \qquad \text{ἤ} \qquad \mathcal{E} = IR + \frac{q}{C}$$

Τό ἴδιο ἀποτέλεσμα βγαίνει καί ἀπό τήν ἐφαρμογή τοῦ δευτέρου κανόνα Kirchhoff

$$\mathcal{E} - IR - \frac{q}{C} = 0$$

Γράφομε ἀντικαθιστῶντες $I = \frac{dq}{dt}$

$$\mathcal{E} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

ἤ $$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}\,q = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

ἡ ἐξίσωση εἶναι τῆς μορφῆς: $$\frac{dx}{dt} + kx = \ell \qquad (46.1)$$

δοκιμάζουμε ὡς λύση τήν $x = \alpha + e^{-kx}$

ἀντικαθιστοῦμε στήν (46.1)

$$\ell = \frac{dx}{dt} + kx = -\beta ke^{-kt} + \alpha k + \beta ke^{-kt} = \alpha k$$

$$\ell = \alpha k \qquad \text{ἤ} \qquad \alpha = \ell/k$$

Ἔστω ὅτι ἔχουμε ἐπίσης $= 0$ γιά $= 0$

Τότε $x(t = 0)\ \alpha\ \alpha + \beta = 0$ ἤ $\beta = -\alpha = -\ell/k$

Ἡ λύση γράφεται

$$x = (\ell/k)\,(1-e^{-kt})$$

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω δοκιμάζουμε σά λύση τήν

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) \qquad (47.1)$$

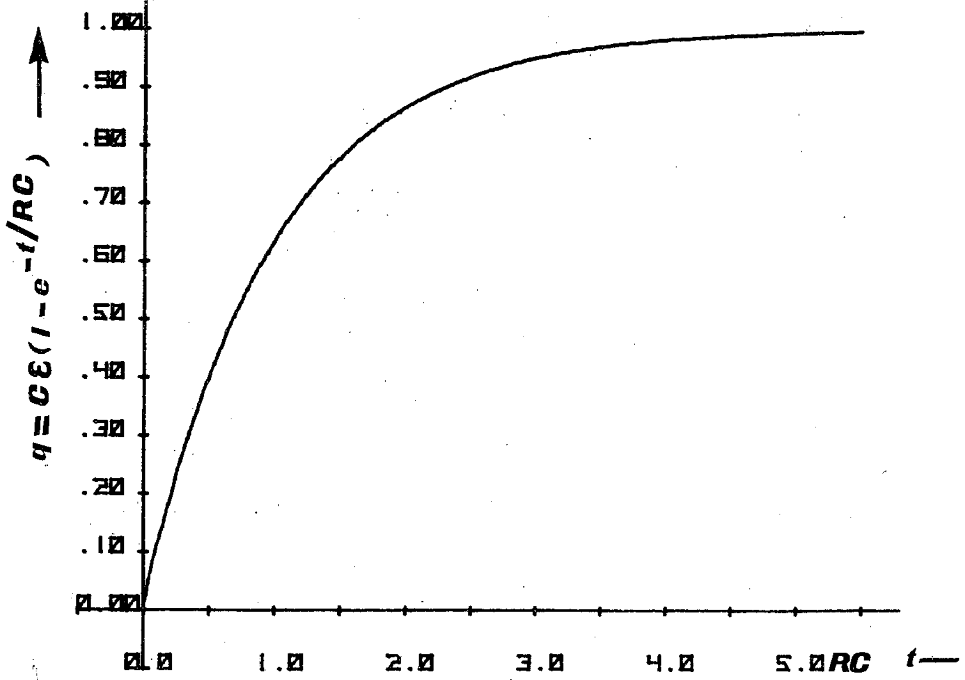
$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\,e^{-t/RC} \qquad (47.2)$$

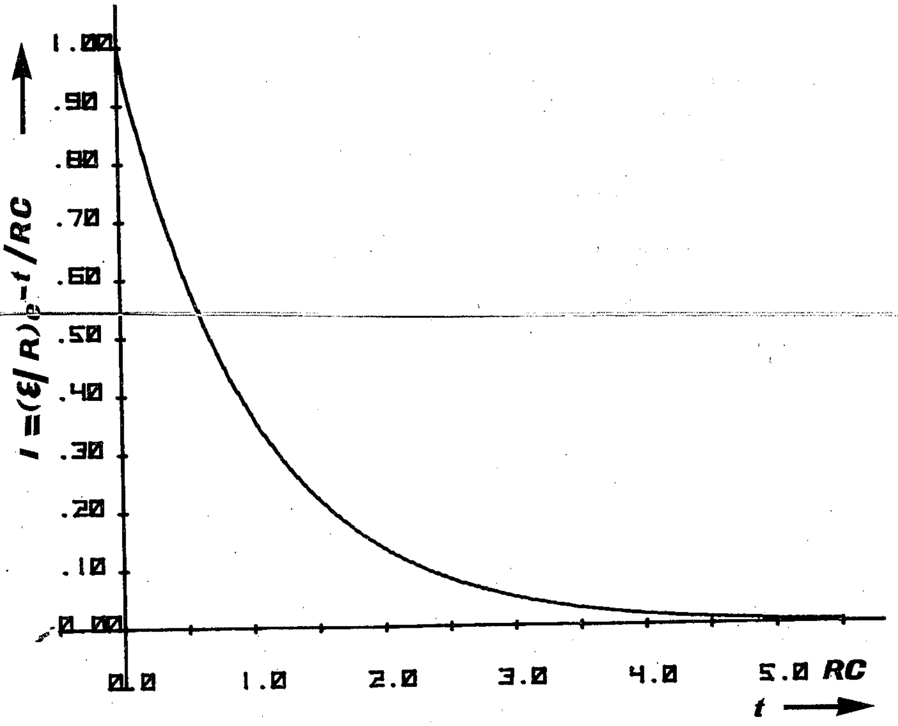
καί $$\frac{\mathcal{E}}{R}\,e^{-t/RC} + \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{\mathcal{E}}{R}\,e^{-t/RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$ ἱκανοποιεῖται

ἄρα ἡ (47.1) εἶναι ἡ σωστή λύση.

Τό ρεῦμα $$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\,e^{-t/RC} \qquad (47.3)$$

Ἡ ποσότητα RC ἔχει μονάδες χρόνου καί εἶναι χαρακτηριστική τοῦ κυκλώματος καί καλεῖται χωρητική σταθερά χρόνου. Γιά παράδειγμα παραθέτομε ἕνα πίνακα μέ τιμές τοῦ q καί τοῦ I συναρτήσει τοῦ χρόνου πού ἐκφράζεται μέ τιμές RC καθώς καί γραφικές παραστάσεις γιά τό q καί I





Πίνακας Τιμῶν q καί I συναρτήσει τοῦ t

t	$I=(e^{-t/RC})\frac{E}{R}$	$q=(1-e^{-t/RC})CE$
0	1	0
.5RC (.5ms)	0,607 A	$0,393*10^{-3}$ cb
RC / ms	0,368 "	0,632 "
1.5RC	0,223 "	0,777 "
2RC	0,135 "	0,865 "
2.5RC	0,082 "	0,918 "
3RC	0,050 "	0,950 "
3.5RC	0,030 "	0,970 "
4RC	0,018 "	0,982 "
4.5RC	0,011 "	0,989 "
5RC	0,007 "	0,993 "

Θεωροῦμε ὅτι
$C\mathcal{E} = 1'$ καί
$\frac{\mathcal{E}}{R} = 1$ A

τότε
RC = 1 msec
π.χ. ἄν R = 1000 Ω
$C = 1\ \mu F = 10^{-6} F$
RC $10^{-3}\Omega F = 10^{-3}$ sec
ἄν $\mathcal{E} = 1000$ V
$\mathcal{E}/R = 1\ V/\Omega = 1$ A
καί $C\mathcal{E} = 10^{-3}$ VF 10^{-3} Cb

Παρατηροῦμε ὅτι τό φορτίο γιά χρόνο μηδέν εἶναι μηδέν καί γιά χρόνο μεγαλύτερο τῶν 5 ἕως 10 RC εἶναι ἴσο μέ τό μέγιστο φορτίο ($C\mathcal{E}$) πού μπορεῖ νά φορτιστῆ ὁ πυκνωτής σέ τάση $\mathcal{E}$. Ἀντίθετα τό ρεῦμα γιά $t = 0$ εἶναι μέγιστο ($I(t=0) = \mathcal{E}/R$) μηδενίζεται ὅμως πολύ γρήγορα. Ἔτσι βλέπομε ὅτι μετά ἀπό ἀρκετό χρόνο ($t > 10RC$) ὁ πυκνωτής εἶναι φορτισμένος καί δέν διέρχεται ρεῦμα ἀπό τό κύκλωμα.

Ἐάν τώρα ἀνοίξομε τόν διακόπτη (τόν τοποθετήσομε στό σημεῖο Β) ἡ πηγή ΗΕΔ θά εἶναι ἔξω ἀπό τό κύκλωμα καί $\mathcal{E} = 0$. Ἔχομε δηλαδή

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Ἡ λύση εἶναι

$$q = q_0 e^{-t/RC} = C\mathcal{E} e^{-t/RC}$$

ὅπου q_0 τό φορτίο πού ἦταν ἀρχικά στόν πυκνωτή (στήν προκειμένη περίπτωση $C\mathcal{E}$).

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$

Τό q ἀρχίζει ἀπό μιά μέγιστη τιμή καί πέφτει ἐκθετικά στό μηδέν τό δέ I ἀρχίζει ἀπό μιά "μέγιστη" ἀρνητική τιμή καί "πέφτει" ἐκθετικά στό μηδέν. Βλέπομε δηλαδή ὅτι

q (ὅταν ὁ διακόπτης στό Β) = 1 − q (ὅταν ὁ διακόπτης στό Α)

I (ὅταν ὁ διακόπτης στό Β) = − I (ὅταν ὁ διακόπτης στό Α)

Εἶναι πολύ χρήσιμο νά χρησιμοποιήσετε τίς τιμές e^{-x} πού δίνονται στόν πίνακα στή σελίδα 48 καί νά σχεδιάσετε σέ μιλλιμετρέ χαρτί τίς συναρτήσεις q καί I γιά τρεῖς πλήρεις κύκλους δηλ.

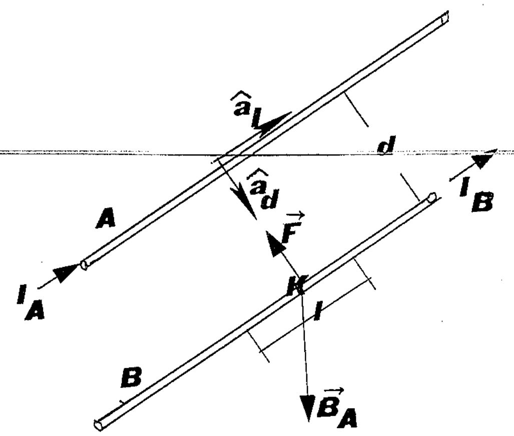
q(διακόπτης στό Α), q(στό Β), q(στό Α), q(στό Β), q(στό Α), q(στό Β)
I " , I " , I " , I " , I " , I "

ΠΕΔΙΑ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

Ἔστω δύο παράλληλοι ἀγωγοί Α καί Β πού διαρρέονται ἀπό ρεύματα I_A καί I_B. Ἐάν τά ρεύματα ἔχουν τήν ἴδια φορά παρατηροῦμε πειραματικά ὅτι ἕλκονται μέ δύναμη πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό μῆκος ℓ, τά ρεύματα I_A καί I_B καί τήν ἀπόστασή τους d σύμφωνα μέ τή σχέση

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_A I_B \ell}{d}, \quad \vec{F} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_A I_B \ell}{d}\hat{a}_d$$

ὅπου $\hat{a}_d$ τό μοναδιαῖο ἄνυσμα στήν κάθετη διεύθυνση ἀπό Α πρός Β.



Ἐάν τά ρεύματα ἔχουν ἀντίθετη φορά ἡ F εἶναι ἀπωστική. Ἡ δύναμη F δέν ἔχει καμιά σχέση μέ τά στατικά φορτία πού ἔχουν οἱ ἀγωγοί ἀλλά ὀφείλεται στήν κίνηση τῶν φορτίων. Οἱ δυνάμεις πού ὀφείλονται στήν κίνηση ἠλεκτρικῶν φορτίων καλοῦνται μ α γ ν η τ ι κ έ ς.

Στό σημεῖο Κ π.χ. τοῦ ἀγωγοῦ Β δημιουργεῖται ἕνα μ α γ ν η τ ι κ ό πεδίο μέ τιμή B_A κάθετο στόν ἀγωγό Α καί στήν εὐθεῖα πού συνδέει ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ Α μέ τό Κ.

$$B_A = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_A}{d}, \quad \vec{B}_A = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_A}{d}(\hat{a}_I\times\hat{a}_d) \qquad (50.1)$$

ὅπου $\hat{a}_I$ τό μοναδιαῖο ἄνυσμα στή διεύθυνση I_A.

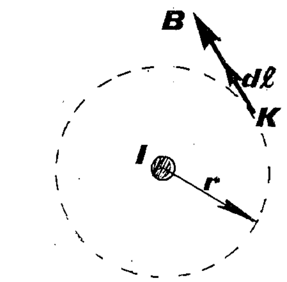
Τό μ_0 εἶναι μία σταθερά, ἡ (μαγνητική) διαπερατότητα (τοῦ κενοῦ), ἰσχύει δέ

$$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \qquad (50.2)$$

Ἡ δύναμη F ἰσοῦται

$$\vec{F} = I_B(\vec{\ell}\times\vec{B}_A) \qquad (50.3)$$

Τό (κινούμενο) φορτίο τοῦ ἀγωγοῦ Β ἀλληλεπιδρᾶ μέ τό μαγνητικό πεδίο B_A πού ὀφείλεται στή διέλευση ρεύματος ἀπό τόν ἀγωγό Α.



