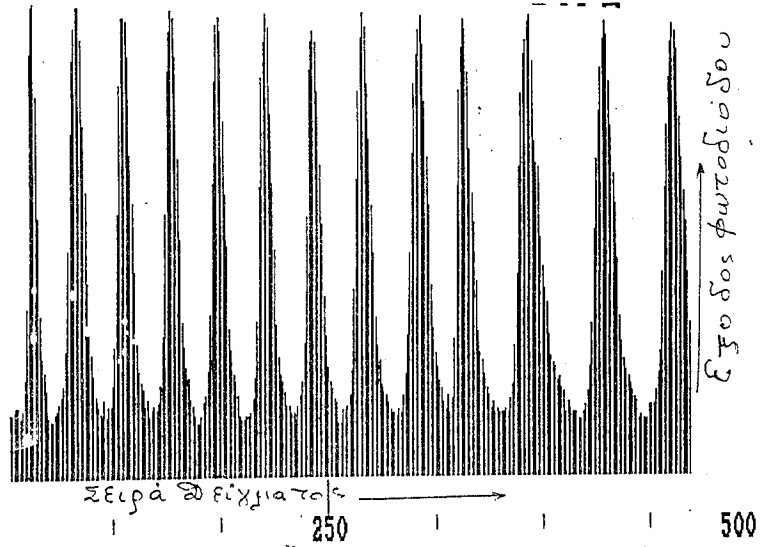


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΦΩΚΙΤΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ



ΦΩΚΙΤΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ:

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

1994

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός των σημειώσεων αυτών είναι να καλυφθεί η ύλη του μαθήματος Ειδικά Κεφάλαια Φυσικής, το οποίο διδάσκεται στους Φοιτητές του 6ου Εξαμήνου του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π. Ταυτόχρονα, μπορούμε να πούμε ότι στις σημειώσεις αυτές καλύπτεται η ύλη της περιοχής που συνηθίζεται να καλείται Σύγχρονη Φυσική. Προσπαθώντας να είμαστε συνεπείς με τον τίτλο του μαθήματος, συμπεριλαμβάνουμε ορισμένα παραδείγματα εφαρμογών της Κβαντικής Θεωρίας βασισμένα στις πρόσφατες προόδους του κλάδου αυτού της Φυσικής. Ιδιαίτερη προσπάθεια γίνεται στην επιλογή αυτή να προτιμηθούν εφαρμογές σημαντικού τεχνολογικού ενδιαφέροντος.

Θα ήθελα από τη θέση αυτή να ευχαριστήσω θερμά τους συναδέλφους του τομέα Φυσικής του Ε.Μ.Π., ιδιαίτερα τον Συνάδελφο Σ. Παπαδόπουλο, για εύστοχες παρατηρήσεις. Επίσης όσους από τους συναδέλφους συνεργάστηκαν για την υλοποίηση εργαστηριακών ασκήσεων για τις οποίες γίνεται μνεία στο κείμενο.

Ε. Φωκίτης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θα κάνουμε πρώτα μια εισαγωγή στην Εξίσωση Schrodinger η οποία δεν θα είναι πολύ αυστηρή, αλλά θα είναι κατά το δυνατόν ευλογοφανής. Η εισαγωγή όμως θα είναι μαθηματικά θεμελιωμένη σε επαρκή βαθμό ώστε να αποκτήσουμε κάποια ευχέρεια τόσο στην σε βάθος κατανόηση όσο και στην χρησιμοποίηση των συμπερασμάτων σε συγκεκριμένες εφαρμογές που απαιτούν υπολογισμούς. Στην προσπάθειά μας αυτή θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αρκετές από τις γνώσεις του μαθήματος της Κυματικής, ειδικά δε τα θέματα τα σχετικά με τη συμβολή, περίθλαση, καταστάσεις πόλωσης, κ.α.

Όταν αργότερα έχουμε πεισθεί για το ευλογοφανές της εξίσωσης του Schrodinger θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τις αρχές της κβαντομηχανικής με μια περισσότερο Αξιωματική θεμελίωση. Θα προσπαθήσουμε η φαινομενολογική μας εισαγωγή να μην είναι απλά, μόνο μια Ιστορική Αναδρομή, αλλά να είναι κατά το δυνατόν πλήρης και σύντομη. Η κύρια ιδέα που πρέπει συνεχώς να έχουμε στο μυαλό μας είναι ότι η Κβαντική Μηχανική είναι ένα θεωρητικό κατασκεύασμα που η ορθότητα του πρέπει να επιβεβαιωθεί (και έχει επιβεβαιωθεί) από πειράματα. Συνεπώς απαιτείται μια λεπτομερής μερικές φορές αναφορά στις πειραματικές διαδικασίες, τόσο σε εκείνες που ιστορικά έγιναν για πρώτη φορά από τους προδρόμους της Σύγχρονης Φυσικής, όσο και σε σύγχρονα εργαστηριακά πειράματα τα οποία πολλές φορές επιβεβαιώνουν ή θέτουν υπό δοκιμασία τις αρχές της Φυσικής.

Πρόσβαση σε τέτοια πειράματα μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους μεταξύ των οποίων είναι η παραπομπή την αντί-

στοιχη αρθρογραφία σε περιοδικά Φυσικής, σε εργαστηριακά βιβλία και τέλος η περιγραφή με κάποια λεπτομέρεια ορισμένων πειραματικών διαδικασιών. Όμως όσο χρήσιμη και να φαίνεται η περιγραφή πειραμάτων που αναδεικνύουν αρχές της Φυσικής, τόσο δύσκολο είναι για τον φοιτητή να καταλάβει σε βάθος τη σημασία των αρχών αυτών εάν δεν αποκτήσει ο ίδιος μια πρακτική εργαστηριακή εμπειρία στην εκτέλεση πειραμάτων και μέτρηση θεμελιωδών μεγεθών της Σύγχρονης Φυσικής. Έτσι στην πορεία των σημειώσεων αυτών θα υποδείξουμε ποια πειράματα μπορούν να εκτελεστούν από τον φοιτητή στο αντίστοιχο εξάμηνο με τη διδασκαλία αυτών των σημειώσεων.

Ας δούμε τώρα σύντομα ποια είναι τα πειράματα εκείνα που πράγματι συνηγορούν υπέρ της κβαντικής συμπεριφοράς της ύλης.

Επιγραμματική Ιστορική Αναδρομή

Η μελέτη της φασματικής κατανομής της ακτινοβολίας του μελάνος σώματος οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η Κλασσική Φυσική, και ειδικότερα η εφαρμογή των αρχών της στην εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας όπως αυτή περιγράφεται από τις εξισώσεις του Maxwell, οδηγούσε σε προβλέψεις οι οποίες ευρίσκονται σε σαφή αντίθεση με τα πειραματικά αποτελέσματα. Τη διαφωνία αυτή μεταξύ θεωρίας και πειράματος κατάφερε να εξηγήσει επιτυχώς ο Max Planck, ο οποίος για πρώτη φορά οδήγηθηκε στην υιοθέτηση της έννοιας της κβάντωσης. Πέρασαν αρκετά χρόνια έως ότου οι Heisenberg, Schrodinger, Born, Einstein και άλλοι μπόρεσαν να αναπτύξουν την κβαντική θεωρία με την μορφή που γνωρίζουμε και εφαρμόζουμε σήμερα.

Ωστόσο, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εφαρμογές της κβαντομηχανικής, όπως ονομάστηκε η κβαντική θεωρία, στους Τομείς της Πυρηνικής Δομής, Φυσικής της Συμπυκνωμένης Ύλης, Ατομικής Φυσικής καθώς και της Φυσικής των τεχνικά κατασκευαζόμενων υλικών (Υπεραγωγοί, Υπερδομές κ.α.). Τα θέματα αυτά θα παρουσιάσουμε στην πορεία των σημειώσεων αυτών.

Στην πορεία της παρουσίασης των βασικών αρχών της κβα-

ντικής Φυσικής, σε αρκετές περιπτώσεις δίνουμε ιδιαίτερη σημασία στην περιγραφή της πειραματικής μεθοδολογίας που επιτρέπει την επιβεβαίωση των αρχών αυτών. Ένας πρόσθετος λόγος της λεπτομερειακής αυτής παρουσίασης είναι ότι μερικές από τις συσκευές που περιγράφονται βρίσκουν πρακτικές εφαρμογές στην σύγχρονη τεχνολογία. Έχει γίνει επίσης μια προσπάθεια να συμπεριληφθούν μια σειρά ασκήσεων των οποίων ο σκοπός είναι αφενός εξοικείωση με τις περιγραφόμενες έννοιες, και αφετέρου υπόδειξη πιθανών κατευθύνσεων εφαρμογών.

Τέλος, υπάρχει και μια σειρά λυμένων παραδειγμάτων για εμπέδωση της θεωρίας.