Ἔστω ἀγωγός πού διαρρέεται ἀπό ρεῦμα Ι κάθετο πρός τό ἐπίπεδο τῆς σελίδας ἀπό κάτω πρός τά ἐπάνω.

Πειραματικά ὁ Ampère βρῆκε ὅτι γύρω ἀπό τόν ἀγωγό δημιουργεῖται μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ κατά τήν ἐφαπτομένη ὁμοκεντρικῶν μέ τόν ἀγωγό κύκλων. Ἐάν dℓ στοιχεῖο δρόμου στόν κύκλο μέ ἀκτῖνα r ὁ Ν ό μ ο ς A m p è r e γράφεται

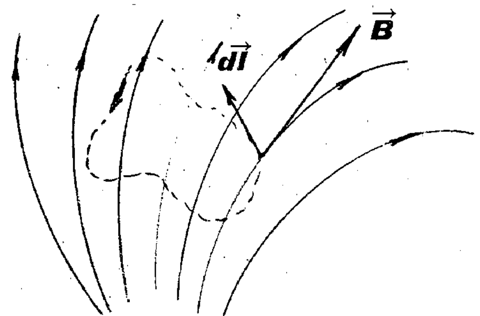
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \qquad (51.1)$$

Ὁ νόμος Ampère ἰσχύει γενικά. Ὁ δρόμος ὁλοκληρώσεως μπορεῖ νά εἶναι ὁποιοσδήποτε. Στήν περίπτωση εὐθύγραμμου ἀγωγοῦ καί κυκλικοῦ δρόμου μέ ἀκτῖνα r τό πεδίο $\vec{B}$ ἔχει σταθερό μέτρο $\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$. Ἄρα

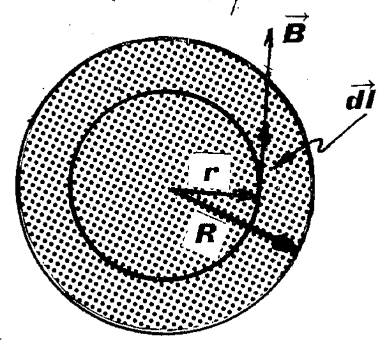
$$\oint\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,d\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,2\pi r = \mu_0 I$$

Ἐάν ἔχομε ἕνα ὁποιοδήποτε μαγνητικό πεδίο

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$



ὅπου Ι εἶναι τό συνολικό ρεῦμα πού διέρχεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια πού περικλείεται ἀπό τό δρόμο ὁλοκληρώσεως.



Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : Πεδίο μέσα σέ ἀγωγό πού διαρρέεται ἀπό ρεῦμα Ι ἐάν J ἡ πυκνότητα ρεύματος

$$J = \frac{I}{\pi R^2}$$

Τό ρεῦμα i πού διαρρέει τόν κύλινδρο r

$$i = J\pi r^2 = \frac{I\pi r^2}{\pi R^2}$$

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\frac{I\pi r^2}{\pi R^2}$$

καί τέλος γιά $r < R$ $\quad B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ir}{R^2}$

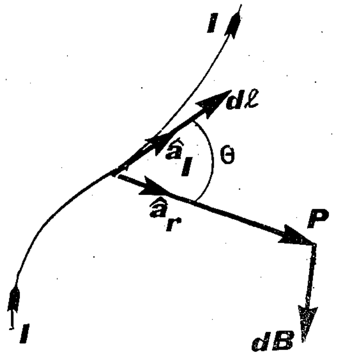
Γιά $r > R$ $\quad B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}$

Μαγνητικά πεδία παράγονται πάντοτε άπό κίνηση φορτίων. Όπως θά δοῦμε άργότερα ύπάρχουν ύλικά άπό τά όποῖα κατασκευάζονται μ ό ν ι μ ο ι μ α γ ν ῆ τ ε ς, οί όποῖοι παρουσιάζουν τό χαρακτηριστικό νά έχουν μόνιμο μαγνητικό πεδίο. Καί αύτό τό πεδίο όμως όφείλεται σέ μικροσκοπικά ρεύματα.

Νόμος Ampère - Laplace ή Νόμος Biot-Savart ή Τύπος Biot-Savart

Έστω σύρμα πού διαρρέεται άπό ρεῦμα I. Στό σημεῖο P τό πεδίο dB ύπολογίζεται άπό τόν τύπο Biot-Savart

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\ell \sin\theta}{r^2}$$



Σέ άνυσματική μορφή

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\hat{a}_I\times\hat{a}_r}{r^2}\,d\ell$$

όπου $\hat{a}_I$ καί $\hat{a}_r$ τά μοναδιαῖα άνύσματα κατά τήν διεύθυνση τοῦ ρεύματος καί τοῦ r άντιστοίχως.

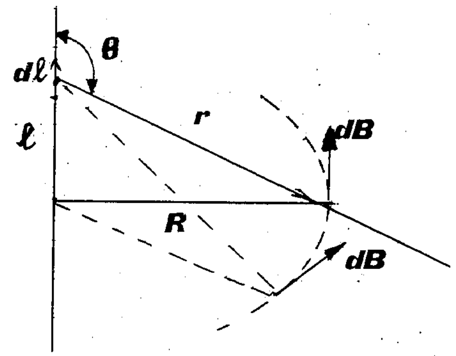
Τό μαγνητικό πεδίο γράφεται

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{\hat{a}_I\times\hat{a}_r}{r^2}\,d\ell$$

Γιά εύθύγραμμο άγωγό άπείρου μήκους

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,d\ell\,\frac{\sin\theta}{r^2}$$

$$r^2 = \ell^2 + R^2$$



$$\sin\theta = \sin(180-\theta) = \frac{R}{\sqrt{\ell^2+R^2}}$$

$$B = \oint\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R\,d\ell}{(\ell^2+R^2)^{3/2}}$$

ή $\quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R\,d\ell}{(\ell^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

ή $\quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(\vec{a}_I\times\hat{a}_R)$

ήτοι τό άποτέλεσμα (50.1)

Παρατηροῦμε ότι ό νόμος Biot-Savart δίνει πάντοτε άποτελέσματα σέ συμφωνία μέ τό νόμο Ampère.

Δύναμη πού έξασκεῖται σέ κινούμενο φορτίο

Ένα φορτίο dq πού κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ίσοδυναμεῖ μέ κάποιο ρεῦμα $I = dq/dt$ όπου dt ό χρόνος πού έκανε τό φορτίο νά διανύσει διάστημα dℓ

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\ell}\frac{d\ell}{dt} = \frac{dq}{d\ell}\upsilon$$

Έάν τό dq κινεῖται σέ μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ τότε άπό τήν (50.3) προκύπτει ότι

$$\vec{F} = I(d\vec{\ell}\times\vec{B}) = \frac{dq}{d\ell}\upsilon\,(d\vec{\ell}\times\vec{B}) \qquad (53.1)$$

άλλά $d\vec{\ell} = d\ell\,\hat{a}_\upsilon$ όπου $\hat{a}_\upsilon$ τό μοναδιαῖο άνυσμα κατά τήν διεύθυνση $\vec{\upsilon}$ καί φυσικά $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{a}_\upsilon$. Άντικαθιστῶντες στήν (53.1)

$$\vec{F} = \frac{dq}{d\ell}\upsilon\,(d\ell\hat{a}_\upsilon\times\vec{B}) = dq(\vec{\upsilon}\times\vec{B}) \qquad (53.2)$$

Ή (53.2) εἶναι ή θεμελειώδης σχέση πού έκφράζει τή δύναμη πού έξασκεῖται έπάνω σέ ένα φορτίο, όταν τοῦτο κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ μέσα σέ ένα μαγνητικό πεδίο. Έάν ταυτοχρόνως μέ τό $\vec{B}$ ύπάρχει καί ήλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ τότε ή δύναμη πού έξασκεῖται σέ φορτίο q εἶναι

$$\vec{F} = q(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}) \qquad (53.3)$$

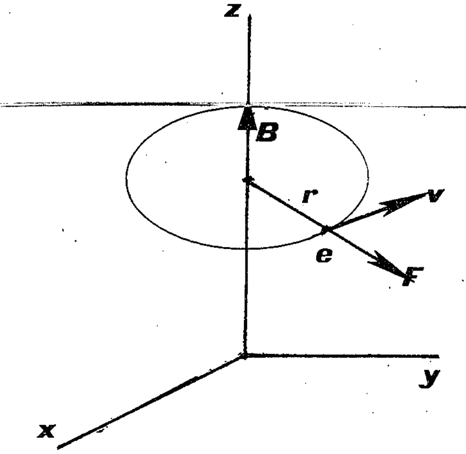
Ή έκφραση (53.3) καλεῖται δ ύ ν α μ η L o r e n t z.

Όπως καί στήν περίπτωση τοῦ $\vec{E}$ στήν ήλεκτροστατική ταυτίζομε τό $\vec{B}$ μέ τό μαγνητικό πεδίο διότι τό $\vec{B}$ προκαλεῖ τή δύναμη σέ φορτίο, πού κινεῖται μέσα σ'αὐτό. Παλαιότερα τό $\vec{B}$ ἐκαλεῖτο μ α γ ν η τ ι κ ή ἐ π α γ ω γ ή. Ἐμεῖς θά τό ἀποκαλοῦμε μαγνητικό πεδίο, ἀριθμητικά δέ ταυτίζεται μέ τήν ἔνταση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α: Τροχιά ἠλεκτρονίου σέ ὁμοιογενές Β.

Π ε ρ ί π τ ω σ η α. $\vec{\upsilon} \perp \vec{B}$

$$\vec{F} = e\,\vec{\upsilon}\times\vec{B} = e\upsilon B\hat{a}_r$$



Ἐάν θεωρήσομε ὅτι τό ἠλεκτρόνιο κινεῖται στό ἐπίπεδο xy μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ καί τό $\vec{B}$ εἶναι κατά τόν ἄξονα τῶν Z ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἔχει σταθερό μέτρο καί διεύθυνση κατά τήν ἀκτίνα ἀπό τόν ἄξονα Z. Ἄρα τό ἠλεκτρόνιο θά ἐκτελέσει κυκλική τροχιά μέ ἀκτίνα r πού βρίσκεται ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἐπιτάχυνση γ δίδεται ἀπό τόν τύπο

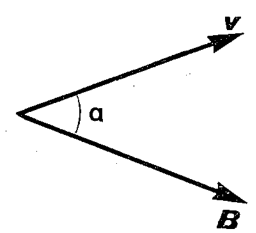
$$F = m\gamma = m\,\frac{\upsilon^2}{r}$$

ὅπου m = μάζα ἠλεκτρονίου. Ἀλλά $F = e\upsilon B$, ἄρα

$$e\upsilon B = m\,\frac{\upsilon^2}{r} \quad \text{ἤ} \quad r = \frac{m\upsilon}{eB} \qquad (54.1)$$

Π ε ρ ί π τ ω σ η β. Γενική περίπτωση

$$\vec{F} = e\vec{\upsilon}\times\vec{B}\ ,\ F = e\upsilon B\sin a$$



Ἐάν ἀναλύσομε τήν $\vec{\upsilon}$ σέ παράλληλη συνιστῶσα πρός τό $\vec{B}$, $\vec{\upsilon}_{//}$ καί σέ κάθετη πρός αὐτό, $\vec{\upsilon}_{\perp}$,

$$\vec{F} = e(\vec{\upsilon}_{//}\times\vec{B} + \vec{\upsilon}_{\perp}\times\vec{B})$$

ἀλλά $\vec{\upsilon}_{//}\times\vec{B} = 0$, ἤτοι δέν ἐξασκεῖται δύναμη κατά διεύθυνση παράλληλη πρός τό $\vec{B}$ καί τό ἠλεκτρόνιο

ἐξακολουθεῖ νά κινεῖται κατά τή διεύθυνση αὐτή μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{//}$. Κατά τήν κάθετη διεύθυνση τό ἠλεκτρόνιο κινεῖται κυκλικά μέ ἐπιτάχυνση $\upsilon_{\perp}^2/r$ καί $r = m\upsilon_{\perp}/eB$. Ἄρα στή γενική περίπτωση τό ἠλεκτρόνιο θά περιγράψει μιά ἕλικα μέ ἄξονα τή διεύθυνση τοῦ $\vec{B}$. Ἡ ἕλικα θά εἶναι ἐπάνω σέ μιά κυλινδρική ἐπιφάνεια μέ ἀκτίνα r. Τό βῆμα τῆς ἕλικας θά εἶναι $2\pi r\upsilon_{//}/\upsilon_{\perp}$.

Πρίν κλείσομε τό κεφάλαιο τοῦτο εἶναι ἀξιοσημείωτο νά παρατηρηθῆ ὅτι ἡ ἠλεκτρική δύναμη ($q\vec{E}$) πού ἐξασκεῖται σ' ἕνα φορτίο δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ φορτίου καί ὅτι ἡ μαγνητική δύναμη ($q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$) ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ταχύτητα μέ ἁπλῆ σχέση ἀναλογίας.

ΤΟ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

Εἶναι πειραματικό δεδομένο ὅτι τό συνολικό φορτίο σ'ἕνα σύστημα δέν ἀλλάζει λόγω κινήσεως τῶν ἐπί μέρους φορτίων. Τό συνολικό φορτίο π.χ. τῶν ἀτόμων δέν ἀλλάζει, ἀσχέτως κινήσεως ἠλεκτρονίων καί πρωτονίων. Δέν μποροῦμε νά ποῦμε τό ἴδιο γιά τή μάζα τῶν σωμάτων. Ἡ μάζα m ἑνός σωματίου πού κινεῖται μέ ταχύτητα υ αὐξάνει καί ἰσοῦται μέ

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/C^2}}$$

ὅπου m_0 ἡ μάζα ἠρεμίας (υ=ο) καί C ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός. Ἐάν τό σωμάτιο ἔχει φορτίο ἠρεμίας q_0 τότε τό φορτίο q ὅταν τό σωμάτιο κινεῖται μέ ταχύτητα υ ἰσοῦται

$$q = q_0$$

Γενικεύομε τά παραπάνω μέ τό νά δοῦμε πῶς ἐφαρμόζεται ὁ νόμος Gauss γιά κινούμενα φορτία. Ἐάν ἔχομε ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς x,y,z στό ὁποῖο φορτία κινοῦνται μέ διάφορες ταχύτητες καί θεωρήσομε δεύτερο σύστημα ἀναφορᾶς x', y', z' πού κινεῖται ὡς πρός τό πρῶτο μέ ταχύτητα V. Ἀπό πάμπολλα πειράματα ἔχει ἑδραιωθῆ τό γεγονός ὅτι ὁ νόμος Gauss πού ἐκφράζεται $\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$ ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τόν ἀριθμό καί τό εἶδος τῶν σωματιδίων μέσα στό χῶρο πού περικλείεται ἀπό τήν S καί ὄχι ἀπό τό πῶς κινοῦνται. Ἔτσι, ἄν στό σύστημα xyz θεωρήσομε τήν ἐπιφάνεια S(t) καί στό x'y'z' τήν S'(t') πού περικλείει, σέ χρόνο t' πού μετρεῖται στό x'y'z', τό ἴδιο φορτίο πού περικλείει ἡ

S(t) σέ χρόνο t πού μετρεῖται στό xyz τότε

$$\int_{S(t)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S'(t')} \vec{E}'\cdot d\vec{S}' \qquad (56.1)$$

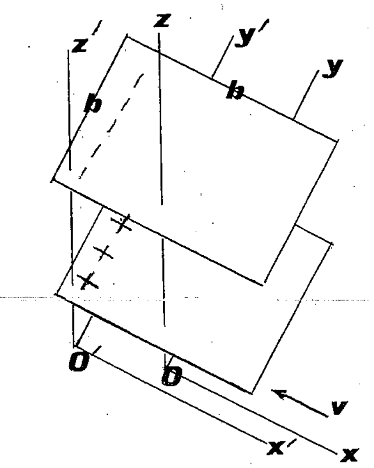
Η διάκριση μέ τούς χρόνους γίνεται γιατί ξαίρομε άπό τή θεωρία τῆς σχετικότητας ὅτι δέν μποροῦμε νά ταυτοχρονίσομε δύο συστήματα άναφορᾶς πού εὑρίσκονται σέ σχετική κίνηση μεταξύ τους. Ἡ (56.1) έκφράζει τή σχετικιστική άναλλοιότητα τοῦ φορτίου. Μποροῦμε νά διαλέξομε τήν έπιφάνεια Gauss σέ όποιοδήποτε σύστημα άναφορᾶς θέλομε. Τό έπιφανειακό όλοκλήρωμα θά δώσει τό φορτίο, ένα άριθμό πού εἶναι άνεξάρτητος άπό τό σύστημα άναφορᾶς. Αὐτό δέν εἶναι τό ἴδιο μέ τό νόμο διατηρήσεως τοῦ φορτίου πού έκφράζεται άπό τήν έξίσωση συνεχείας

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\,\partial\rho/\partial t$$

Ὁ νόμος διατηρήσεως έκφράζει ὅτι ἄν πάρομε μιά κλειστή έπιφάνεια σ'ἕνα σταθερό σύστημα άναφορᾶς καί ἡ κλειστή έπιφάνεια περιέχει κάποιο συνολικό φορτίο q, τό φορτίο q θά παραμένει σταθερό ἄν δέν ὑπάρχουν ἄλλα φορτία πού νά διασχίζουν τήν έπιφάνεια. Τό άναλλοίωτο τοῦ φορτίου δηλώνει ὅτι άπό όποιοδήποτε σύστημα άναφορᾶς καί ἄν μετρήσομε τό φορτίο, θά τό βροῦμε τό ἴδιο. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ένέργεια ένός συστήματος κλειστοῦ διατηρεῖται ένῶ ἡ ένέργεια δέν εἶναι άναλλοίωτη ποσότητα κατά τήν ἔννοια τῆς θεωρίας τῆς σχετικότητας. Λέμε ὅτι ἡ ένέργεια εἶναι ἡ τέταρτη συνιστῶσα ένός τετρανύσματος, ένῶ τό φορτίο εἶναι μιά ποσότητα βαθμωτή δηλαδή ἕνας άμετάβλητος άριθμός σέ σχέση μέ τό μετασχηματισμό Lorentz.

Μέτρηση Ἠλεκτρικῶν Πεδίων άπό δύο Διάφορα Συστήματα Ἀναφορᾶς. Ἐάν σέ κάποιο σύστημα άναφορᾶς τό ἠλεκτρικό πεδίο ἔχει τιμή $\vec{E}$, ποιά τιμή ἔχει σέ κάποιο ἄλλο σύστημα άναφορᾶς; Θά δώσομε τήν άπάντηση γιά μιά είδική κατηγορία πεδίων. Ἔστω δύο έπίπεδες κατανομές φορτίων παράλληλες μεταξύ τους μέ διαστάσεις ἡ κάθε μιά β × β. Στή μιά ἔχομε άρνητικό φορτίο καί στήν ἄλλη θετικό μέ πυκνότητα φορτίου +σ καί −σ. Ἡ άπόσταση μεταξύ τους εἶναι μικρή καί κατά προσέγγιση τό πεδίο εἶναι όμογενές μέ τιμή

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Τό ὁλικό φορτίο εἶναι φυσικά σβ² σέ κάθε έπιφάνεια. Ἄν τώρα ἔχομε ἕνα σύστημα x'y'z' (O') πού κινεῖται κατά τή διεύθυνση x ὡς πρός τό πρῶτο μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ καί εἶναι παράλληλη ὡς πρός τό πρῶτο, γιά παρατηρητή πού κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ὡς πρός τό σύστημα xyz (O) (εἶναι δηλαδή άκίνητος ὡς πρός τό O') ἡ μέν πλευρά πού εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα y διατηρεῖ τό μῆκος της β, ἡ δέ πλευρά πού εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα x φαίνεται μικρότερη, άπό β γίνεται $\beta\sqrt{1-\upsilon^2/C^2}$ ὅπου C ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός. Ἡ έπιφάνεια λοιπόν τοῦ κάθε φορτίου γίνεται ἴση μέ

$$S' = \beta^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{C^2}}$$

Λόγω τοῦ ὅτι τό φορτίο εἶναι άναλλοίωτη ποσότητα τοῦτο παραμένει σταθερό, ἤτοι

$$q' = q$$

Η έπιφανειακή πυκνότητα γίνεται

$$\sigma' = \frac{q'}{S'} = \frac{q}{\beta^2\sqrt{1-\upsilon^2/C^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\upsilon^2/C^2}}$$

ἄρα φαίνεται μεγαλύτερη κατά τόν συντελεστή $1/\sqrt{1-\upsilon^2/C^2}$.

Ἄν τώρα έφαρμόσομε τό νόμο Gauss στό σύστημα O' βρίσκομε

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\sqrt{1-\upsilon^2/C^2}} = \frac{E}{\sqrt{1-\upsilon^2/C^2}} = \gamma E$$

ὅπου $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/C^2}}$$

Τό πεδίο φαίνεται μεγαλύτερο.

Ἄν θεωρήσομε ὅτι ἕνα τρίτο σύστημα άξόνων x''y''z'' (O'') κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{V}$ κατά τόν ἄξονα τῶν z καί οἱ δύο πλευρές τῆς τετραγώνου κατανομῆς φορτίων εἶναι κάθετες στήν ταχύτητα $\vec{V}$ κι᾽ἔτσι φαίνονται νά ἔχουν τό ἴδιο μῆκος καί γιά παρατηρητή πού βρίσκεται στό O'. Δηλ.

$$S'' = \beta^2 \quad \text{καί} \quad \sigma'' = \sigma$$

καί

$$E'' = E$$

Καταλήγομε λοιπόν στό συμπέρασμα ὅτι, ὅταν ἕνα σύστημα ἀξόνων Σ' κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ὡς πρός τό σύστημα ἀξόνων Σ καί ἔχει τυχοῦσα κατεύθυνση καί ἐάν $\vec{E}$ εἶναι τό ἠλεκτρικό πεδίο στό Σ, τότε ἡ συνιστῶσα $E_{//}$ πού εἶναι παράλληλη πρός τό $\vec{\upsilon}$ παραμένει ἡ ἴδια, ἡ δέ $E_{\perp}$ πού εἶναι κάθετη πρός τό $\vec{\upsilon}$ φαίνεται μεγαλύτερη, δηλ.

$$E'_{//} = E_{//} \tag{58.1}$$

$$E'_{\perp} = \frac{E}{\sqrt{1-\upsilon^2/C^2}} = \gamma E_{\perp} \tag{58.2}$$

Ἐπειδή

$$E^2_{//} + E^2_{\perp} = E^2$$

καί

$$E'^2_{//} + E'^2_{\perp} = E'^2$$

$$E'^2 = E^2_{//} + \gamma^2 E^2_{\perp} = E^2_{//} + E^2_{\perp} + (\gamma^2-1)E^2_{\perp}$$

ἤ

$$E'^2 = E^2 + (\gamma^2-1)E^2_{\perp} \tag{58.3}$$

Τά παραπάνω συμπεράσματα ἰσχύουν μόνο ὅταν τά φορτία στό σύστημα Σ πού παράγουν τό ἠλεκτρικό πεδίο εἶναι στάσιμα. Στήν περίπτωση πού τά φορτία στό Σ κινοῦνται τότε ἡ παραπάνω ἀνάλυση πρέπει νά τροποποιηθῆ γιά νά περιλάβει στίς σχέσεις πού θά ἐξαχθοῦν καί τά μαγνητικά πεδία πού προκαλοῦνται ἀπό τήν κίνηση τῶν φορτίων.

Οἱ ἀντίστοιχες σχέσεις γιά τά μαγνητικά πεδία πού προκαλοῦνται ὅταν τά φορτία στό O δέν εἶναι στάσιμα ἀλλά κινοῦνται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ κατά τήν διεύθυνση x καί εὑρίσκονται στό ἐπίπεδο xz, ἐξάγονται ὡς ἑξῆς. Τό ἠλεκτρικό πεδίο δίδεται ἀπό τή σχέση

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$, διότι δέν ἐπηρεάζεται ἀπό τήν κίνηση τῶν

φορτίων. Ἡ κίνηση τῶν φορτίων παράγει ἕνα ρεῦμα τό ὁποῖο προκαλεῖ μαγνητικό πεδίο πού ὑπολογίζεται κατά τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Ἔστω ἐπιφανειακή κατανομή πυκνότητας σ στό ἐπίπεδο xz πού κινεῖται μέ ταχύτητα υ_0. Λόγω αὐτῆς τῆς κινήσεως ἕνα στοιχεῖο φορτίου

$$dq = dx\,dz\,\sigma$$

πού εὑρίσκεται σέ ἀπόσταση z ἀπό τό O δημιουργεῖ σέ ἀπόσταση y ἀπό τό O ἕνα μαγνητικό πεδίο $d\vec{B}$

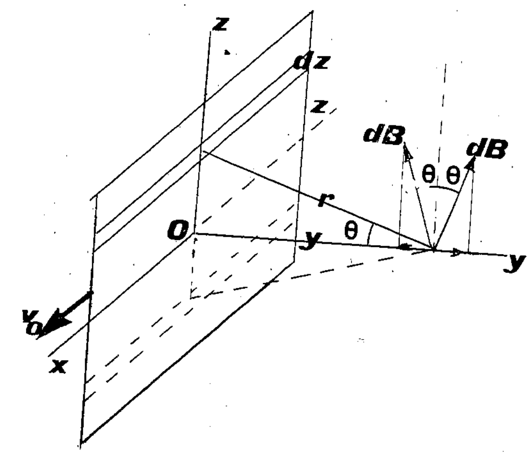
$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{r}\frac{dq}{dt}$$

ἤ

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\sigma}{r}\,dz\,\frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi}\sigma\upsilon_0\frac{dz}{r}$$

ἤ

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\sigma\upsilon_0\frac{dz}{r}\,\hat{a}_x \times \hat{a}_r$$



Ἕνα παρόμοιο στοιχεῖο ρεύματος σέ ἀπόσταση −z θά δημιουργεῖ ἕνα ἄλλο πεδίο $d\vec{B}$. Οἱ συνιστῶσες αὐτῶν τῶν πεδίων κατά τόν ἄξονα y ἀναιροῦνται. Οἱ συνιστῶσες κατά τόν ἄξονα z προστίθενται καί ἔτσι

$$dB_z = \frac{\mu_0\sigma\upsilon_0}{\pi}\frac{dz}{r}\cos\theta$$

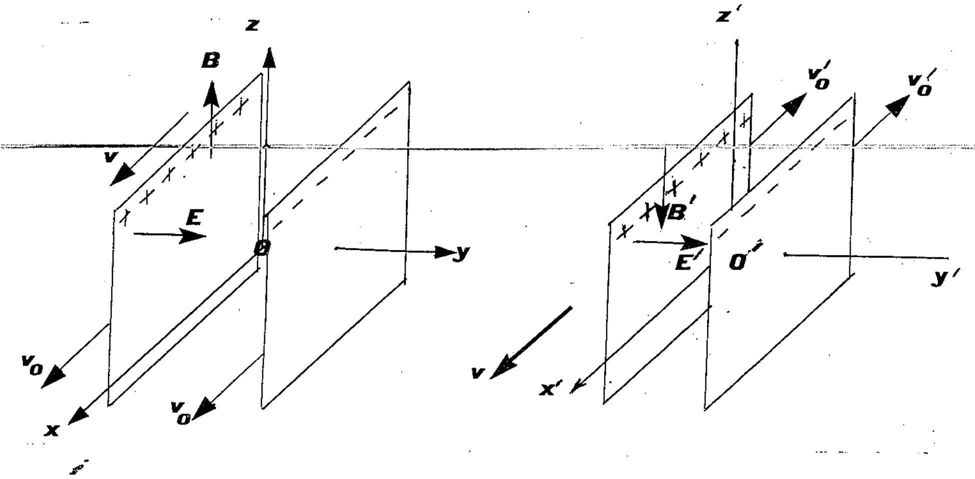
ἀλλά $z = y\tan\theta$ καί $r = y/\cos\theta$

$$dz = (y/\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$\frac{dz}{r} = \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