Ο φοιτητής, για την κατανόηση των σημειώσεων αυτών, πρέπει να έχει ως προαπαιτούμενες γνώσεις Φυσικής, την ύλη της Μηχανικής, Ηλεκτρισμού και Κυματικής.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΑΡΤΥΡΙΕΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

1.1. Εισαγωγή στη Σκέδαση-Κλασσική Εικόνα Σκέδασης - Μοντέλο Ραδερφορντ

Τα φαινόμενα της Σκέδασης είναι σπουδαία για δύο λόγους. Πρώτα γιατί συμβαίνουν σε πληθώρα διαδικασιών στη φύση και επηρεάζουν άμεσα ή έμμεσα τον τρόπο ζωής μας και το περιβάλλον. Δεύτερον γιατί τα περισσότερα πράγματα που γνωρίζουμε για τη δομή και τις ιδιότητες της ύλης (άτομα, μόρια, νουκλεόνια, κουρκς κ.λ.π.) προκύπτουν από ανάλυση πειραματικών δεδομένων σκέδασης. Ιστορικά ένας μεγάλος σταθμός στην εφαρμογή μεθόδων σκέδασης είναι το πείραμα σκέδασης σωματιδίων άλφα, δηλαδή πυρήνων του ατόμου του Ήλιου (${}^4_2\text{He}$) με άτομα που περιέχονταν σε ένα φύλλο χρυσού που εκτελέστηκε από τον Άγγλο Έρνεστ Ράδερφορντ και τους συνεργάτες του. Τα αποτελέσματα της σκέδασης διέψευσαν ένα μοντέλο για την δομή του ατόμου σύμφωνα με το οποίο (μοντέλο Τόμσον) σε κάθε άτομο το θετικό και αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε όλο τον όγκο του ατόμου. Το πείραμα της σκέδασης έδειξε ότι η γωνιακή κατανομή των σκεδαζομένων σωματιδίων άλφα μπορούσε να εξηγηθεί μόνο αν το θετικό φορτίο του ατόμου

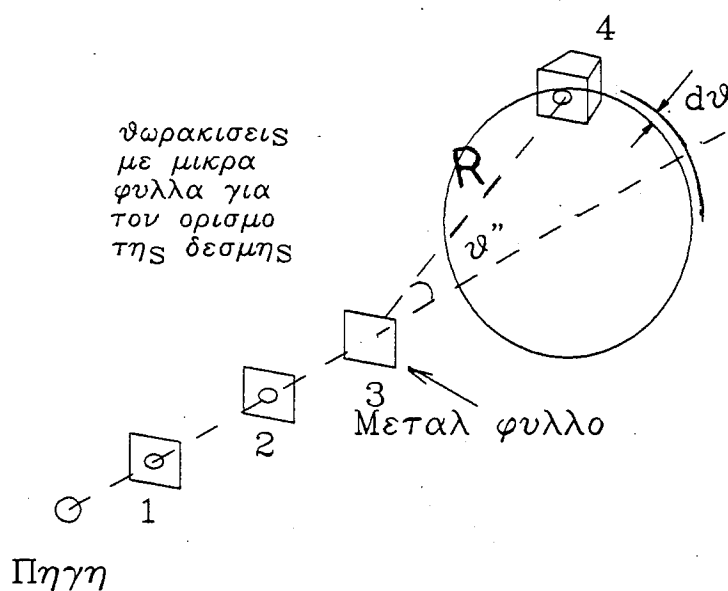
ήταν συγκεντρωμένο πρακτικά στο κέντρο του, ενώ το αρνητικό φορτίο ήταν τοποθετημένο σε μια περιφερειακή περιοχή του ατόμου. Έτσι προέκυψε το περίφημο μοντέλο του Ράδερφορντ που μολονότι σήμερα δεν θεωρείται ακριβές έδωσε μια ποιοτικά ορθότερη ερμηνεία της δομής του ατόμου σε σύγκριση με τις μέχρι τότε επικρατούσες αντιλήψεις. Θα μας δοθεί η δυνατότητα να δούμε λεπτομερέστερα την πειραματική και θεωρητική πλευρά του πειράματος αυτού.

Το φαινόμενο της σκέδασης μπορεί να παρουσιαστεί τόσο στην κλασική όσο και στην σχετικιστική μηχανική. Επίσης μπορεί να περιγραφεί επαρκώς σε μερικές περιπτώσεις χωρίς να χρειάζεται να καταφύγουμε στις αρχές της κβαντομηχανικής, κάνοντας απλά χρήση κλασικής μηχανικής. Θα μελετήσουμε υπό ποιές συνθήκες το φαινόμενο χρειάζεται κβαντική περιγραφή στη περίπτωση αυτή θα μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά μεγέθη της σκέδασης και θα περιγράψουμε μερικά πειράματα σκέδασης.

1.2. Σκέδαση σωματιδίου από κέντρικό δυναμικό-Σκέδαση Ράδερφορντ

Στο πείραμα αυτό χρησιμοποιήθηκαν σωματίδια άλφα σε μορφή δέσμης σωματιδίων με λίγο πολύ καθορισμένη εγκάρσια διατομή. Τα σωματίδια της δέσμης αυτής προέκυπταν από φυσική ραδιενέργεια.

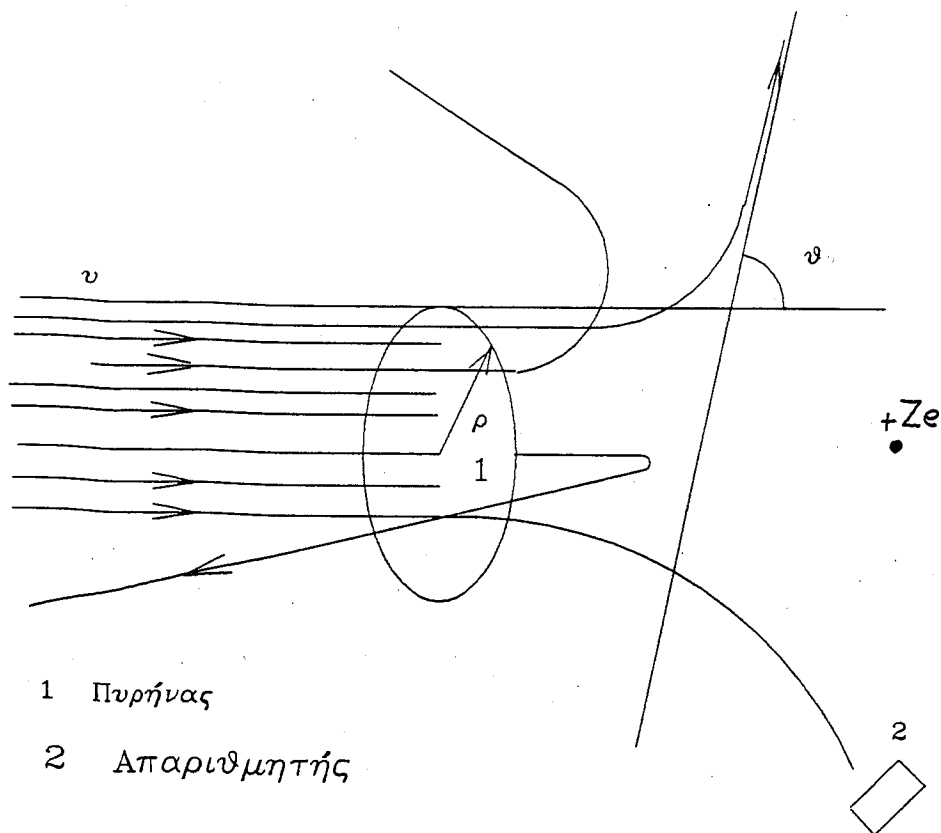
Η πειραματική διάταξη φαίνεται σχηματικά στο Σχ.1.1. Επειδή η ραδιενεργός πηγή στέλνει σωματίδια άλφα ισοτροπικά προς όλες τις κατευθύνσεις, χρησιμοποιείται ένα σύστημα περιορισμού μιας δέσμης (collimator). Ο τρόπος καταμέτρησης των προϊόντων της σκέδασης σε κάθε συγκεκριμένη γωνία θ στηρίζονταν στην ανίχνευση με το μάτι της λάμπης που έδινε ένα φορτισμένο σωματίδιο α όταν έπεφτε πάνω σε έναν απεριθμητή (A) από ZnS. Γιατί τα σωματίδια άλφα μιας καλά ευθυγραμμισμένης δέσμης που προσπίπτουν στο στόχο του φύλλου χρυσού δεν σκεδάζονται όλα προς την ίδια κατεύθυνση; Τούτο μπορεί να εξηγηθεί σχηματικά από το Σχ.1.2, όπου η δέσμη παριστάνεται απλο-



Σχήμα 1.1.: Σχηματική παράσταση πειράματος σκέδασης ακτίνων άλφα από φύλλα χρυσού για την μελέτη της δομής του ατόμου (Rutherford και συνεργάτες).

ικά με μια ομοιόμορφη κατανομή διανυσμάτων σε μια επιφάνεια ακτίνας ρ . Αν το θετικό τμήμα του ηλεκτρικού φορτίου του ατόμου θεωρηθεί ως γεωμετρικό σημείο, τότε η κάθε τροχιά σωματιδίου χαρακτηρίζεται από μια απόσταση s της νοητής προέκτασης του διανύσματος της ταχύτητας v από το σημείο Σ . Παρατηρούμε στο σχήμα ότι θ γωνία εκτροπής θα είναι συνάρτηση της παραμέτρου κρούσης s όταν το δυναμικό $V(r)$ που υφίσταται το κάθε σωματίδιο α διέπεται από το δυναμικό Coulomb. Ο ίδιος ισχυρισμός ισχύει βέβαια και για οποιαδήποτε μορφή δυναμικού, μόνο που η γωνιακή κατανομή των σκεδαζομένων σωματιδίων θα είναι διαφορετική.

Ενεργός διατομή σκέδασης. Στη συνέχεια θα ορίσουμε μια παράμετρο που χαρακτηρίζει τα φαινόμενα της σκέδασης γενικά και έχει σπουδαία σημασία διότι αποτελεί την παράμετρο εκείνη που μετράμε στα πειράματα σκέδασης προκειμένου να συγκρί-



Σχήμα 1.2.: Παραστατικό διάγραμμα για την κατανόηση της δυνατότητας εκτροπής σωματιδίων άλφα όταν πλησιάζουν στο θετικό τμήμα του ηλεκτρικού φορτίου του ατόμου, θεωρούμενου σημειακού.