καί $$B_z = \frac{\mu_0\sigma\upsilon_0}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\mu_0\sigma\upsilon_0}{2} \qquad (60.1)$$

'Από τήν ἄλλη πλευρά τῆς ἐπιπέδου κατανομῆς θά ὑπάρχει ἕνα ἀντίθετο $B_z = -\mu_0\sigma\upsilon_0/2$



'Από τήν (60.1) βλέπομε ὅτι τό πεδίο ἀνάμεσα στίς δύο ἐπίπεδες κατανομές πού κινοῦνται μέ ταχύτητα υ_0 ἰσοῦται μέ

$$B = \mu_0\sigma\upsilon_0$$

Ἔστω ὅτι τό σύστημα O' κινεῖται ὡς πρός τό O μέ ταχύτητα υ κατά τή θετική διεύθυνση τῶν x. Τί πεδία βλέπει παρατηρητής ἀκίνητος στό O'; Στό O' οἱ ἐπίπεδες κατανομές φορτίων φαίνονται νά κινοῦνται κατά τόν ἄξονα x' μέ ταχύτητα υ_0' πού ἰσοῦται μέ

$$\upsilon_0' = \frac{\upsilon_0 - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon_0\upsilon}{C^2}} = C\,\frac{\beta_0-\beta}{1-\beta_0\beta} \qquad (60.2)$$

Ὁ τελευταῖος τύπος εἶναι σύμφωνος μέ τόν τύπο προσθέσεως ταχυτήτων κατά τήν εἰδική θεωρία τῆς σχετικότητας.

$$\beta_0 = \frac{\upsilon_0}{C} \quad \text{καί} \quad \beta = \frac{\upsilon}{C}$$

Σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε στίς σελίδες 56 καί 57 ἡ ἐπιφανειακή

πυκνότητα τῶν φορτίων στό O εἶναι ἴση μέ

$$\sigma\left(1 - \frac{\upsilon_0^2}{C^2}\right)^{1/2} = \frac{\sigma}{\gamma_0} \qquad (61.1)$$

(λόγω τῆς κινήσεώς τους στό O)

καί στό O'

$$\sigma' = \sigma\,\frac{\gamma_0'}{\gamma_0}$$

ὅπου $$\gamma_0' = \frac{1}{1 - \frac{\upsilon_0'^2}{C^2}}$$

ἀπό τήν (60.2)

$$\gamma_0' = \frac{1}{1 - \frac{(\beta_0-\beta)^2}{(1-\beta_0\beta)^2}} = \frac{1-\beta_0\beta}{\sqrt{(1-\beta_0^2)(1-\beta^2)}} = \gamma_0\gamma(1-\beta_0\beta)$$

καί τέλος

$$\sigma' = \sigma\gamma(1 - \beta_0\beta) \qquad (61.2)$$

Τά πεδία γράφονται

$$E_y' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\gamma(1-\beta_0\beta) = \gamma\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma\upsilon_0}{\varepsilon_0 C}\frac{\upsilon}{C}\right)$$

$$E_y' = \gamma\left[\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\mu_0\sigma\upsilon_0}{\mu_0\varepsilon_0 C^2}\right)(\upsilon)\right] = \gamma\left[\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - (\mu_0\sigma\upsilon_0)(\upsilon)\right] \qquad (61.3)$$

(διότι $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{C^2}$, βλ. (50.2))

καί $$B_z' = \mu_0\sigma'\upsilon_0' = \mu_0\sigma\gamma(1-\beta_0\beta)\,C\,\frac{\beta_0-\beta}{1-\beta_0\beta}$$

$$B_z' = \gamma(\mu_0\sigma\upsilon_0 - \mu_0\sigma\upsilon) \qquad (61.4)$$

Οἱ (61.3) καί (61.4) γράφονται

$$E_y' = \gamma(E_y - \upsilon B_z) \qquad (61.5)$$

$$B_z' = \gamma\left(B_z - \frac{V}{C^2}E_y\right) \qquad (61.6)$$

Στή γενική περίπτωση ὅπου τά πεδία ἔχουν τυχαῖο προσανατολισμό ἀλλά τά δύο συστήματα ἀναφορᾶς εἶναι παράλληλα μεταξύ τους καί τό O' κινεῖται ὡς πρός τό O κατά τή διεύθυνση x οἱ γενικοί μετασχηματισμοί εἶναι

$$E_x' = E_x,\quad E_y' = \gamma(E_y - \upsilon B_z),\quad E_z' = \gamma(E_z + \upsilon B_y) \qquad (61.7)$$

$$B_x' = B_x,\quad B_y' = \gamma\left(B_y + \frac{V}{C^2}E_z\right)\quad B_z' = \gamma\left(B_z - \frac{V}{C^2}E_y\right) \qquad (61.8)$$

'Εάν στό O τό $\vec{B}$ εἶναι μηδέν τότε

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma E_y, \quad E'_z = \gamma E_z \qquad (62.1)$$

δηλαδή βρίσκομε πάλι τίς σχέσεις (58.1) καί (58.2), καί

$$\left.\begin{array}{ll} & B'_x = 0, \quad B'_y = \gamma \frac{v}{c^2} E'_z \quad B'_z = -\gamma \frac{v}{c^2} E'_y \\ \text{ἤ} & B'_x = 0, \quad B'_y = \frac{v}{c^2} E'_z \quad B'_z = -\frac{v}{c^2} E'_y \end{array}\right\} \qquad (62.2)$$

δηλαδή ἀκόμη καί ἄν στό O δέν ὑπάρχει μαγνητικό πεδίο στό O "βλέπομε" ἕνα μαγνητικό πεδίο πού γράφεται ἀνυσματικά

$$\vec{B}' = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}' \qquad (\text{ἐάν } \vec{B} = 0 \text{ παντοῦ στό O})$$

ὅπου $\vec{\upsilon}'$ ἡ ταχύτητα πού παρατηρεῖται ἀπό τό O' τοῦ συστήματος O στό ὁποῖο τό $\vec{B}$ εἶναι παντοῦ μηδέν.

Μέ ὅμοιο τρόπο

$$\vec{E}' = -\vec{\upsilon} \times B' \qquad (\text{ἐάν } \vec{E} = 0 \text{ παντοῦ στό O})$$

Νόμος Gauss γιά Μαγνητικό πεδίο

'Η μαγνητική ροή μέσα ἀπό μιά κλειστή ἐπιφάνεια εἶναι μηδέν.

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι δέν ὑπάρχουν ἐλεύθερα μαγνητικά φορτία (μεμονωμένοι πόλοι). 'Υπάρχουν μαγνητικά δίπολα.

Μεταβαλλόμενα Πεδία μέ τό χρόνο

Νόμος Faraday - 'Ηλεκτρομαγνητική ἐπαγωγή

'Εάν σ' ἕνα κύκλωμα ἡ μαγνητική ροή πού διαρρέει αὐτό μεταβάλλεται μέ τό χρόνο, στά ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐμφανίζεται μία ΗΕΔ $\mathcal{E}$.

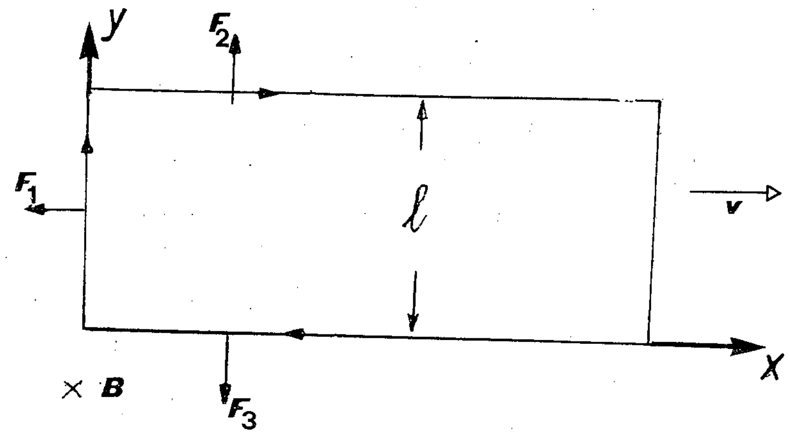
$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} \qquad (\text{Νόμος Faraday 'Επαγωγῆς})$$

'Εάν ἕνα κύκλωμα διαρρέεται ἀπό ρεῦμα, γύρω ἀπό αὐτό ἐμφανίζεται μαγνητικό πεδίο. "Οταν τό ρεῦμα μεταβάλλεται, μεταβάλλεται καί τό μαγνητικό πεδίο, ἄρα καί ἡ μαγνητική ροή εἴτε στό χῶρο πού κατέχει τό κύκλωμα (αὐτεπαγωγή) εἴτε σέ ἄλλο κύκλωμα πού βρίσκεται κοντά στό πρῶτο (ἀμοιβαία ἐπαγωγή).

Ν ό μ ο ς L e n z. Παρ' ὅλο πού ἡ διεύθυνση τῆς ΗΕΔ μπορεῖ νά βρεθῆ ἀπό τό Νόμο τοῦ Faraday συνήθως αὐτή βρίσκεται ἀπό τήν ἐφαρμογή τῆς ἀρχῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας πού ἐκφράζεται μέ τό Νόμο τοῦ Lenz. Τό ἐπαγώμενο ρεῦμα ἐμφανίζεται κατά διεύθυνση τέτοια πού νά ἀντιτίθεται στήν μεταβολή πού τό προκαλεῖ.

Ποσοτική 'Ερμηνεία τοῦ Νόμου τῆς 'Επαγωγῆς

"Ας θεωρήσωμε ὅτι ἕνας ἀγωγός σχηματίζει ἕνα ὀρθογώνιο πλαίσιο, τό ἕνα ἄκρο τοῦ ὁποίου βρίσκεται σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Σύρομε τό πλαίσιο μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Γιά παρατηρητή



πού κινεῖται μέ τό πλαίσιο ἀναπτύσσεται ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \upsilon B_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + \upsilon B_y)$$

'Εάν υ κατά τή διεύθυνση x καί

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = -|\vec{B}| = -B$$

$$E_x = E_y = E_z = 0$$

$$E'_x = 0, \quad E'_y = -\gamma\upsilon B_z = \gamma\upsilon B \approx \upsilon B \quad \text{ὅταν } \upsilon \ll c$$

$$E'_z = 0$$

Κατά τή διεύθυνση E'_y θ' ἀναπτυχθῆ ἕνα ρεῦμα μέ πυκνότητα

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}' = \frac{\vec{E}}{\rho}$$

καί

$$I = jS = \frac{S}{\rho}E' = (\frac{S}{\ell\rho})(E'\ell) = \frac{\upsilon B\ell}{R}$$

ὅπου R ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ.
Στήν κίνηση τοῦ πλαισίου θ'ἀντιταχθῆ μιά δύναμη

$$\vec F_1 = I\,\vec\ell\times\vec B = -\frac{B^2\ell^2\upsilon}{R}\,\hat a_x$$

Θ'ἀναπτυχθοῦν ἐπίσης οἱ δυνάμεις F_2 καί F_3 ὅπου

$$|\vec F_2| = |\vec F_3| = I|\vec x\times\vec B| = \frac{\upsilon B^2\ell}{R}x$$

καί $\vec F_2 = -\vec F_3$

ἄρα τό ἀποτέλεσμα τῶν $\vec F_2$ καί $\vec F_3$ ἀναιρεῖται.

Ἡ $\vec F_1$ ἐμποδίζει τήν κίνηση τοῦ πλαισίου, τό ὁποῖο γιά νά κινηθῆ χρειάζεται νά καταναλωθῆ ἐνέργεια μέ ρυθμό

$$\frac{dU}{dt} = P = F_1\upsilon = \frac{B^2\ell^2\upsilon^2}{R}$$

Η ἐνέργεια αὐτή καταναλίσκεται σά θερμότητα Joule

$$P_{(Joule)} = I^2R = (\frac{\upsilon B\ell}{R})^2R = \frac{B^2\ell^2\upsilon^2}{R} = P$$

Τό ἴδιο ἀποτέλεσμα ἐξάγεται ἄν θεωρήσωμε τήν ἀλλαγή τῆς μαγνητικῆς ροῆς πού περνᾶ ἀπό τό πλαίσιο. Ἄν τό πλαίσιο κινηθῆ κατά x ἡ μαγνητική ροή πού θά περάση ἀπό τήν ἐπιφάνεια ℓx, εἶναι

$$\Phi_B = B\ell x$$

Ἀπό τό Νόμο Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\ell\frac{dx}{dt} = B\ell\upsilon$$

ὅπου γιά νά διατηρήσωμε τήν ἀποδεκτή φορά ρεύματος βάλαμε $\upsilon = -dx/dt$ καί ὄχι $\upsilon = dx/dt$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B\ell\upsilon}{R} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Μαγνητικά Πεδία πού Μεταβάλλονται μέ τό Χρόνο

Μιά ἄλλη περίπτωση πού ἐξετάζομε εἶναι ὅταν ἡ ροή μέσα ἀπό μιά ἐπιφάνεια ἀλλάζει ὄχι γιατί κινεῖται ἕνα πλαίσιο π.χ. μέσα σέ ἕνα μαγνητικό πεδίο ἀλλά γιατί ἡ ἔνταση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μεταβάλλεται μέ τό χρόνο.