νουμε τα πειραματικά αποτελέσματα κρούσεων με τις θεωρητικές προβλέψεις για τη δομή και την δυναμική των σωματιδίων της ύλης. Η παράμετρος αυτή ονομάζεται ενεργός διατομή. Για τον ορισμό της, ας ορίσουμε I την ένταση της δέσμης, δηλαδή τον αριθμό των σωματιδίων που προσπίπτουν σε κάποιο στόχο ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου. Αν τώρα θεωρήσουμε, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.3, τον αριθμό των σωματιδίων που σκεδάζονται με παράμετρο κρούσης μεταξύ s και $s+ds$, και σε αζιμουθιακή γωνία μεταξύ φ και $\varphi+d\varphi$, ώστε να περιέχονται σε μια στερεά γωνία $d\Omega$ με κέντρο σκέδασης Σ , τότε η διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης $\sigma(\Omega)$ στην κατεύθυνση $d\Omega$ είναι εξ ορισμού:

$$\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{\text{αριθμός σωματιδίων που σκεδάζονται σε στερεά γωνία } d\Omega}{\text{προσπίπτουσα ένταση δέσμης } I}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ως αμελητέα την επίδραση της τυχόν πόλωσης της δέσμης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι στην γωνιακή κατανομή σκέδασης, δηλαδή στην διαφορική ενεργό διατομή υπάρχει μια αζιμουθιακή συμμετρία ως προς περιστροφές κατά την αζιμουθιακή γωνία φ :

$$\sigma(\theta, \varphi) = \sigma(\theta, \varphi + d\varphi)$$

Σε μια τέτοια περίπτωση μπορούμε να ολοκληρώσουμε εύκολα ως προς την γωνία φ διότι είναι:

$$d\Omega = \sin\theta d\varphi d\theta$$

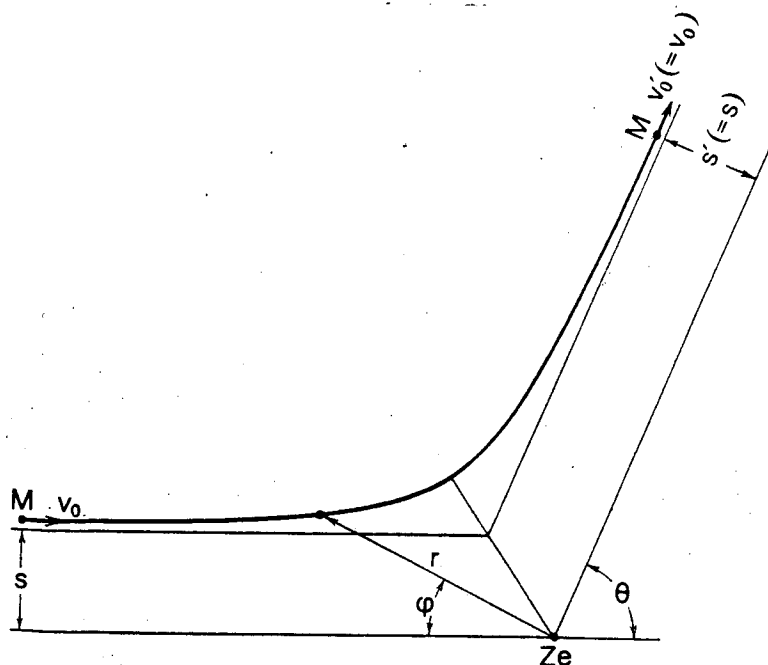
συνεπώς το ολοκλήρωμα της γωνίας δίνει:

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$$

Στη συνέχεια το πρόγραμμα μελέτης μας θα στοχεύει στην εύρεση μιας έκφρασης της θεωρητικά προβλεπομένης εξάρτησης της διαφορικής ενεργού διατομής $\sigma(\theta)$ από την πολική γωνία θ και από την ταχύτητα του προσπίπτοντος σωματίδιου α . Η εξαγωγή αυτή θα περιορίζεται στην ειδική περίπτωση του δυναμικού Κουλόμπ που θεωρείται ότι επικρατεί στη σκέδαση Ράδερφορντ.

Υποθέτουμε ότι ο πυρήνας έχει μάζα πολύ μεγάλη σε σύγκριση με την μάζα του προσπίπτοντος σωματιδίου, έτσι ώστε κατά την σκέδαση ο πυρήνας να παραμένει πρακτικά ακίνητος. Τούτο είναι αληθές κατά προσέγγιση στη σκέδαση σωματιδίων α από πυρήνες χρυσού. Στην άσκηση θα εξετάσουμε την γενικότερη περίπτωση μη αμελητέας μάζας του προσπίπτοντος σωματιδίου σε σύγκριση με εκείνη του στόχου. Επειδή η σκέδαση που μελετάμε είναι ελαστική, η κινητική ενέργεια του σκεδαζόμενου σωματιδίου αρκετό χρόνο μετά την σκέδαση ισούται με εκείνη που είχε πολύ πριν την σκέδαση.

Με την βοήθεια του Σχ.1.3 η μεταβολή του διανύσματος



Σχήμα 1.3.: Για τον υπολογισμό της ενεργού διατομής σκέδασης Rutherford.

της ορμής μπορεί να υπολογισθεί με την βοήθεια της γωνίας θ :

$$\Delta p = 2mv_0 \sin(\theta/2) \quad (1.1)$$

Η μεταβολή αυτή της ορμής εξαρτάται εκτός από την παράμετρο κρούσης και από το δυναμικό Κουλόμπ το οποίο σε κάθε σημείο της τροχιάς του σωματιδίου ασκεί μια διαφορετική σε μέγεθος δύναμη. Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε την επίδραση του δυναμικού Κουλόμπ στη μεταβολή της ορμής κατά τον άξονα των z από την σχέση:

$$\Delta p_z = \int_0^{\infty} F_z dt \quad (1.2)$$

Η δύναμη σαν συνάρτηση της απόστασης r δίνεται από την σχέση:

$$F_z = \int_0^{\infty} (Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2) \cos\theta dt \quad (1.3)$$

Εδώ όμως υπάρχει η μεταβλητή r , η οποία δυσκολεύει την ολοκλήρωση. Για την απαλειφή της χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της διατήρησης της στροφορμής L στα κεντρικά δυναμικά:

$$L = m(d\theta/dt)r^2 = \text{σταθ.} = mv_0 s \quad (1.4)$$

και έτσι αντικαθιστούμε την εξάρτηση από τη θέση σε εξάρτηση από τον χρόνο:

$$\begin{aligned} \Delta p_z &= \int_{-(\pi-\theta)/2}^{(\pi-\theta)/2} (2ze^2 / 4\pi\epsilon_0 v_0) (\cos\theta d\theta) = \\ &= (2ze^2 m / 4\pi\epsilon_0 l) \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

και κάνοντας χρήση της $\Delta p_z = 2mv_0 \cdot \sin(\theta/2)$, έπεται:

$$\cos \frac{\theta}{2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{E_{\kappa\lambda\nu} \cdot s}{ze^2} \quad (1.5)$$

Η σχέση (1.5) μας επιτρέπει όταν γνωρίζουμε την παράμετρο κρούσης s να προσδιορίζουμε την γωνία θ εκτροπής του σωματιδίου από την αρχική του κατεύθυνση. Ωστόσο όταν το s είναι εξαιρετικά μικρό, δηλαδή της τάξης μεγέθους του πυρήνα (10^{-13} cm) δεν μπορούμε να καθορίσουμε πειραματικά την παράμετρο κρούσης s σε κάθε μεμονωμένη σύγκρουση και συνεπώς δεν μπορούμε να πετύχουμε την επιθυμητή τιμή της γωνίας σκέδασης. Τούτο συμβαίνει διότι μια ατομική δέσμη οσοδήποτε καλά ορισμένη και να προσπαθήσουμε να την κάνουμε δεν μπορούμε να ξέρουμε επακριβώς την παράμετρο κρούσης του καθενός σωματιδίου της δέσμης. Έτσι στο πείραμα αυτό, όπως και σε όλα τα πειράματα σκέδασης, αυτό που μπορούμε να μετράμε είναι ο αριθμός των σωματιδίων που σκεδάζονται σε μια περιοχή γωνιών $(\theta, \theta+d\theta)$. Διαφορίζοντας την σχέση (1.5) παίρνουμε:

$$ds = (ze^2 / 8\pi\epsilon_0 E_{\kappa}) (-\csc^2(\theta/2)) d\theta \quad (1.6)$$

το σημείο-παρουσιάζεται διότι το θ αυξάνεται καθώς το s μεγαλώνει. Η σχέση (1.6) μας δείχνει σε ποιό διάστημα μεταβάλλ-

λεται η παράμετρος κρούσης όταν η γωνία σκέδασης μεταβάλλεται από θ ως $\theta+d\theta$. Επειδή όμως ο αριθμός των σωματιδίων πριν τη σκέδαση ισούται με τον αριθμό των σωματιδίων μετά τη σκέδαση, μπορούμε να εκφράσουμε την ποσότητα dn :

$$dn=2\rho s ds Nn \quad (1.7)$$

όπου N ο αριθμός πυρήνων ανά τετραγωνικό μέτρο και n ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων που έλαβαν μέρος στο πείραμα. Αλλά τα s και ds μπορούν να εκφραστούν από τις εκφράσεις 1.5 και 1.6 αντίστοιχα, οπότε προκύπτει η σχέση 1.8:

$$dn = \frac{-\pi z^2 e^4 Nn}{(16\pi^2 \epsilon_0^2) E_x^2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{csec}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad (1.8)$$

Αυτή δίνει το λόγο $dn/d\theta$ και η γραφική της παράσταση παριστάνεται στο Σχ. 1.4.

Πειραματικά όμως ο Ράδενφορντ και οι συνεργάτες του μετρούσαν τον αριθμό των σωματιδίων a που πέφτουν πάνω στην ενεργό επιφάνεια ενός απεριθμητή που φαίνεται στο Σχ.1.1. Έτσι η διαφορική ενεργός διατομή πρέπει να δώσει τον συνολικό αριθμό των σωματιδίων Δn που πέφτουν πάνω σε μια επιφάνεια:

$$2\pi R s \sin(\theta) R d\theta \quad (1.9)$$

Το κλάσμα λοιπόν των σωματιδίων που πέφτουν στον απεριθμητή είναι

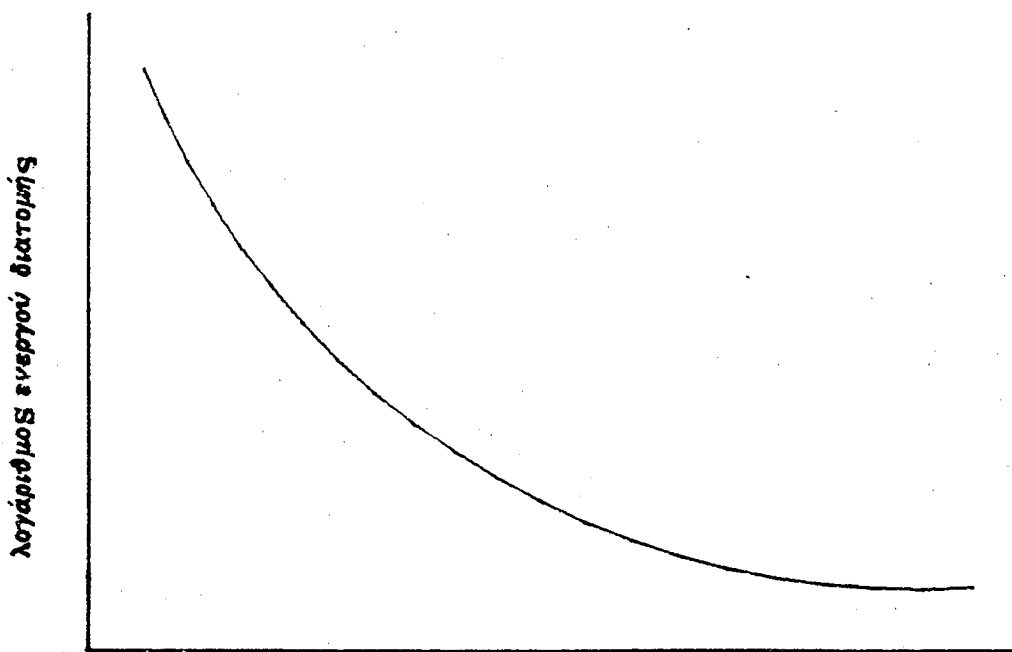
$$f = \frac{A}{2\pi R^2 \sin\theta d\theta} \quad (1.11)$$

και αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (1.8) και (1.9), παίρνουμε την σχέση (1.12)

$$\Delta n = \frac{z^2 e^4 NnA}{(64\pi^2 \epsilon_0^2) R^2 E_x^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (1.12)$$

Τα R και θ ορίζονται στο Σχ.1.3, N είναι ο αριθμός των πυρήνων ανά μονάδα επιφάνειας στο φύλλο του στόχου, και n ο

ολικός αριθμός των προσπιπώντων σωματιδίων a με κινητική ενέργεια E_x . Στο Σχ.1.4 συγκρίνονται τα δεδομένα για το αργυρό με τη θεωρητική πρόβλεψη. Έχει χρησιμοποιηθεί λογαριθμική κλίμακα λόγω της εξαιρετικά μεγάλης περιοχής που καλύ-



Σχήμα 1.4.: Γραφική παράσταση του λογάριθμου της ενεργού διατομής της σκέδασης Rutherford.

πτουν οι τιμές του Δn . Όλες οι παράμετροι στο δεξιό σκέλος της σχέσης 1.12 είναι δυνατόν να προκύψουν άμεσα από το πείραμα εκτός της παραμέτρου Z . Το Z μπορεί να θεωρηθεί σαν ελεύθερη παράμετρος σε μια διαδικασία προσαρμογής πειραματικών δεδομένων και θεωρητικών προβλέψεων. Έτσι αν θεωρήσουμε πχ. δύο θεωρητικές προβλέψεις για $Z=70$ και $Z=47$ παρατηρούμε ότι η πρώτη πρόβλεψη αποκλίνει από τα πειραματικά δεδομένα, ενώ η δεύτερη έχει μια πολύ ικανοποιητική συμφωνία. Η σύγκρι-

ση αυτή μπορεί να γίνει με την διαδικασία αυτή με την προϋπόθεση ότι η απόδοση του απαριθμητή είναι 100%. Στην αντίθετη περίπτωση που είναι και η πιο συνηθισμένη στην πράξη ο αριθμός Δn πρέπει να πολλαπλασιασθεί επί ένα συντελεστή βάρους μεγαλύτερο της μονάδας ο οποίος ισούται με το αντίστροφο της απόδοσης του απαριθμητή.

Το πείραμα μπορεί να επαναληφθεί για διαφορετική τιμή της κινητικής ενέργειας E_k των σωματιδίων της δέσμης και να ελεγχθεί η συμφωνία πειράματος και θεωρίας. Βρίσκεται ότι η συμφωνία πειράματος και θεωρίας είναι εξαιρετικά καλή ως τιμές του E_k για τις οποίες η απόσταση μεγίστης προσέγγισης μεταξύ προσπίπτοντος σωματιδίου της δέσμης και του σκεδάζοντος σωματιδίου του στόχου είναι περίπου 1 ως $2 \times 10^{-14} \text{ m}$. Τούτο σημαίνει ότι η ακτίνα του πυρήνα δεν μπορεί να υπερβαίνει την απόσταση $2 \times 10^{-14} \text{ m}$, δηλαδή μια απόσταση που είναι πάρα πολύ μικρότερη από την ακτίνα του ατόμου (περίπου 10^{-10} m). Έτσι από την σκοπιά της ατομικής φυσικής ο πυρήνας του ατόμου μπορεί να θεωρείται σαν σημείο.

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Άλλος τρόπος εξαγωγής της σχέσης (1.5) της Σκέδασης Rutherford.

Από το Σχήμα έστω s η απόσταση του πυρήνα Π από την ασύμπτωτη της υπερβολής που θα περιγραφόταν από το σωματίδιο a αν δεν υπήρχε το απωστικό πεδίο. Επί πλέον αν η απόσταση του πυρήνα Π από την κορυφή της υπερβολής είναι q , τότε $q = \epsilon(1 + \cos\theta)$, όπου ϵ η εκκεντρότητα.

Από το σχήμα φαίνεται $\epsilon = b/\sin\theta$, άρα $q = \frac{b(1 + \cos\theta)}{\sin\theta} = b \cot \frac{\theta}{2}$.
 b είναι ίσο με το μήκος του μικρού ημιάξονα της υπερβολής.

Τώρα από τη διατήρηση της ενέργειας, αν u η ταχύτητα στο άπειρο, $\frac{1}{2} Mu^2 = \frac{1}{2} Mu_0^2 + \frac{ze_1 e_2}{q}$.

Βάζοντας $K = ze_1 e_2 / Mu^2$, και διαιρώντας δια $\frac{1}{2} Mu^2$ παίρνουμε

$$\frac{u_0^2}{u^2} = 1 - \frac{2k}{b} \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \quad (1)$$

Λόγω όμως του θεωρήματος διατήρησης της στροφορμής $Mub = Mu_0 \rho$.

$$\frac{u_0}{u} = \frac{b}{\rho} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{u_0}{u}\right)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) και μετά μερικούς μετασχηματισμούς προκύπτει

$$\frac{b}{k} = \tan\theta \quad \text{ή επειδή} \quad \varphi = \pi - 2\theta$$

$$b = k \cot \frac{\varphi}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

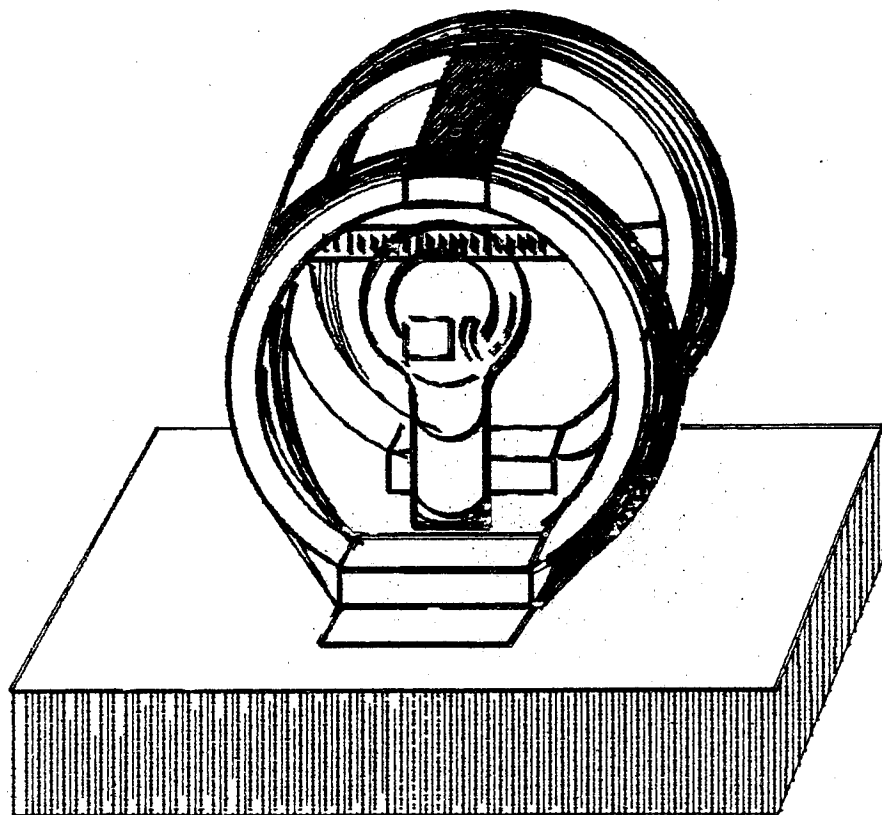
Μελετήστε την Εργαστηριακή-Εκπαιδευτική συσκευή για την μελέτη της σκέδασης Rutherford. Σκεφθείτε τα διάφορα χαρακτηριστικά της διάταξης αυτής, και σχολιάστε τις αδυναμίες για την καταγραφή της ενεργού διατομής σκέδασης. Τι τροποποιήσεις χρειάζονται για βελτίωση της;

1.3.1. Προσδιορισμός χαρακτηριστικών παραμέτρων ατόμου - Ο λόγος της μάζας προς το φορτίο του ηλεκτρονίου

Γύρω στο τέλος του 19ου αιώνα συνέβησαν αρκετά γεγονότα που άλλαξαν δραματικά την άποψη που έχουμε για τη δομή

και την φύση της ύλης. Δύο από τα γεγονότα έχουν να κάνουν με την μέτρηση του λόγου e/m του ηλεκτρονίου (J.J. Thomson 1887) και μερικά χρόνια αργότερα από τον R.A. Millikan, ο οποίος ανέλυσε τον λόγο αυτό, καταφέροντας να μετρήσει το ηλεκτρικό φορτίο ενός μεμονωμένου ηλεκτρονίου. Αυτές οι σημαντικότερες μετρήσεις συνέβαλαν στην διατύπωση από τον Thomson της υπόθεσης για την ύπαρξη του ηλεκτρονίου και έτσι οδήγησε στην βασική κατανόηση του πρώτου ατομικού σωματιδίου.