Σ'αὐτή τήν περίπτωση

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\oint\vec B\cdot d\vec S$$

Ἀλλά $\quad \mathcal{E} = \oint\vec E\cdot d\vec\ell$

ἄρα $\quad \oint\vec E\cdot d\vec\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\oint\vec B\cdot d\vec S$

ἤ $\quad \oint(\vec\nabla\times\vec E)\cdot d\vec S = -\oint\frac{\partial\vec B}{\partial t}\cdot d\vec S$

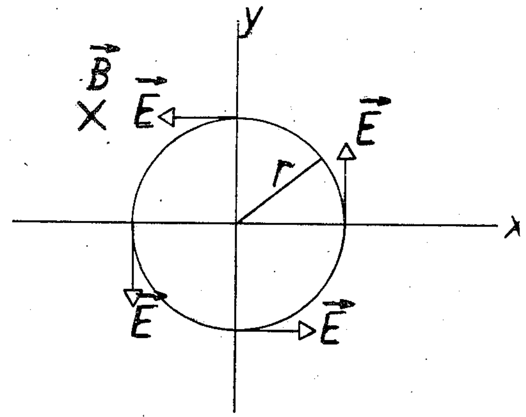
Ἐπειδή τά τελευταῖα αὐτά ὁλοκληρώματα ἰσχύουν γιά ὁποιαδήποτε $d\vec S$ μποροῦμε νά συνάγωμε τό συμπέρασμα ὅτι οἱ ποσότητες μέσα στά ὁλοκληρώματα εἶναι ἴσες

$$\vec\nabla\times\vec E = -\frac{\partial\vec B}{\partial t} \qquad (65.1)$$

Παράδειγμα

$$B_x = B_y = 0,\quad B_z = -|\vec B|$$

Τό $\vec B$ εἶναι κατά τόν ἄξονα z ἀλλά ἡ τιμή του μεταβάλλεται μέ τό χρόνο. Ἔστω ὅτι τό B αὐξάνει.



$$\Phi_B = BS = B\pi r^2$$

$$\mathcal{E} = \oint\vec E\cdot d\vec\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$(E)(2\pi r) = -(\pi r^2)\frac{dB}{dt}$$

$$E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

Χρησιμοποιήσαμε τό γεγονός ὅτι λόγω συμμετρίας τό $\vec E$ ἔχει σταθερό μέτρο καί εἶναι ἐφαπτόμενο στό κυκλικό πλαίσιο. Ποσοτικά μποροῦμε νά τό δοῦμε ἀπό τήν (65.1).

$$\vec\nabla\times\vec E = -\frac{\partial\vec B}{\partial t} = \vec k\,,\quad \vec k = k\,\hat a_z$$

$$(\vec\nabla\times\vec E)_x = 0,\quad (\vec\nabla\times\vec E)_y = 0,\quad (\vec\nabla\times\vec E)_z = k$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = k$$

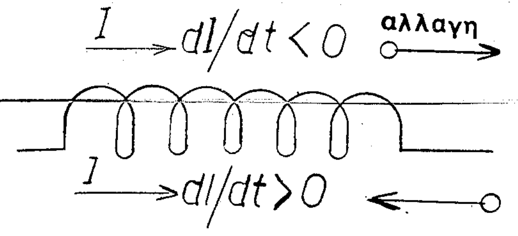
Ἐάν $E_z = 0$, $E_x = \frac{1}{2}ky$, $E_y = -\frac{1}{2}kx$

οἱ παραπάνω σχέσεις ἱκανοποιοῦνται. Ἀπό τό θεώρημα μοναδικότητος αὐτή εἶναι καί ἡ μοναδική λύση τοῦ προβλήματος. Τό $\vec E$ ἔχει μόνο x καί y συνιστῶσες καί μέτρο

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 = \frac{1}{4}k^2(x^2+y^2) = \frac{1}{4}k^2r^2\,,\quad E = \frac{1}{2}kr \;\text{σταθερό}$$

`Η φορά τοῦ E ἐξάγεται καί ἀπό τόν Νόμο τοῦ Lenz. Τό ἐπαγώμενο ρεῦμα στό πλαίσιο τείνει ν'ἀντισταθῆ στήν ἀλλαγή τῆς (αὐξανόμενης) ροῆς μέ τό μαγνητικό πεδίο πού τό ρεῦμα αὐτό παράγει.

ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ



Ἕνα σωληνοειδές (καί κατ' ἐπέκταση πηνίο) εἶναι ἐξάρτημα πού ἀποτελεῖται ἀπό σπεῖρες κυκλικῆς διατομῆς καί πού (συνήθως) ἔχει μῆκος πολύ μεγαλύτερο ἀπό τήν ἀκτίνα τῶν σπειρῶν.

θεωροῦμε ὅτι σ'ἕνα πηνίο διέρχεται ρεῦμα I ἀπό ἀριστερά πρός τά δεξιά. Λόγω τοῦ ρεύματος, στό χῶρο τοῦ πηνίου ὑπάρχει μαγνητικό πεδίο καί κάθε σπεῖρα τοῦ πηνίου διαρρέεται ἀπό μαγνητική ροή Φ_B. Γιά πηνίο μέ N σπεῖρες

$$N\Phi_B = L\,I \qquad (66.1)$$

ὅπου L ἡ αὐτεπαγωγή τοῦ πηνίου - σταθερά. Ἐάν τό ρεῦμα μεταβάλλεται μέ τό χρόνο, στά ἄκρα τοῦ πηνίου θ'ἀναπτυχθῆ μιά ΗΕΔ

$$\mathcal{E} = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad (66.2)$$

ἤ

$$L = -\frac{\mathcal{E}}{dI/dt} \qquad (66.3)$$

`Η αὐτεπαγωγή εἶναι θετική ποσότητα. `Η ΗΕΔ γιά ρεῦμα I πού αὐξάνει τείνει νά παράγη ρεῦμα ἀντιθέτου φορᾶς (γιά νά κρατήση τό συνολικό ρεῦμα σταθερό), γιά δέ I πού ἐλαττώνεται τείνει νά παράγη ρεῦμα τῆς ἴδιας φορᾶς.

`Η (66.3) εἶναι ἡ σχέση πού ὁρίζει τό L καί εἶναι ἀντίστοιχη πρός τήν

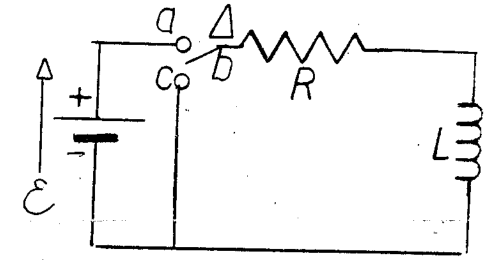
$$C = \frac{q}{V}$$

Τό L μετρεῖται σέ henries $\left(1\,\text{henry} = \frac{1\,\text{Volt. sec}}{\text{Amp}}\right)$.

Κύκλωμα LR

Ὅταν βάλωμε τό διακόπτη Δ στό a τό κύκλωμα θά ἀρχίση νά διαρρέεται ἀπό ρεῦμα I πού ἀπό μηδέν σέ χρόνο t = 0 ἀρχίζει ν' αὐξάνει. Στά ἄκρα τῆς L θά ἀναπτυχθῆ μιά ΗΕΔ

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt}$$



Νόμος Kirchhoff:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L - IR = \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt} - IR = 0$$

$$L\frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E}$$

`Η λύση τῆς ἐξισώσεως

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t\left(\frac{R}{L}\right)}\right)$$

μᾶς θυμίζει τή λύση γιά τήν ἀντίστοιχη περίπτωση μέ πυκνωτή. Τό

$$\frac{L}{R} = \tau_L$$

εἶναι ἡ ἐπαγωγική σταθερά χρόνου.

`Η ΗΕΔ στά ἄκρα τῆς αὐτεπαγωγῆς

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E}e^{-t\left(\frac{R}{L}\right)}$$

Ἐνέργεια τοῦ Μαγνητικοῦ Πεδίου

Εἴδαμε γιά τό ἠλεκτρικό πεδίο, ὅτι στό κενό, ἡ ἐνέργεια ἀνά μονάδα ὄγκου δίδεται ἀπό

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Σ'ἕνα πηνίο ἀποθηκεύεται ἐνέργεια μέ ρυθμό

$$\mathcal{E}I = \underbrace{I^2R}_{=\text{Θερμότητα Joule}} + \underbrace{LI\frac{dI}{dt}}_{\text{Ρυθμός μέ τόν ὁποῖον ἡ ἐνέργεια ἀποθηκεύεται στό μαγνητικό πεδίο}}$$

ἄρα $$\frac{dU_B}{dt} = LI\,\frac{dI}{dt}$$

ἤ $$dU_B = LIdI$$

καί $$U_B = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}\,LI^2$$

Γιά πυκνωτή εἴχαμε

$$U_E = \frac{1}{2}\,\frac{1}{C}\,q^2$$

Ἐάν S ἡ διατομή καί ℓ τό μῆκος τοῦ πηνίου

$$(N)(\Phi_B) = (n\ell)(BS)$$

ὅπου n ὁ ἀριθμός τῶν σπειρῶν ἀνά μονάδα μήκους. Τό μαγνητικό πεδίο γιά τό ἐσωτερικό τοῦ πηνίου εἶναι

$$B = \mu_0 nI$$

καί $$N\Phi_B = \mu_0 n^2 I\ell S$$

καί $$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \mu_0 n^2 \ell S$$

Ἡ πυκνότητα τῆς ἐνεργείας στό σωληνοειδές εἶναι

$$u_B = \frac{U_B}{\ell S} = \frac{\frac{1}{2}\,LI^2}{\ell S} = \frac{\frac{1}{2}\,\mu_0 n^2 \ell S I^2}{\ell S} = \frac{1}{2}\,\mu_0 n^2 I^2$$

ἤ $$u_B = \frac{1}{2\mu_0}\,(\mu_0^2 n^2 I^2) = \frac{1}{2\mu_0}\,B^2$$

Ἡ σχέση αὐτή, ὅπως καί γιά τήν περίπτωση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι πολύ πιό γενική ἀπ'ὅ,τι φαίνεται ἀπό τόν τρόπο ἐξαγωγῆς της.

ΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

Εἴδαμε ὅτι πηγή τοῦ $\vec{E}$ εἶναι τό φορτίο q. Δύο φορτία −q καί +q σχηματίζουν ἕνα ἠλεκτρικό δίπολο μέ διπολική ροπή $\vec{p}$. Ἐπειδή δέν ὑπάρχουν "μονόπολα" μαγνητικά, πηγές τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι τά μαγνητικά δίπολα μέ μαγνητική διπολική ροπή $\vec{\mu}$. Μιά κλειστή σπεῖρα ρεύματος, ἕνα πηνίο, ἤ ἕνας "μόνιμος" μαγνήτης εἶναι παραδείγματα μαγνητικῶν διπόλων. Ἡ μαγνητική τους διπολική ροπή μπορεῖ νά μετρηθῆ ἀπό τή μέτρηση τῆς ροπῆς στρέψεως πού προκαλεῖται ὅταν τό δίπολο τοποθετηθῆ σέ πεδίο $\vec{B}$.

$$\vec{T} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

ἤ μποροῦμε νά μετρήσωμε τήν ἔνταση τοῦ πεδίου B πού ὀφείλεται

στό δίπολο σέ ἀπόσταση r στόν ἄξονα τοῦ διπόλου. Τό μ ὑπολογίζεται ἀπό τή σχέση

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{\mu}{r^3}$$

Ἡ κίνηση τῶν ἠλεκτρονίων γύρω ἀπό τά ἄτομα σχηματίζει ἕνα κλειστό ρεῦμα καί ὡς ἐκ τούτου ἐμφανίζει ἕνα μαγνητικό δίπολο. Τό σπίν ἐπίσης τοῦ ἠλεκτρονίου προκαλεῖ μιά μαγνητική διπολική ροπή. Θά περίμενε λοιπόν κανείς ὅτι ἡ ὕλη θά παρουσίαζε στό σύνολό της μαγνητικές ἰδιότητες, κυρίως δέ θά παρουσίαζε τήν ἐμφάνιση μαγνητικῆς ροπῆς. Εἶναι γνωστό ὅμως ὅτι, ἐκτός ἀπό τά σιδηρομαγνητικά ὑλικά, ἡ ὕλη στό σύνολό της δέν παρουσιάζει μόνιμη μαγνητική ροπή. Τοῦτο ὀφείλεται στό ὅτι εἴτε ἡ μαγνητική ροπή πού ὀφείλεται στό σπίν ἤ στήν τροχιακή στροφορμή τῶν ἠλεκτρονίων ἀναιρεῖται εἴτε λόγω συμμετρίας στό ἄτομο ἤ μόριο (π.χ. εὐγενῆ ἀέρια) εἴτε λόγω τῆς τυχαίας κινήσεως τῶν ἀτόμων καί μορίων. Ἡ παρουσία ὅμως ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου παραμορφώνει τήν κίνηση τῶν ἠλεκτρονίων μέ ἀποτέλεσμα νά παρουσιασθῆ μιά μή μηδενική συνισταμένη μαγνητική πόλωση ἤ μ α γ ν ή τ ι σ η στήν ὕλη.

Π α ρ α μ α γ ν η τ ι σ μ ό ς. Ὑλικά στά ὁποῖα ὑπάρχει τέλεια ἐξουδετέρωση τῶν μαγνητικῶν διπόλων εἶναι μή μαγνητικά. Ὑλικά στά ὁποῖα δέν ὑπάρχει ἐξουδετέρωση εἶναι παραμαγνητικά. Τό ἄτομο ἤ μόριο ἐμφανίζει μιά μόνιμη μαγνητική διπολική ροπή $\vec{\mu}$ Παραδείγματα εἶναι Mn^{++}, Gd^{+++}, U^{++++}. Ἐάν ἕνα τέτοιο ὑλικό τοποθετηθῆ σ'ἕνα μαγνητικό πεδίο τά μαγνητικά δίπολα θά προσανατολισθοῦν μερικῶς πρός τό πεδίο. Ὁ προσανατολισμός δέν εἶναι τέλειος λόγω τῆς θερμικῆς κινήσεως τῶν ἀτόμων καί μορίων. Ἐάν ἔχομε N ἄτομα ἡ μέγιστη διπολική ροπή (πλήρης προσανατολισμός) εἶναι $N\vec{\mu}$.

Ἐάν ἕνα παραμαγνητικό ὑλικό μέ μαγνητική ροπή $\vec{m}$ ($\ll N\vec{\mu}$ λόγω θερμικῆς κινήσεως) τοποθετηθῆ κοντά σέ ἕνα ἀνομοιογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ θά ὑποστῆ ἕλξη πρός τό μέρος πού τό πεδίο εἶναι ἰσχυρότερο. Ἡ ροπή στρέψεως εἶναι

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \qquad (69.1)$$

καί ἡ ἐνέργεια (μηχανική)

$$U_{\mu\eta\chi} = -\vec{m}\cdot\vec{B} \qquad (69.2)$$

ἀλλά $\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B})$ (70.1)

Ἰσοδύναμες μορφές προκύπτουν ἀπό τίς παρακάτω ἀνυσματικές σχέσεις (ταυτότητες)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{m}) = (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{m} = (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} \qquad (70.2)$$

διότι $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (μή ὕπαρξη μαγνητικῶν μονοπόλων)

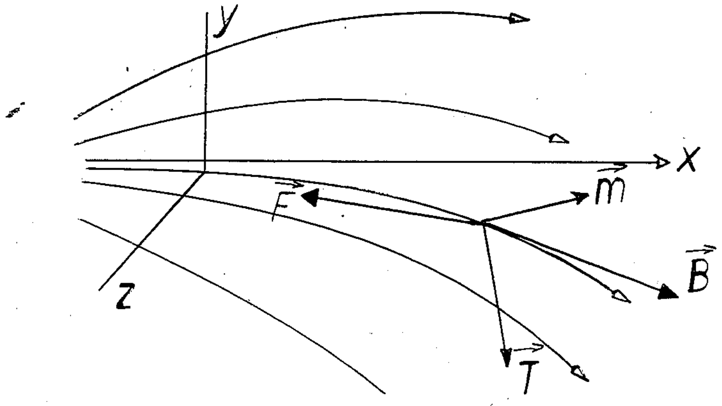
$$\vec{m}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0 = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}) - (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} \qquad (70.3)$$

διότι $\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$ (θεωροῦμε ὅτι δέν ὑπάρχουν ρεύματα στήν περιοχή τοῦ $\vec{B}$)

Ἀπό τίς (70.1), (70.2) καί (70.3) καταλήγομε

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{m}) = (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}) \qquad (70.4)$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση βλέπομε ὅτι ἡ $\vec{F}$ εἶναι κατά τή διεύθυνση τῆς μέγιστης μεταβολῆς τοῦ $\vec{B}$.

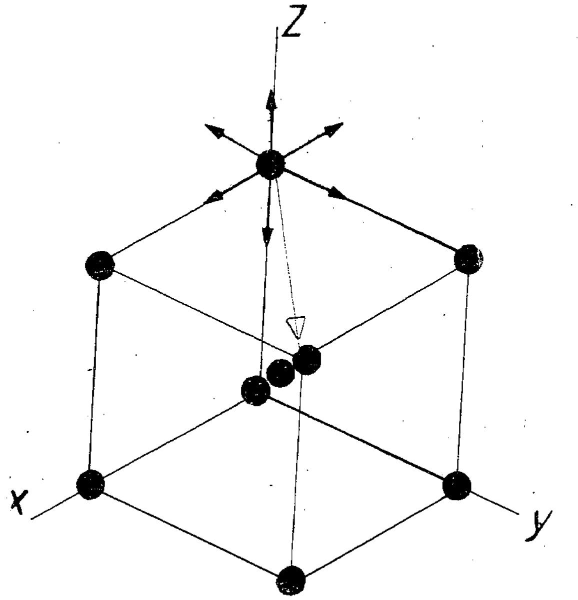


Τά ἠλεκτρόνια ἔχουν σπίν, τό ὁποῖο ὅπως εἴπαμε προκαλεῖ ἕνα μαγνητικό πεδίο πού εἶναι τό ἴδιο μέ μαγνητικό πεδίο πού ὀφείλεται σέ δίπολο. Τά ἠλεκτρόνια στίς διάφορες τροχιές ἐμφανίζονται συνήθως ἀνά ζεύγη μέ ἀντίθετα σπίν. Ἔτσι τό ἀποτέλεσμα τοῦ σπίν ἀναιρεῖται. Στά ἄτομα ὅμως πού στόν ἐξωτερικό τους φλοιό ὑπάρχει περιττός ἀριθμός ἠλεκτρονίων τό ἄτομο παρουσιάζει μιά συνισταμένη μαγνητική διπολική ροπή. Λόγω θερμικῆς κινήσεως οἱ διπολικές ροπές εἶναι προσανατολισμένες κατά τυχαία διεύθυνση καί τό ὑλικό δέν παρουσιάζει μαγνήτιση. Ὅταν τό ἴδιο ὑλικό τοποθετηθῆ σέ μαγνητικό πεδίο γίνεται μερικός προσανατολισμός πρός τό πεδίο καί τό ὑλικό, κατά τ'ἀνώ-

τέρω, ἕλκεται πρός τή διεύθυνση τοῦ ἰσχυροτέρου πεδίου.

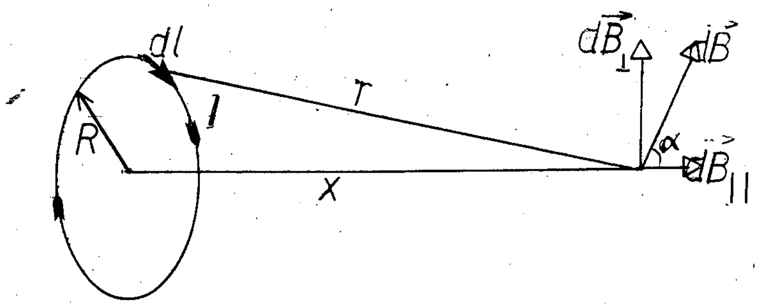
Σιδηρομαγνητισμός. Σέ μερικά ὑλικά ὅπως ὁ σίδηρος π.χ. παρουσιάζεται τό φαινόμενο ὅτι κάτω ἀπό μιά συγκεκριμένη γιά κάθε ὑλικό θερμοκρασία, τά σπίν τῶν μή ζευγαρωμένων ἠλεκτρονίων τῶν γειτονικῶν ἀτόμων νά εἶναι παράλληλα, νά μή προσανατολίζονται δηλαδή κατά τυχαία διεύθυνση, κι'ἔτσι παρουσιάζεται μέσα σέ μαγνητικό πεδίο μιά πολύ μεγαλύτερη δύναμη ἀπ'ὅ,τι στήν περίπτωση τῶν παραμαγνητικῶν ὑλικῶν. Ὅταν ἀνεβάσωμε τή θερμοκρασία τοῦ σιδηρομαγνητικοῦ ὑλικοῦ παρατηροῦμε ὅτι γιά κάποια συγκεκριμένη τιμή - πού καλεῖται τό σημεῖο Curie - ἀπότομα τό ὑλικό χάνει τίς σιδηρομαγνητικές του ἰδιότητες καί γίνεται παραμαγνητικό. Τό σημεῖο Curie π.χ. γιά τό σίδηρο εἶναι $770^{0}C$ γιά τό καθαρό νικέλιο δέ $358^{0}C$.

Τό φαινόμενο τοῦ σιδηρομαγνητισμοῦ, ὅπως ἄλλωστε καί τά ἄλλα μαγνητικά φαινόμενα τῆς ὕλης, εἶναι ἕνα καθαρά κβαντομηχανικό φαινόμενο. Στό σίδηρο π.χ. τά ἄτομα σχηματίζουν ἕνα κρυσταλλικό πλέγμα κυβικῆς συμμετρίας. Τυχαίνει οἱ διευθύνσεις κατά τούς ἄξονες ±x, ±y, ±z νά εἶναι διευθύνσεις "εὐκόλου" μαγνητίσεως, οἱ δέ διαγώνιες "δυσκόλου". Ἐάν ψύξωμε ἕνα κομμάτι σιδήρου ἀπό θερμοκρασία μεγαλύτερη τῆς θερμοκρασίας Curie πρός θερμοκρασία δωματίου π.χ. θά παρατηρήσωμε ὅτι τά σπίν τῶν γειτονικῶν ἀτόμων πού βρίσκονται κατά τούς ἄξονες x, y, z προσανατολίζονται μεταξύ τους ἔτσι ὥστε κατά μικρές περιοχές πού περιέχουν ἑκατομμύρια ἑκατομμυρίων ἀτόμων, ὅλα τά ἄτομα σέ κάθε περιοχή νά ἔχουν σπίν παράλληλα πρός μία ἀπό τίς ἕξι διευθύνσεις ±x, +y, ±z. Σέ ἕνα κομμάτι ἀμαγνήτιστου σιδήρου οἱ περιοχές



αὐτές εἶναι τυχαία κατανεμημένες καί τό κομμάτι αὐτό δέν παρουσιάζει μόνιμη μαγνήτιση. Στήν παρουσία ὅμως μαγνητικοῦ πεδίου ἐπέρχεται προσανατολισμός τῶν περιοχῶν αὐτῶν πρός τό πεδίο μέ ἀποτέλεσμα, σέ ἀνομοιογενές μαγνητικό πεδίο, ν᾽ ἀναπτυχθῆ ἰσχυρά ἑλκτική δύναμη. Σέ κομμάτι σιδήρου πού εἶναι μαγνητισμένο οἱ περιοχές αὐτές, εἶναι μερικῶς προσανατολισμένες πρός κάποια κατεύθυνση. Σέ θερμοκρασία ὑψηλότερη ἀπό τό σημεῖο Curie ἐπέρχεται πλήρης "ἀταξία" τῶν ἀτόμων καί τό ὑλικό γίνεται παραμαγνητικό.

Διαμαγνητισμός. Ἀσχέτως τῶν σπίν πού ἔχουν, τά ἠλεκτρόνια, περιφερόμενα γύρω ἀπό τούς πυρῆνες, ἔχουν τροχιακή στροφορμή. Τό ἠλεκτρόνιο ὅπως περιφέρεται στήν τροχιά του μοιάζει μέ μιά "σπεῖρα" πού διαρρέεται ἀπό ρεῦμα. Τό "κλειστό" αὐτό ρεῦμα ἔχει διπολική ροπή. Ἔστω κυκλικό ρεῦμα I. Σέ



ἀπόσταση x, σέ ἄξονα κάθετο στό κέντρο τοῦ κύκλου τό πεδίο λόγω συμμετρίας θά εἶναι μόνο τό $\vec{B}_{//}$.

$$B = \int dB_{//}$$

$$dB_{//} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{r^2} \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2+x^2)^{3/2}} \int d\ell \simeq \frac{\mu_0 I\pi R^2}{2\pi x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{x^3}$$

ὅπου $S = \pi R^2$. Τό $IS = m$ εἶναι ἡ μαγνητική διπολική ροπή τῆς σπείρας. Ὅταν τοποθετηθῆ σέ μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, θά ἐξασκηθῆ μιά ροπή στρέψεως

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Τή στιγμή πού τό πεδίο αὐξάνει ἡ ροή πού διέρχεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια $S = \pi R^2$ ἀλλάζει

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Ἀλλά $\quad \int \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$

καί ἐάν θεωρήσωμε γιά ἁπλότητα τό E σταθερό βρίσκομε

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

ἤ $\quad |\vec{E}| = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$ γιά τό μέτρο τοῦ $\vec{E}$

(Σημ. Εἶναι τό ἴδιο ἀποτέλεσμα πού βρήκαμε στή σελίδα 65).
Ἡ διεύθυνση τοῦ $\vec{E}$ θά εἶναι τέτοια πού θά τείνη νά ἐπιβραδύνη τό ἠλεκτρόνιο (φορτίο $-e < o$).
Ἡ ἐπιτάχυνση κατά μῆκος τῆς τροχιᾶς εἶναι $\frac{d\upsilon}{dt}$ καί

$$F = M \frac{d\upsilon}{dt} = -eE = \frac{er}{2} \frac{dB}{dt}$$

$$d\upsilon = \frac{er}{2M} dB$$

Ἐάν θεωρήσωμε τήν ποσότητα $er/2M$ σταθερή ἡ ταχύτητα τοῦ ἠλεκτρονίου ἄλλαξε κατά $\Delta\upsilon$ κατά τή μεταβολή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἀπό O ἕως B.
Τό $\Delta\upsilon$ ὑπολογίζεται ἀπό

$$\Delta\upsilon = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+\Delta\upsilon} d\upsilon = \frac{er}{2M} \int_0^{B_1} dB = \frac{erB_1}{2M}$$

Ἡ τελική ταχύτητα $\upsilon+\Delta\upsilon$ εἶναι ἡ ἴδια ἀσχέτως ἄν ἡ μεταβολή τοῦ B γίνεται ἀργά ἤ γρήγορα. Ἡ μεταβολή αὐτή θά συνοδευθῆ ἀπό μιά μεταβολή τῆς μαγνητικῆς διπολικῆς ροπῆς πού εἶναι ἴση μέ $\Delta m = S\Delta I = \pi r^2 \Delta I$,