Κάνουμε παρακάτω μια σύντομη περιγραφή του πειράματος του J.J. Thomson. Σε σύγχρονη μορφή, το πείραμα αυτό περιγράφεται από την πειραματική διάταξη της εταιρίας Ealing, όπως την περιγράφουμε παρακάτω (βλ. Σχήμα 1.3.1.).



Σχήμα 1.3.1.: Πειραματική διάταξη για μέτρηση του λόγου e/m του ηλεκτρονίου (Ealing Co).

Με την βοήθεια θερμιονικής εκπομπής, δηλαδή θέρμανσης ενός μεταλλικού ηλεκτροδίου εκπέμπονται ηλεκτρόνια μέσα σε ένα σωλήνα που η πίεση είναι πρακτικά μηδέν. Τα εκπεμπόμενα ηλεκτρόνια επιταχύνονται μέσα από μια διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο ηλεκτρόδια; της καθόδου που εκπέμπει τα ηλεκτρόνια και της ανόδου της οποίας το δυναμικό μπορούμε να μεταβάλλουμε κατά βούληση. Η παραγόμενη ηλεκτρονική δέσμη αποκλί- νει με τη βοήθεια ενός μαγνητικού πεδίου το οποίο παράγεται με τη βοήθεια δύο σωληνοειδών τύπου Helmholtz.

Η δύναμη που συνολικά ασκείται σε καθένα ηλεκτρόνιο δίνε- νεται από την έκφραση της δύναμης Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.3.1)$$

όπου q είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου, v η ταχύτητά του, ενώ E και B είναι το ηλεκτρικό πεδίο και η μαγνητική επαγωγή αντίστοιχα. Όταν το διάνυσμα της ταχύτητας είναι κάθετο προς το μαγνητικό πεδίο (δηλαδή η κατεύθυνση της ηλεκτρονικής δέ- σμης είναι κάθετη προς το μαγνητικό πεδίο), τότε το ηλεκτρό- νιο διαγράφει μια κυκλική τροχιά. Σε μια κατάσταση δυναμικής ισορροπίας η κεντρομόλος δύναμη ισούται με τη δύναμη της μα- γνητικής αλληλεπίδρασης:

$$evB = mv^2 / r \quad (1.3.2)$$

όπου r η ακτίνα της τροχιάς του καθενός ηλεκτρονίου της δέ- σμης.

Στο πείραμα αυτό η ταχύτητα v που αποκτά το ηλεκτρόνιο οφείλεται στη παρουσία της διαφοράς δυναμικού V , και έτσι ι- κανοποιεί τη σχέση:

$$eV = mv^2 / 2 \quad (1.3.3)$$

Από τις σχέσεις (1.3.2) και (1.3.3) προκύπτει:

$$e/m = \frac{2V}{r^2 B^2} \quad (1.3.4)$$

Μετρούμε βάσει της παραπάνω σχέσης την ακτίνα r , κοιτώντας ώστε να συμπίπτει σε μια ευθεία η τροχιά, το είδωλο και η ένδειξη ενός βαθμολογημένου χάρακα. Έχοντας μετρήσει και τα V και έχοντας προσδιορίσει το B από το ρεύμα που διαρρέει τα πηνία Helmholtz, μπορούμε να προσδιορίσουμε τον λόγο e/m .

Η τιμή του e μπορεί να προκύψει με διαφόρους μεθόδους, όπως πχ. το περίφημο πείραμα του Millikan.

1.3.2. Κίνηση σε ηλεκτρικό πεδίο-Οπτική Ηλεκτρονίων

Για την κατανόηση της μεθόδου μέτρησης του λόγου e/m είναι σκόπιμο να παρουσιασθεί σύντομα μια εισαγωγή στην κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε συνδυασμένο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο.

Η εξίσωση κίνησης φορτισμένου σωματιδίου σε συνδυασμένο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο δίνεται από τον τύπο

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (1.3.5)$$

Ας γράψουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας για ένα σωματίδιο που κινείται μέσα στο πεδίο αυτό. Επειδή η δύναμη του μαγνητικού πεδίου είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα, δεν παράγεται έργο από τη δύναμη αυτή. Συνεπώς μόνο το ηλεκτρικό πεδίο αλλάζει την κινητική ενέργεια του φορτισμένου σωματιδίου. Για ένα φορτισμένο σωματίδιο που ξεκινά από ηρεμία, και αποκτά μια ταχύτητα u θα ισχύει η σχέση:

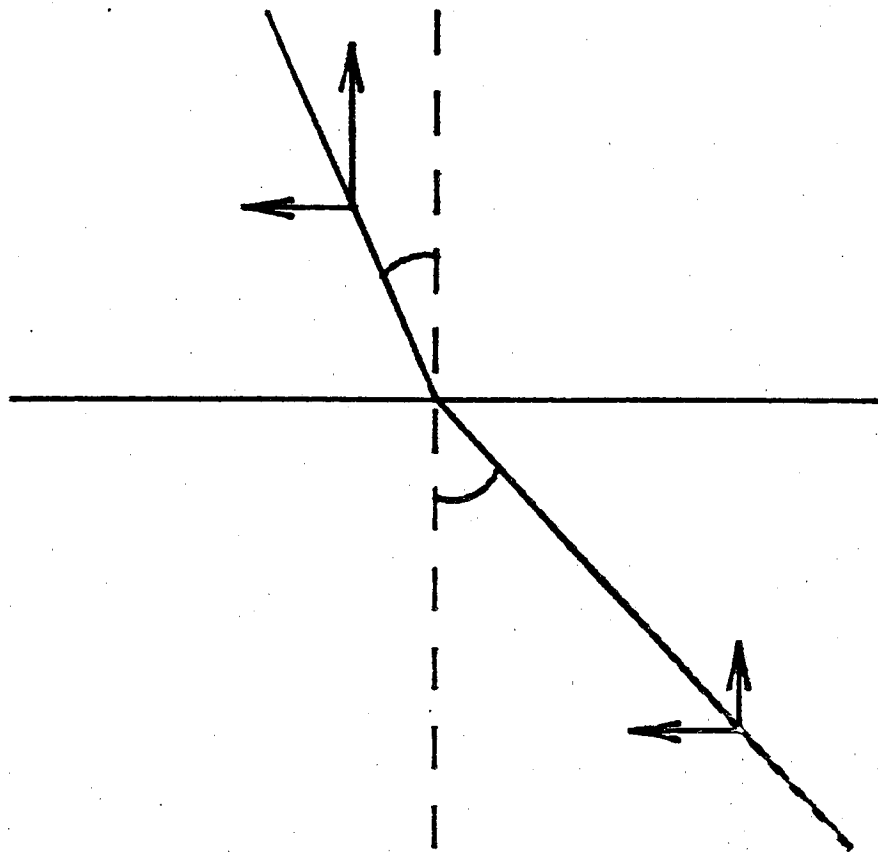
$$\frac{mu^2}{2} = q(U_1 - U_2) \quad (1.3.6)$$

δηλαδή η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ισούται με την μεταβολή της δυναμικής λόγω της μετάβασης μεταξύ δύο σημείων με ηλεκτρικό δυναμικό U_1 και U_2 .

Η κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ανομοιογενές αλλά χρονικά σταθερό ηλεκτρικό πεδίο παρουσιάζει αναλογία με τη διάδοση ακτίνων μέσα από διαφανή διηλεκτρικά με μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης.

Ένα απλό παράδειγμα της παραπάνω αναλογίας παρουσιάζε -

ται παρακάτω. Στο Σχήμα 1.3.2 έχουμε μια μεταβολή δυναμικού από U_1 σε U_2 . Τέτοια μεταβολή δυναμικού είναι αδύνατη ή δύσκολη να γίνει στην πράξη. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να προ-



Σχήμα 1.3.2.: Μεταβολή του δυναμικού σε ένα ηλεκτρικό πεδίο στο οποίο θέλουμε να μελετήσουμε την εκτροπή της πορείας ενός φορτισμένου σωματιδίου.

σεγγισθεί με δύο εξαιρετικά λεπτά μεταλλικά φύλλα σε μικρή απόσταση, φορτισμένα σε κατάλληλα δυναμικά και διαφανές στα σωματίδια που θεωρούμε. Η δύναμη που ασκείται στο διαχωρι-

στικό όριο μεταξύ των δύο μέσων είναι κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια. Έτσι έχουμε μια μεταβολή της συνιστώσας της ταχύτητας V_n που είναι κάθετη προς τη διαχωριστική επιφάνεια.

Έτσι η εφαπτομένη συνιστώσα της ταχύτητας παραμένει αναλλοίωτη $u_t = u_t'$ ή όπως φαίνεται από το σχήμα

$$u_1 \sin \alpha = u_2 \sin \beta \quad (1.3.7)$$

Οι γωνίες α και β δείχνουν την αναλογία με την διάδοση φωτός στην οπτική (Νόμος του Snell). Αυτή η αναλογία φαίνεται καλύτερα αν γράψουμε τη σχέση 1.3.7 υπό τη μορφή

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{u_2}{u_1} \quad (1.3.8)$$

Αν υποθέσουμε ότι, όπως συμβαίνει συνήθως, η ταχύτητα του σωματιδίου προσδιορίζεται από το δυναμικό σε κάθε δεδομένο σημείο, μπορούμε να γράψουμε την 1.3.8 υπό τη μορφή

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{U_2/U_1} \quad (1.3.9)$$

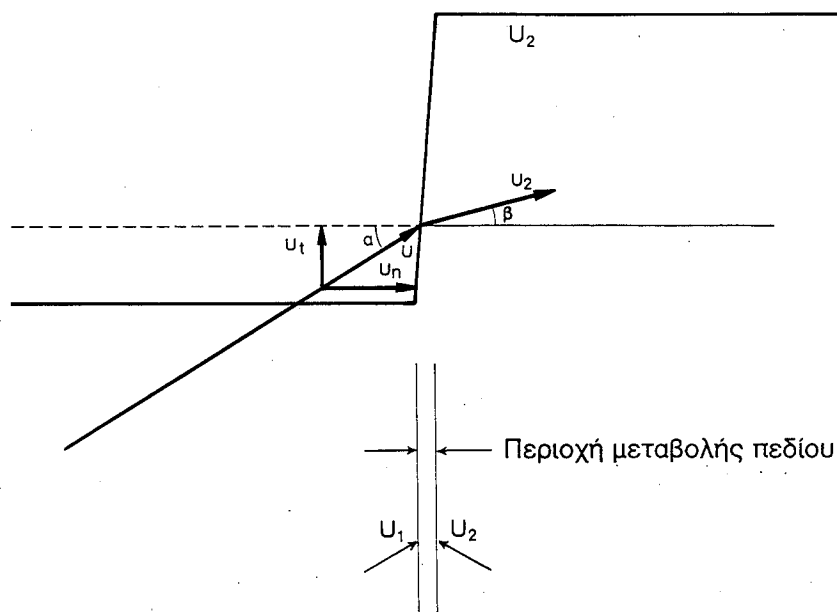
Έτσι έχουμε την αναλογία:

Δείκτης διάπλασης (n) ατετρ.ρίζα δυναμικού (\sqrt{V})

Η μορφή της τροχιάς λόγω του "βήματος δυναμικού" φαίνεται στο Σχήμα 1.3.3.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να επεκταθεί εύκολα σε περίπτωση αυθαίρετης μορφής ηλεκτροστατικό πεδίο, αν διαιρέσουμε το χώρο σε πεπερασμένα τμήματα γνωστού δυναμικού και εκεί εφαρμόσουμε γραφική μέθοδο η οποία είναι προσεγγιστική.

Αν το αρχικό διάνυσμα της ταχύτητας δεν σχηματίζει ορθή γωνία με το μαγνητικό πεδίο, τότε σε απουσία ηλεκτρικού πεδίου εκτελεί εν γένει μια ελικοειδή τροχιά.



Σχήμα 1.3.3.

1.3.3. Φασματοσκοπία μαζών

Οι τεχνικές προσδιορισμού του λόγου e/m του ηλεκτρονίου δεν περιορίζονται απλά στην επανάληψη ενός ιστορικού πειράματος αλλά μας δίνουν μια πρώτη γεύση του πως μπορούμε σε ένα σύγχρονο ερευνητικό εργαστήριο να προσδιορίζουμε την ταυτότητα (αν βρούμε την μάζα του) ενός ιόντος υπό την προϋπόθεση ότι μπορούμε να μετρήσουμε με άλλη μέθοδο το φορτίο του. Επιπλέον αν γίνουν κατάλληλες μετρήσεις με αρκετή ακρίβεια, μπορούμε επίσης να προσδιορίσουμε την ενέργεια του πυρήνα αυτού του ατόμου.

Στο Σχ.1.3.4 φαίνεται μία από τις πρώτες διατάξεις που χρησιμοποιήθηκαν σαν φασματοόμετρα μάζας, αυτή δηλαδή του Αμερι-

κανού A.J. Dempster. Μια δέσμη ιόντων με μικρή γωνιακή απόκλιση επιταχύνεται από μια διαφορά δυναμικού και στη συνέχεια διασχίζει ένα κάθετο προς την κίνηση μαγνητικό πεδίο. Η δέσμη των ιόντων εστιάζεται πάλι αφού "περιστραφεί" κατά 180° .

Η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς των ιόντων στο μαγνητικό πεδίο μπορεί ναδειχθεί ότι ισούται με

$$\rho = \frac{Mv}{qB} \quad (1.3.10)$$

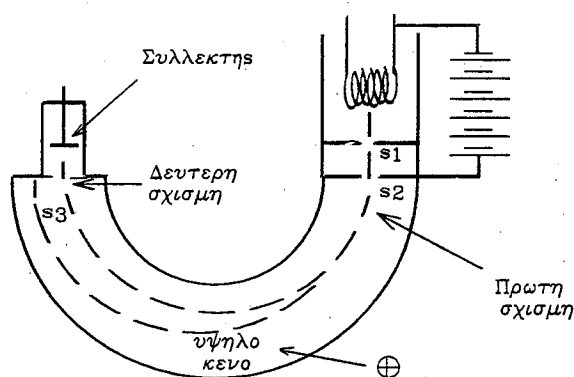
Αφού όμως όλα τα ιόντα διασχίζουν μια διαφορά δυναμικού U , θα είναι:

$$\frac{Mv^2}{2} = qU \quad (1.3.11)$$

και συνεπώς:

$$\lambda = 2\rho = 2c \sqrt{\frac{2U}{q}} \cdot \frac{\sqrt{M}}{B} \quad (1.3.12)$$

Η εξίσωση αυτή προσδιορίζει το σημείο εστίασης των ιόντων για διάφορες μάζες. Έτσι στο Σχ. 1.3.4 η δέσμη των ιόντων φαίνεται να αποτελείται από δύο διαφορετικά είδη μαζών.



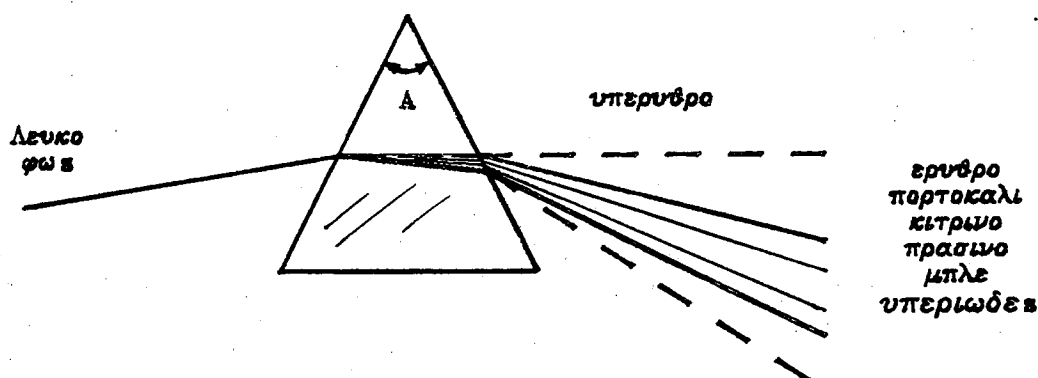
Σχήμα 1.3.4.: Σχηματική περιγραφή του φασματογράφου μάζας Dempster. 1. Πηγή ιόντων. 2. Τμήμα επιτάχυνσης μεταξύ των σχισμών S_1 και S_2 . 3. Περιοχή ανάλυσης με τη βοήθεια μαγνητικού πεδίου κάθετου προς το χάρτη. 4. Συλλέκτης ιόντων, S_3 : Σχισμή εισόδου για τον συλλέκτη ιόντων.

1.3.4. Ηλεκτρονική δομή των ατόμων και πρώτοι προβληματισμοί για την ισχύ της κλασικής θεωρίας για το άτομο.

Στα επόμενα εδάφια θα μελετήσουμε τη λεπτομερή δομή του ατόμου. Θα ξεκινήσουμε με την παρατήρηση που έκανε ο Ράδερφορντ σκέδασης σωματιδίων άλφα (πυρήνων Ηλίου), η οποία οδήγησε στην εικόνα ότι ένα άτομο αποτελείται από ένα μικρό πυρήνα που περιβάλλεται από ηλεκτρόνια. Το φαινόμενο σκέδασης σωματιδίων άλφα μελετήθηκε ήδη αναλυτικά. Ωστόσο εδώ θα συνεχίσουμε την διερεύνηση του πυρήνα μόνο όσο χρειάζεται για να κατανοήσουμε τα φάσματα ατόμων, τον περιοδικό πίνακα των στοιχείων και τη διατύπωση των συνθηκών του Bohr.

Φάσμα του Ατόμου του Υδρογόνου-Συνθήκες του Bohr

Η ιστορική ανασκόπηση του πως εξελίχθηκε η γνώση των ακτινοβολιών που εκπέμπουν τα άτομα παρουσιάζει αρκετό ενδιαφέρον. Πρώτος που κατάφερε να μας δώσει τις πρώτες φασματικές πληροφορίες ήταν ο Νεύτων με τη γνωστή σε όλους ανάλυση του λευκού φωτός, το 1666, χρησιμοποιώντας διαφανή πρίσματα, όπως συμβαίνει στο Σχήμα 1.3.5. Η ανακάλυψη του υπέρυθρου και υπεριώδους που είναι οι άορατες ακτινοβολίες έγινε αργότερα



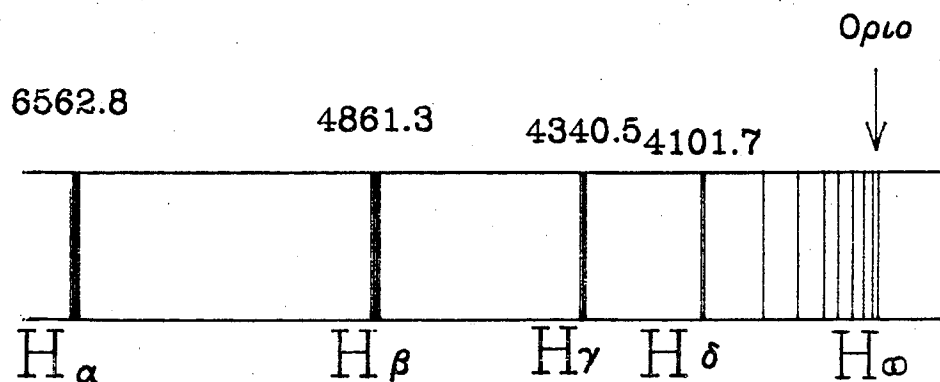
Σχήμα 1.3.5.: Ανάλυση Λευκού φωτός από πρίσμα χαλαζία διαπερατού στο υπέρυθρο και υπεριώδες.