ἤτοι $\quad \Delta m = \pi r^2 \Delta I$

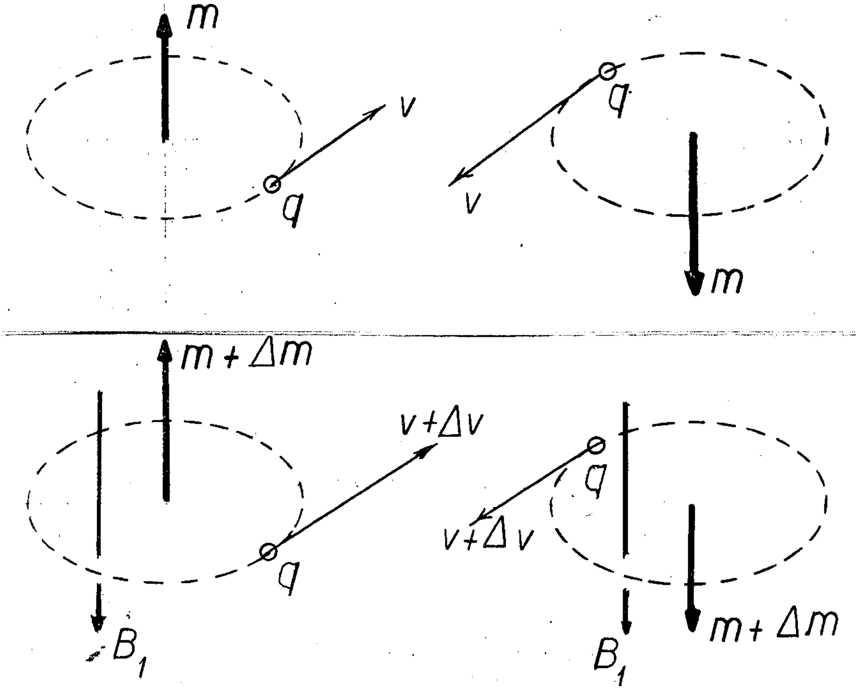
ἀλλά $\quad I = \frac{dq}{dt} = \frac{e\upsilon}{2\pi r}$

ὅπου $\upsilon/2\pi r$ εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν στροφῶν τοῦ ἠλεκτρονίου ἀνά δευτερόλεπτο

καί $\quad \Delta m = \pi r^2 \frac{e}{2\pi r} \Delta\upsilon = \frac{er}{2} \Delta\upsilon = \frac{e^2 r^2}{4M} B_1$

Ἀπό τόν κανόνα τοῦ Lenz ἤ ἀπό ὅσα εἴπαμε στή σελίδα 65 τό Δm ἀντιτίθεται στή μεταβολή τοῦ B. Ἀνυσματικά λοιπόν γράφομε

$$\Delta\vec{m} = -\frac{e^2r^2}{4M}\vec{B}_1$$



'Αναφερόμενοι στό σχῆμα βλέπομε ὅτι γιά θετική κίνηση ἑνός φορτίου q καί ἐφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο πρός τά κάτω ἡ μαγνητική διπολική ροπή αὐξάνεται, γιά ἀντίθετη κίνηση ἐλαττώνεται.

Λόγω τῆς νέας ταχύτητας υ+Δυ στό ἠλεκτρόνιο θά ἐξασκηθῆ μιά κεντρομόλος δύναμη

$$F_1 = \frac{M(\upsilon+\Delta\upsilon)^2}{r} \simeq \frac{M\upsilon^2}{r} + \frac{2M\upsilon\Delta\upsilon}{r}$$

'Εάν βάλομε τόν ὅρο $\frac{M(\Delta\upsilon)^2}{r} = 0$ (θεωροῦμε ὅτι $\Delta\upsilon << \upsilon$).

Τό ἴδιο τό μαγνητικό πεδίο ἐξασκεῖ μιά δύναμη

$$f = q(\upsilon+\Delta\upsilon)B_1 = q(\upsilon+\Delta\upsilon)\frac{2M\Delta\upsilon}{qr}$$

$$f \simeq \frac{2M\upsilon\Delta\upsilon}{r}$$ (βάλαμε τόν ὅρο $\frac{2M(\Delta\upsilon)^2}{r} = 0$)

Βλέπομε ὅτι ἡ αὔξηση τῆς κεντρομόλου δυνάμεως ἀπό

$$F = \frac{M\upsilon^2}{r} \quad \text{σέ} \quad F_1 = \frac{M\upsilon^2}{r} + \frac{2M\upsilon\Delta\upsilon}{r} = F+f$$

Προκλήθηκε μόνο λόγω ἐφαρμογῆς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου χωρίς νά ἐπιφέρη ἀλλαγή τῆς ἀκτίνας r. Ἡ ὑπόθεση λοιπόν τῆς μή ἀλλαγῆς

τῆς ἀκτίνας r ἦταν σωστή, ἐπαναλαμβάνομε στό ὅριο $\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon} << 1$ πράγμα τό ὁποῖο σημαίνει μικρές σχετικῶς τιμές τοῦ B_1.

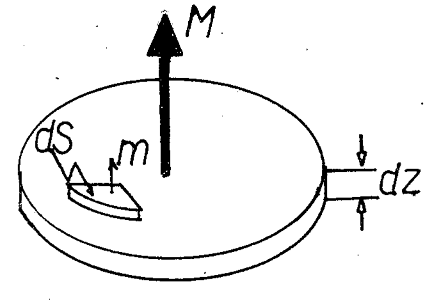
Βλέπομε ὅτι ἐκεῖνο τό ὁποῖο συνέβη ὅταν ἐφαρμόσαμε ἕνα μαγνητικό πεδίο σέ ἕνα ὑλικό ἦταν νά παρουσιασθῆ μιά μεταβολή τῆς μαγνητικῆς διπολικῆς ροπῆς, ἀντίθετη πρός τή διεύθυνση τοῦ πεδίου πού ἐφαρμόστηκε καί γιά πεδία μέχρι μερικές χιλιάδες Gauss ἔχει πολύ μικρή τιμή.

Ὅλα τά ὑλικά εἶναι διαμαγνητικά. Στά παραμαγνητικά (καί πολύ περισσότερο στά σιδηρομαγνητικά ὑλικά) ἡ μαγνήτιση λόγω σπίν ἐπισκιάζει τό διαμαγνητικό χαρακτῆρα.

Μαγνήτιση τῆς Ὕλης

'Εάν μέ ὁποιοδήποτε τρόπο, εἴτε λόγω μαγνητικῶν διπόλων μονίμων, εἴτε ἐπαγομένων, τά ἀτομικά μαγνητικά δίπολα προσανατολίζονται μερικῶς ἤ ὁλικῶς πρός μία κατεύθυνση, τό ὑλικό ἔχει μαγνητική πόλωση ἤ μ α γ ν ή τ ι σ η. 'Εάν π.χ. θεωρήσωμε ὅλα τά ἀτομικά δίπολα m νά εἶναι προσανατολισμένα πρός μία κατεύθυνση τότε τό ὑλικό θά παρουσιάση ἀνά μονάδα ὄγκου μία μαγνήτιση

$$\vec{M} = n\vec{m}$$

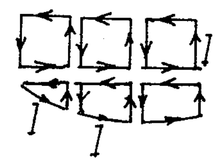


ὅπου n ὁ ἀριθμός τῶν ἀτομικῶν διπόλων ἀνά μονάδα ὄγκου.

Τή μαγνήτιση αὐτή μποροῦμε νά θεωρήσωμε ὅτι προκαλεῖται ἀπό ἕνα ἐπιφανειακό ρεῦμα κατά τόν ἑξῆς τρόπο:

Ἔστω ὑλικό πάχους dz μέ ὁμοιόμορφη μαγνήτιση

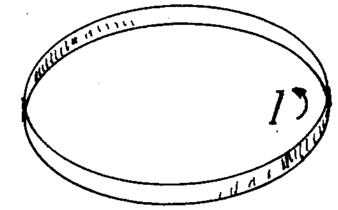
$$\vec{M} = n\vec{m}$$



Ἕνα στοιχειῶδες μαγνητικό δίπολο m μέ ἐπιφάνεια dS εἶναι ἰσοδύναμο ὅπως εἴδαμε μέ μιά ρευματική σπεῖρα m = IdS.

Τό ρεῦμα I ὑπολογίζεται ἀπό

$$I = \frac{m}{dS} = \frac{mdz}{dSdz} = \frac{mdz}{dV}$$



ή $I = \frac{nm}{ndV} dz = Mdz$

διότι $nm = M$

ndV = ὄγκος ὑλικοῦ

Παρατηροῦμε ὅτι $m = MdSdz$.

Ἐάν τώρα θεωρήσωμε ὅλα τά στοιχειώδη δίπολα βλέπομε ὅτι ὅλα τά ἐσωτερικά ρεύματα ἀλληλοαναιροῦνται καί μένει μόνο ἕνα ἐπιφανειακό ρεῦμα στήν "ταινία" πού περιβάλλει τό ὑλικό. Ἡ μαγνήτιση M λοιπόν ὀφείλεται στό ἐπιφανειακό ρεῦμα I. Ἀπό τό γεγονός ὅτι δέν ὑπάρχουν ἐλεύθερα μαγνητικά φορτία συνάγομε ὅτι τό μαγνητικό πεδίο B σέ ὅλο τό χῶρο καί ἐξωτερικά καί ἐσωτερικά τοῦ ὑλικοῦ εἶναι τό ἴδιο μέ τό μαγνητικό πεδίο πού ὀφείλεται στό ἐπιφανειακό ρεῦμα I. Ἐάν ἡ μαγνήτιση δέν εἶναι ὁμοιόμορφη ἀλλά μεταβάλλεται μέ τή θέση, δηλ.

$$M = M(x,y,z)$$

τό ἐπιφανειακό ρεῦμα δίδεται ἀπό τήν πυκνότητα ρεύματος

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

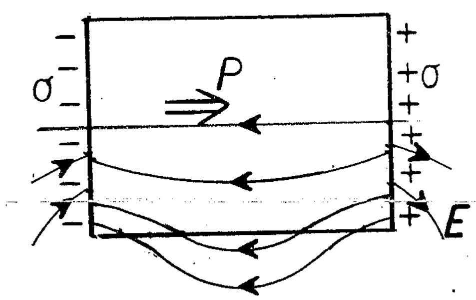
Γιά ὁμοιόμορφη μαγνήτιση

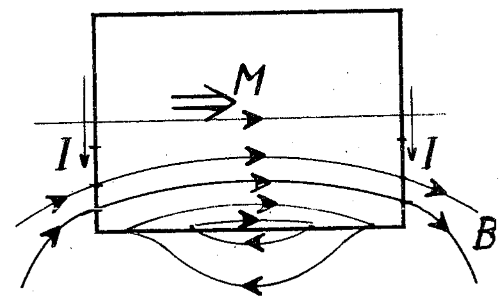
$$j = \frac{I}{dz} = M$$

<u>Πεδίο Μόνιμου Μαγνήτη</u>

Ὑλικά στά ὁποῖα τό $M \neq 0$ καλοῦνται μόνιμοι μαγνῆτες. Θέλομε νά μελετήσωμε τό μαγνητικό πεδίο B στόν ἐσωτερικό καί στόν ἐξωτερικό χῶρο τοῦ μαγνήτη. Ἔστω ὅτι ἔχομε ἕνα κύλινδρο μέ ὁμοιόμορφη μαγνήτιση M. Τό πρόβλημα μοιάζει, ἀλλά ἔχει καί διαφορές, μέ τό ἠλεκτροστατικό πρόβλημα κυλίνδρου μέ ὁμοιόμορφη πόλωση P. Τά πεδία E καί B στό ἐξωτερικό τῶν κυλίνδρων μοιάζουν μεταξύ τους. Στό ἐσωτερικό θά εἶναι τελείως διαφορετικά. Στήν περίπτωση τῆς ἠλεκτροστατικῆς πολώσεως τό πεδίο μπορεῖ νά περιγραφῆ μέ τήν ὑπόθεση ὅτι ὁ κύλινδρος ἔχει ἀντικατασταθῆ μέ δύο φορτισμένους δίσκους, ἐνῶ στήν περίπτωση τοῦ μαγνήτη, τό πεδίο περιγράφεται μέ μιά ἐπιφανειακή κατανομή ρεύματος, μπορεῖ νά περιγραφῆ δηλαδή μέ τό πεδίο πού παράγει ἕνα σωληνοειδές.

Οἱ δυναμικές γραμμές τοῦ B εἶναι συνεχεῖς καί κλειστές (ἀνυπαρξία μαγνητικῶν μονοπόλων) ἐνῶ τοῦ E ἀρχίζουν ἀπό θετικά φορτία καί καταλήγουν σέ ἀρνητικά, στά δέ δύο ἄκρα τοῦ κυλίνδρου, ὅπου ἐμφανίζονται τά φορτία πολώσεως, εἶναι ἀσυνεχεῖς.





<u>Ἐλεύθερα Ρεύματα καί τό Πεδίο H</u>

Πολύ συχνά εἶναι χρήσιμο νά ξεχωρίσωμε τά πεδία πού ὀφείλονται σέ δεσμευμένα ρεύματα καί σέ ἐλεύθερα ρεύματα. Τά δεσμευμένα ρεύματα εἶναι αὐτά πού ὀφείλονται σέ ἀτομικές μαγνητικές ροπές - λόγω τροχιακῆς στροφορμῆς καί σπίν - ἐνῶ τά ἐλεύθερα εἶναι τά συνηθισμένα ρεύματα πού ὀφείλονται στήν κίνηση ἠλεκτρονίων ἤ ἰόντων. Τά ἐλεύθερα ρεύματα, π.χ. αὐτά πού διαρρέουν μιάν ἀντίσταση πού εἶναι συνδεδεμένη μέ μιά μπαταρία, μποροῦμε νά τά ἐλέγξωμε μέ τήν ἔννοια ὅτι τά ἀρχίζομε ἤ τά σταματᾶμε μέ τό κλείσιμο ἤ τό ἄνοιγμα ἑνός διακόπτη, αὐξάνομε ἤ ἐλαττώνομε τήν ἔντασή τους κτ.λ.

Ἡ πυκνότητα ρεύματος τῶν δεσμευμένων ρευμάτων δίδεται ἀπό τόν τύπο

$$\vec{J}_{\Delta\varepsilon\sigma\mu.} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Στήν ἐπιφάνεια ὅπου τό $\vec{M}$ εἶναι ἀσυνεχές, ὅπως π.χ. στά ἄκρα τοῦ κυλίνδρου, ἔχομε μιά ἐπιφανειακή πυκνότητα ρεύματος j, ἡ ὁποία ἐπίσης παριστάνει δεσμευμένα ρεύματα.

Τό πεδίο $\vec{B}$ καί στό ἐξωτερικό καί στό ἐσωτερικό τῆς ὕλης συνδέεται μέ τό $\vec{J}_{\Delta\varepsilon\sigma\mu.}$ ἀκριβῶς ὅπως καί μέ κάθε ἄλλη πυκνότητα ρεύματος. Ὁ νόμος Ampère γράφεται

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I = \mu_0 \int \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

Ἀπό τό θεώρημα Stokes

$$\oint \vec B\cdot d\vec \ell = \int(\vec\nabla\times\vec B)\cdot d\vec S = \mu_0\int \vec J\cdot d\vec S$$

καί ἐπειδή ἡ ἐπιφάνεια $d\vec S$ εἶναι αὐθαίρετη μποροῦμε νά γράψωμε

$$\vec\nabla\times\vec B = \mu_0\vec J$$

Γιά δεσμευμένα ρεύματα ἔχομε

$$\vec\nabla\times\vec B = \mu_0\vec J_{Δεσμ.}$$

Γιά ἐλεύθερα

$$\vec\nabla\times\vec B = \mu_0 J_{Ελ.}$$

Ἐν γένει δέ

$$\vec\nabla\times\vec B = \mu_0(\vec J_{Δεσμ.}+\vec J_{Ελ.}) = \mu_0\vec J_{ολικό}$$

Ἐγράψαμε προηγουμένως ὅτι

$$\vec J_{Δεσμ.} = \vec\nabla\times\vec M$$

ἄρα $$\vec\nabla\times\vec B = \mu_0(\vec\nabla\times\vec M + \vec J_{Ελ.})$$

Ὁρίζομε τώρα ἕνα ἄλλο μαγνητικό πεδίο Η ἀπό τή σχέση

$$\vec J_{Ελ} = \vec\nabla\times\vec H = \nabla\times\left(\frac{\vec B-\mu_0\vec M}{\mu_0}\right)$$

ἄρα $$\vec\nabla\times\vec B = \mu_0\vec\nabla\times(\vec M+\vec H)$$

Τό ἄνυσμα $\vec H$ πού ὁρίζεται ἀπό τή σχέση

$$\vec H = \frac{\vec B-\mu_0\vec M}{\mu_0}$$

καί γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ σχέση

$$\oint \vec H\cdot d\ell = \frac{1}{\mu_0}\oint(\vec B-\mu_0\vec M)\cdot d\ell = \int(\vec\nabla\times\vec H)\cdot d\vec S$$
$$=\int \vec J_{Ελ}\cdot d\vec S = I_{Ελ}$$

ὀνομάζεται "μαγνητικό πεδίο $\vec H$" ἤ "μαγνητίζον πεδίον $\vec H$". Ὁ ὅρος "μαγνητικό πεδίο" παρέμεινε ἀπό τήν παλαιότερη χρήση ὅπου τό "μαγνητικό πεδίο $\vec B$" ὀνομαζόταν "μαγνητική ἐπαγωγή". Τό θεμελιῶδες ἄνυσμα πού ἐκφράζει τή δύναμη πού ἀναπτύσσεται μεταξύ δύο κινουμένων φορτίων καί σχετίζεται μέ τό σύνολο τῶν ρευμάτων εἶναι τό $\vec B$. Ὑπενθυμίζομε ὅτι στήν ἠλεκτροστατική τό ἠλεκτρικό πεδίο πού σχετιζόταν μέ τό σύνολο τῶν φορτίων εἶναι τό $\vec E$.

Γιά τό ἄνυσμα $\vec B$ ἰσχύει ἐπίσης ἡ σχέση

$$\oint\vec B\cdot d\vec S = \int\vec\nabla\cdot\vec B\,dυ = 0$$

καί στό ἐσωτερικό καί στό ἐξωτερικό τῆς ὕλης.

Γιά τό ἄνυσμα $\vec H$ δέν εἶναι ἀπαραίτητο νά ἰσχύη μιά παρόμοια

σχέση.

Γιά διαμαγνητικά καί παραμαγνητικά ὑλικά βρίσκομε πειραματικά ὅτι

$$\vec B = \kappa_m\mu_0\vec H$$

ὅπου κ_m, ἡ μαγνητική διαπερατότητα τοῦ μαγνητικοῦ ὑλικοῦ, εἶναι σταθερά γιά κάποια θερμοκρασία καί πυκνότητα τοῦ ὑλικοῦ.

Ἐπίσης

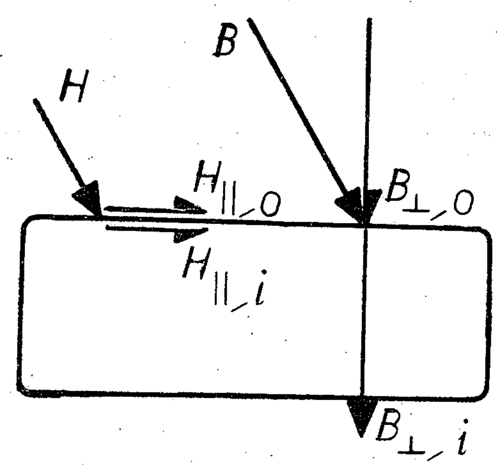
$$\vec M = (\kappa_m-1)\vec H$$

Στό κενό

$$\vec M = 0,\quad \kappa_m = 1 \quad \text{καί} \quad \vec B = \mu_0\vec H$$

Ἀνακεφαλαιώνομε τίς ἰδιότητες τῶν $\vec B$, $\vec H$ καί $\vec M$ ἀφοῦ γράψωμε πρῶτα τίς ὁριακές συνθῆκες.

Ὁριακές Συνθῆκες. Σχέσεις πού συνδέουν ἤ δίνουν τίς τιμές πού ἔχουν τά πεδία ἤ οἱ συνιστῶσες τους στίς ὁριακές ἐπιφάνειες πού χωρίζουν δύο ὑλικά.



ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ἔνταση Μαγνητικοῦ Πεδίου (Μαγν. Ἐπαγωγή) $\vec B$	Συνδέεται μέ ὅλα τά ρεύματα	Ἔχει συνεχῆ τήν κάθετη συνιστῶσα
Ἔνταση Μαγνητίζοντος Πεδίου $\vec H$	Συνδέεται μέ τά Ἐλεύθερα ρεύματα	Ἔχει συνεχῆ τήν ἐφαπτομένη συνιστῶσα*

(*) Μόνο ἄν δέν ὑπάρχουν πραγματικά ρεύματα στή διαχωριστική ἐπιφάνεια.

Μαγνήτιση $\vec{M}$	Συνδέεται μέ δεσμευμένα ρεύματα	Μηδενίζεται στό κενό
Σχέση πού ὁρίζει τό $\vec{B}$	$\vec{F} = q\vec{u}\times\vec{B}$ ἤ $I\vec{\ell}\times\vec{B}$	
Σχέση μεταξύ $\vec{B},\vec{H},\vec{M}$	$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}$	
Νόμος Ampère παρουσία Μαγνητικῶν ὑλικῶν	$\oint\vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_{E\lambda}$.	
Ἐμπειρικές Σχέσεις γιά ὡρισμένα μαγνητικά ὑλικά	$\vec{B} = \kappa_m\mu_0\vec{H}$ $\vec{M} = (\kappa_m - 1)\vec{H}$	

Ἐξισώσεις Maxwell

Εἴχαμε γράψει γιά τό ἠλεκτρικό πεδίο τό νόμο Gauss

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{ὁλικό}}}{\varepsilon_0}$$

Γιά τό μαγνητικό πεδίο ὁ ἀντίστοιχος νόμος γράφεται

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

πού δηλώνει τήν ἀνυπαρξία μαγνητικῶν μονοπόλων.

Ἡ ἠλεκτρεγερτική δύναμη πού ὀφείλεται στή χρονική μεταβολή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου δίνεται ἀπό τό νόμο τοῦ Faraday

$$\mathcal{E} = \oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\oint\vec{B}\cdot d\vec{S}$$

Τέλος βρήκαμε ὅτι

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{ὁλικό}} = \mu_0\int\vec{J}_{\text{ὁλ}}\cdot d\vec{S}$$

Ὁ τελευταῖος τύπος ἰσχύει μόνο γιά σταθερά πεδία. Ἐάν, ἐκτός ἀπό τό σταθερό πεδίο πού προκαλεῖ τό $I_{\text{ὁλ}}$ ὑπάρχει ἕνα μεταβαλλόμενο μέ τό χρόνο ἠλεκτρικό πεδίο τότε ὁ τελευταῖος τύπος τροποποιεῖται, διότι, ὅπως στήν περίπτωση τοῦ φαινομένου Faraday ἕνα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο προκαλεῖ ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο, ἔτσι καί πειραματικά ἔχει βρεθῆ (Νόμος Ampère - Maxwell) ὅτι ἕνα χρονικά μεταβαλλόμενο ἠλεκτρικό πεδίο προκαλεῖ ἕνα μαγνητικό πεδίο σύμφωνα μέ τή σχέση

$$\oint\vec{B}_d\cdot d\vec{\ell} = \varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Γράφομε λοιπόν

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\int\vec{I}_{\text{ὁλ}}\cdot d\vec{S} + \varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Τήν ποσότητα

$$I_d = \int\vec{J}_d\cdot d\vec{S} = \varepsilon_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

ὁ Maxwell κάλεσε ρεῦμα μετατοπίσεως (displacement Current).

Ἔτσι $\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I_{\text{ὁλ}} + I_d) = \mu_0(I_{\varepsilon\lambda} + I_{\delta\varepsilon\sigma\mu} + I_d)$

Οἱ τέσσερες αὐτές σχέσεις πού γράψαμε μποροῦν νά ἐκφρασθοῦν σέ διαφορική μορφή ὡς ἑξῆς:

$$\int\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{ὁλ}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho_{\text{ὁλ}}\,du$$

Ἀπό τό θεώρημα Gauss

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{S} = \int\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,du$$

Γράφομε λοιπόν

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{\text{ὁλ}}$$

Κατά τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο ἀπό τή δεύτερη σχέση παίρνομε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Ἡ τρίτη σχέση (ὅπως ἤδη ἀναπτύξαμε στήν παράγραφο "Μαγνητικά Πεδία πού Μεταβάλλονται μέ τό Χρόνο") μετατρέπεται στή σχέση

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Γιά τό μαγνητικό πεδίο ἔχομε

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\left\{\int\vec{J}_{\text{ὁλ}}\cdot d\vec{S} + \varepsilon_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{S}\right\}$$

ἤ ἀπό τό θεώρημα Stokes

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \mu_0\int\left(\vec{J}_{\text{ὁλ}} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

Ἐπειδή ἡ σχέση ἰσχύει γιά ὅλα τά $d\vec{S}$ γράφομε

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J}_{\text{ὁλ}} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Οἱ ἐξισώσεις αὐτές καλοῦνται Ἐξισώσεις Maxwell καί χρησιμοποιοῦνται εἴτε στήν ὁλοκληρωτική εἴτε στή διαφορική τους μορφή γιά τή λύση ὁποιουδήποτε προβλήματος ἠλεκτρομαγνητισμοῦ μαζί μέ τίς δύο ἄλλες σχέσεις πού ἤδη ξαίρομε, δηλαδή:

τή δύναμη Lorenz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B})$

καί ἐξίσωση συνεχείας $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

Οἱ ἐξισώσεις Maxwell εἶναι σωστές κατά τήν ἔννοια τῆς ἀρχῆς τῆς σχετικότητας, δέν ἀλλάζουν μορφή δηλαδή ὅταν μεταφερόμαστε ἀπό ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς σέ ἄλλο πού κινεῖται ὡς πρός τό πρῶτο μέ σταθερή ταχύτητα.

Ὁ κατωτέρω πίνακας ἀνακεφαλαιώνει τίς ἐξισώσεις Maxwell στήν ὁλοκληρωτική καί διαφορική μορφή τους, ἀναφέρει δέ καί τό νόμο πού κάθε μία ἀπό αὐτές ἐκφράζει.

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL ΓΙΑ ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Ὁλοκληρωτική Μορφή	Διαφορική Μορφή	Νόμος πού Ἐκφράζει
$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{o\lambda}}{\varepsilon_0}$	Gauss γιά τό Ἠλεκτρικό Πεδίο
$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	Gauss γιά τό μαγνητικό Πεδίο
$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	Faraday
$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\{\int \vec{J}_{o\lambda}\cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}\int \varepsilon_0\vec{E}\cdot d\vec{S}\}$	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0(\vec{J}_{o\lambda} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$	Ampère - Maxwell

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α: Κυματική ἐξίσωση τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος στό κενό. Οἱ ἐξισώσεις γράφονται

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

δεδομένου ὅτι στό κενό $\rho_{o\lambda} = 0$, $\vec{J}_{o\lambda} = 0$

Ἀπό τήν τρίτη σχέση ἔχομε

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\times(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})$$

ἤ

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{\nabla}^2 E = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

Ἀπό τήν πρώτη $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

Ἀπό τήν τέταρτη $\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Ἀντικαθιστοῦμε καί βρίσκομε:

$$-\nabla^2\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad (\mu_0 c_0 = \frac{1}{c^2})$$

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Ἡ ἐξίσωση δηλώνει ἕνα κῦμα πού ὁδεύει μέ ταχύτητα c, τήν ταχύτητα τοῦ φωτός στό κενό.