περί το 1800. Ο Fraunhofer (1984) ανακάλυψε στο ηλιακό φάσμα μία σειρά από μεγάλο αριθμό στενών μαύρων γραμμών πάνω σε φωτεινό έγχρωμο υπόστρωμα. Ωστόσο οι Kirchhoff και Bunsen προ-

χώρησαν ακόμη περισσότερο (1859) και ανακάλυψαν ότι κάθε συγκεκριμένη φασματική γραμμή που καθορίζεται πειραματικά από το μήκος κύματος ή τη συχνότητα είναι χαρακτηριστική ενός τύπου ατόμων, ενός δηλαδή ατομικού στοιχείου. Σαν χαρακτηριστικό παράδειγμα έχουμε ένα πολύ γνωστό ζεύγος κίτρινων γραμμών, γνωστές σαν γραμμή D του Νατρίου στα 5,890 και 5,896 Αγγστρομς. Αυτές πάντοτε υποδηλώνουν παρουσία Νατρίου. Οι ίδιοι δύο ερευνητές βρήκαν ότι ορισμένες γραμμές φασματικές που διαπιστώνονται από απορρόφηση, όπως π.χ. μαύρες γραμμές στο ηλιακό φάσμα, συμπίπτουν ακριβώς σε μήκη κύματος με άλλες γνωστές γραμμές εκπομπής. Έτσι τόσο οι γραμμές εκπομπής, όσο και απορρόφησης χρησιμεύουν για ταυτοποίηση ενός ατόμου. Έτσι οι Βούνσεν και Κιρκχωφ κατάφεραν να αναγνωρίσουν πολλές από τις γραμμές Fraunhofer αντιστοιχώντας τις ακριβώς με άλλες γραμμές γνωστών ατόμων που παρατήρησαν στο εργαστήριο. Τούτο αποτελεί και τη βάση της αστροφυσικής, η ανίχνευση και συμπεριφορά διαφόρων στοιχείων σε αστρικές η ενδοαστρικές αμόσφαιρες.

Ας δούμε όμως πως από τα φάσματα των ατόμων προέκυψαν πληροφορίες για τη συμπεριφορά και τη νομοτέλεια που χαρακτηρίζει τα άτομα. Το πρώτο στοιχείο που αναζητήθηκε από τους πρώτους μελετητές των φασμάτων είναι η αναζήτηση κάποιου είδους κανονικότητας που παρουσιάζουν τα ατομικά φάσματα. Πράγματι, ας δούμε τι βρήκε ο πρώτος ερευνητής, Balmer, που μελέτησε στην ορατή περιοχή το φάσμα του ατόμου του υδρογόνου όπως προκύπτει από ηλεκτρική εκκένωση διαμέσου υδρογόνου. Η ανάλυση του φάσματος γίνεται με φασματογράφο που μπορεί να είναι συνδυασμός ενός πρίσματος και φωτογραφικής πλάκας. Όταν λοιπόν παρατηρούμε ηλεκτρική εκκένωση διαμέσου υδρογόνου προκύπτει ένα φάσμα που είναι αρκετά πολύπλοκο και μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη: Μια πολύ κανονική σειρά από λαμπρές γραμμές που υπερτίθεται σε ένα είδος υποστρώματος στο οποίο όμως μπορεί να διακρίνει κανείς πάρα πολλές ασθενέστερες γραμμές. Είναι εύλογο να αποδώσει κανείς τις λαμπερές αραιότερες γραμμές σε άτομα, ενώ τις πιο αδύνατες και πολύ πυκνότερες γραμμές σε μόρια υδρογόνου. Αυτή η εξήγηση δίνεται επειδή τα

άτομα ως απλούστερα αναμένεται να δώσουν το απλούστερο μέρος του φάσματος. Το υδρογόνο υπό κανονικές συνθήκες βρίσκεται υπό μοριακή μορφή. Όταν όμως έχουμε ηλεκτρική εκκένωση αρκετά από τα μόρια υδρογόνου μπορεί να υποθέσει κανείς ότι διασπώνται σε άτομα λόγω της πρόσθετης ενέργειας που παρέχεται από το ηλεκτρικό ρεύμα. Τούτο φαίνεται να επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι όταν αυξάνεται το ρεύμα της εκκένωσης, οι λαμπερές αραιές γραμμές του φάσματος ενισχύονται σε ένταση εις βάρος των πυκνοτέρων γραμμών που τις αποδίδουμε σε μόρια υδρογόνου. Θα ασχοληθούμε για την ώρα μόνο για τις γραμμές που αφορούν άτομα υδρογόνου. Ένα τέτοιο φάσμα όπου οι συνθήκες ρεύματος και χρόνου έκθεσης του φωτογραφικού φιλμ ευνοούν μόνο την εμφάνιση ατομικών γραμμών φαίνεται στο Σχήμα 1.3.6.



Σχήμα 1.3.6.: Σειρά Balmer ατομικού υδρογόνου από ηλεκτρική εκκένωση. Το Η παριστάνει το υπολογιζόμενο Όριο της σειράς. (Atomic structure and atomic spectra, G. Hertzberg, Dover publications, 1944).

Το ορατό μέρος της ακτινοβολίας του ατομικού φάσματος του υδρογόνου αποτελείται από τέσσερις γραμμές, αλλά η φωτογραφική ανάλυση του φάσματος στην εγγύς υπεριώδη περιοχή δείχνει ότι εκείνες οι τέσσερις γραμμές ακολουθούνται από πολύ περισσότερες γραμμές, που όλες συγκλίνουν προς ένα όριο, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Η πρώτη γραμμή της σειράς αυτής, ονομαζόμενη H_α, και έχει μήκος κύματος στο κενό 6,562.80 Angstroms.

Το σημαντικό βήμα που έγινε από τον Balmer για την ανά-

λυση της σειράς αυτής είναι ότι μπόρεσε να περιγράψει τα πειραματικά δεδομένα για τις τιμές των συχνοτήτων της σειράς με τον τύπο:

$$\nu = cR \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n=3,4,5,\dots$$

Εδώ το ν είναι η συχνότητα σε sec^{-1} , c είναι η ταχύτητα του φωτός. Για $n=3$, ο τύπος δίνει την πρώτη (ερυθρή) γραμμή του φάσματος της σειράς, για $n=4$, παίρνουμε τη δεύτερη γραμμή, κλπ. Τελικά, καθώς το n τείνει στο άπειρο, το όριο της σειράς $\nu_c = cR/4$. Το R είναι μια σταθερά που υπολογίζεται έτσι ώστε ο τύπος να αναπαριστά σωστά τις παρατηρούμενες συχνότητες και λέγεται σταθερά του Rydberg, από το όνομα διακεκριμένου Σουηδού φασματοσκόπου. Η αριθμητική του τιμή είναι:

$$R = 109,677.58 \text{ cm}^{-1}$$

Στο βαθύ υπεριώδες ο Lyman (1906) ανάκαλυψε μία παρόμοια σειρά με πρώτη της γραμμή στα 1,215.7 Angstroms. Ο Lyman μπόρεσε να περιγράψει εμπειρικά με έναν όμοιο τύπο:

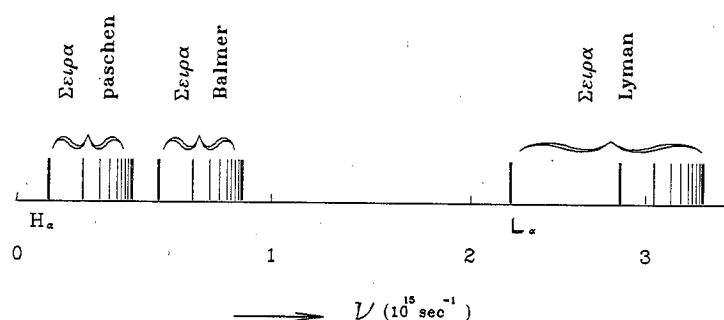
$$\nu = cR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad , n=2,3,4,\dots$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει στη συχνότητα $\nu_c = cR$. Η θεωρητική σημασία της σειράς του Lyman που θα εκδηλωθεί αργότερα στη θεωρία του Bohr δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό της σαν πρότυπη σειρά για όλες τις φασματικές γραμμές. Αργότερα βρέθηκε και άλλη ανάλογη σειρά στο υπέρυθρο (γραμμή Paschen). Όλες αυτές οι σειρές παριστάνονται από έναν κοινό τύπο:

$$\nu_{\text{πειραμ}} = cR \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

όπου "πειραμ" σημαίνει παρατηρούμενες πειραματικά συχνότητες που θα συγκριθούν αργότερα με τη θεωρία. Ο τύπος δίνει τη σειρά Lyman για $n_1=1$, και $n_2=2,3,4,\dots$ Η σειρά Balmer

λαμβάνεται για $n''=2$ και $n'=3,4,5\dots$. Μερικές τέτοιες σειρές φαίνονται παραστατικά στο Σχήμα 1.3.7.



Σχήμα 1.3.7.: Σχηματική παράσταση διαφόρων "σειρών" φασματικών γραμμών στο άτομο του Υδρογόνου.

1.3.7. Γραμμικά Φάσματα Πυρήνων

Αν τα άτομα είναι κβαντικά συστήματα, και μια τυπική εκδήλωση του γεγονότος αυτού είναι η εκπομπή φασματικών γραμμών, τότε αναμένεται ότι, όταν οι πυρήνες διεγείρονται θα πρέπει να εκπέμπουν αντίστοιχα γραμμικά φάσματα.

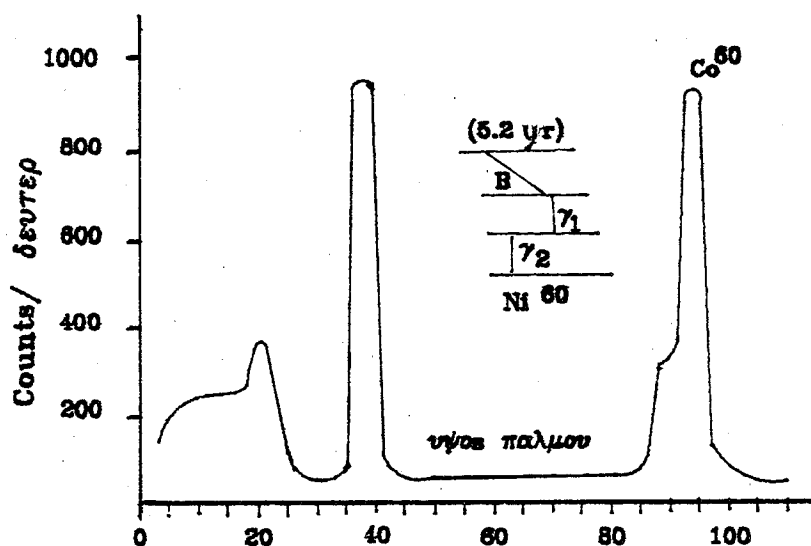
Επειδή η ακτίνα των πυρήνων είναι μερικές τάξεις μεγέθους μικρότερη της ακτίνας του ατόμου (τυπικά της τάξης του ενός Fermi, δηλαδή 10^{-13} m), τότε οι δυνάμεις που συγκρατούν τον πυρήνα σαν ένα δέσμιο σύστημα (πέρα τις απωστικές δυνάμεις οφειλόμενες στα θετικά φορτία του πυρήνα), πρέπει να είναι αντίστοιχα ισχυρότερες από εκείνες που κρατούν δέσμια τα ατομικά ηλεκτρόνια στο άτομο. Έτσι κατά τις πυρηνικές μεταπτώσεις τα εκπεμπόμενα κβάντα θα είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερα από εκείνα των ατομικών μεταπτώσεων. Πράγματι, τα κβάντα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπονται από μεταπτώσεις πυρήνων είναι στην περιοχή των ακτίνων γάμμα, και έτσι χρειάζονται νέες τεχνικές για την καταμέτρηση τους αλλά πρώτιστα και για την ανίχνευσή τους.

Μια άλλη διαφορά είναι ο διαφορετικός χρόνος ζωής των πυρηνικών μεταπτώσεων. Με άλλα λόγια οι ατομικές μεταπτώσεις έχουν μεγαλύτερο ρυθμό (πιθανότητα της τάξης του $10^8/$

sec), ενώ μερικές πυρηνικές μεταπτώσεις έχουν μικρή πιθανότητα (π.χ. 10^{-7} /sec), που αντιστοιχούν σε χρόνο ζωής της τάξης των 100 ημερών.

Εδώ δεν θα αναφερθούμε λεπτομερώς και στην εντελώς διαφορετικώς τύπου ακτινοβολίες πυρήνων, τύπου α και β.

Ένα φάσμα φωτονίων από ένα πυρήνα Co^{60} φαίνεται στο Σχήμα 1.3.8.



Σχήμα 1.3.8.: Φάσμα πηγής κοβαλτίου Co^{60} που παίρνουμε με απεριθμητή βασιζόμενο σε σπινθηριστή NaI και φωτοπολλαπλασιαστή. Παρατηρούμε δύο αιχμηρές κορυφές αντιστοιχούσες σε μεταπτώσεις μεταξύ διαφορετικών κβαντικών καταστάσεων.

Ο τρόπος που παίρνουμε τις αριθμήσεις (count/sec) είναι ο εξής: Χρησιμοποιούμε σαν απεριθμητή ένα κρύσταλλο NaI , πίσω από τον οποίο είναι τοποθετημένος ένας φωτοπολλαπλασιαστής. Μια ακτίνα γ μετατρέπεται, λόγω της απορρόφησης που υφίσταται στον κρύσταλλο NaI , σε ένα μεγάλο αριθμό φωτεινών κβάντων με γρήγορη απόκριση ($\sim 10^{-7}$ sec).

Ο αριθμός των κβάντων που εκπέμπει ο κρύσταλλος είναι ανάλογος προς την ενέργεια της ακτίνας γ . Εξ άλλου το μέγεθος του ηλεκτρικού παλμού που δίνει ο φωτοπολλαπλασιαστής είναι ανάλογο του αριθμού των κβάντα που πέφτουν πάνω του

σε μια ορισμένη χρονική διάρκεια που επιλέγουμε (πύλη). Η έναρξη της πύλης συχνά καθορίζεται από μια σκανδάλη που είναι η αρχική στιγμή ανόδου του παλμού. Προκύπτει ότι με καλή ακρίβεια το ύψος του παλμού που δίνει ο φωτοπολλαπλασιαστής είναι ανάλογο προς την ενέργεια της ακτίνας γ .

Χρησιμοποιώντας κάποια γραμμή γ γνωστής ενέργειας είναι δυνατόν να βαθμολογήσουμε το φασματόμετρο που μετράει ύψος παλμών. Έτσι παίρνει κανείς:

$$\text{Co}^{60} \rightarrow \gamma_1 = 1.200 \text{ Mev}$$

$$\gamma_2 = 1.320 \text{ Mev}$$

$$\text{Cs}^{137} \quad \gamma \rightarrow 0.663 \text{ Mev}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ενδείξεις κβαντικής συμπεριφοράς από την στατιστική της θερμικής ακτινοβολίας

2.1. Συστήματα από τεράστιο αριθμό σωματιδίων: Στατιστική Μηχανική

Η κλασσική μηχανική μπορεί να περιγράψει πλήρως τη χρονική εξέλιξη της κατάστασης ενός σωματιδίου ή ενός μικρού αριθμού σωματιδίων, π.χ. μικρότερο του 3, όταν γνωρίζουμε σε κάποια χρονική στιγμή t_0 τις θέσεις τους και τις ταχύτητες τους. Εάν ο αριθμός των σωματιδίων του συστήματος είναι μεγαλύτερος, τότε απαιτούνται αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων κίνησης και επομένως ηλεκτρονικοί υπολογιστές.

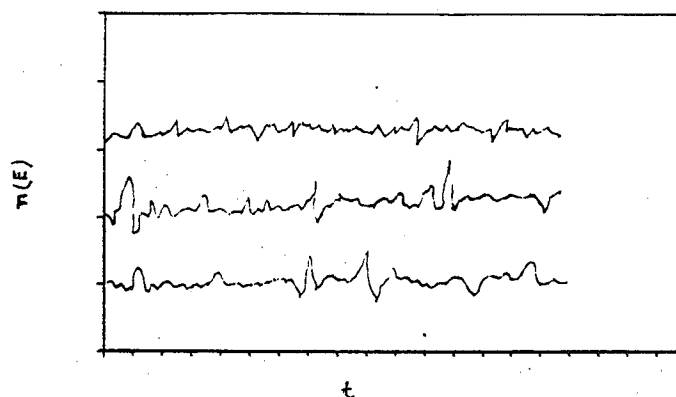
Έστω όμως ένα σύστημα σωματιδίων είναι μακροσκοπικό, δηλαδή αποτελείται από τεράστιο αριθμό σωματιδίων, όπως είναι παραδείγματος χάρη ένα σύστημα που αποτελείται από 10^{23} μόρια αερίου Υδρογόνου, δηλαδή ένα σύστημα μάζας της τάξης ενός γραμμομορίου υπό κανονικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας. Τότε προφανώς δεν είναι δυνατόν να λύσουμε ξεχωριστά τις εξισώσεις κίνησης του καθενός από τα σωματίδια (μόρια) του Υδρογόνου ακόμα και στην απίθανη περίπτωση που θα γνωρίζαμε τις αρχικές θέσεις και ταχύτητες του καθενός μορίου Υδρογόνου αυτού του συστήματος. Η αδυναμία αυτή υπάρχει και στην πράξη ακόμη και αν χρησιμοποιήσουμε τους μεγαλύτερους και ταχύτερους υπολογιστές που υπάρχουν σήμερα. Σκεφθείτε πόσο χαρτί εκτυπωτή Η/Υ θα χρειαζόμασταν για την παρουσίαση των πλήρων αποτελεσμάτων ακόμη και αν μπορούσαμε να τα υπολογίσουμε με τον Η/Υ;

Παρά την αδυναμία αυτή, της λεπτομερούς περιγραφής της κίνησης των μορίων ενός μακροσκοπικού συστήματος, τα συστήματα αυτά είχαν και έχουν τόσο μεγάλο ενδιαφέρον ώστε να ο-

δηγηθούν οι ερευνητές να βρουν άλλους τρόπους περιγραφής της κατάστασης των προσδιορίζοντας ένα σύνολο ποσοτήτων που χαρακτηρίζουν το κάθε σύστημα σαν σύνολο. Τέτοιες ποσότητες, για να αρχίσουμε από τις γνώριμες πρώτα, είναι η θερμοκρασία, η πίεση κλπ.

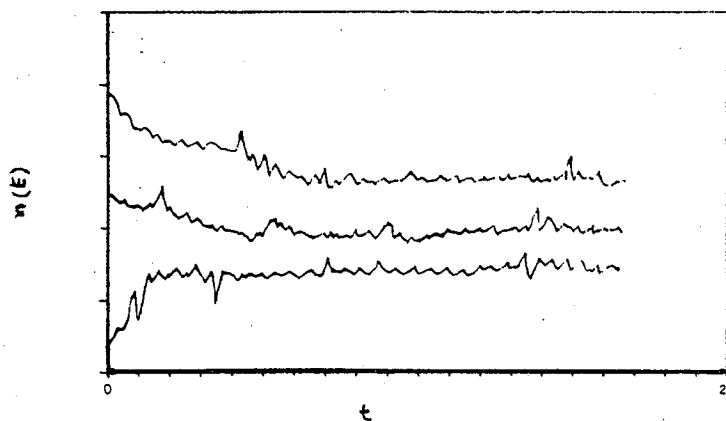
Το αντικείμενο της Στατιστικής Μηχανικής είναι η ανεύρεση και διατύπωση εκείνων των βασικών αρχών (υποθέσεων) που καθορίζουν τον πιο πιθανό τρόπο κατανομής των σωματιδίων του συστήματος στις διάφορες επιτρεπτές καταστάσεις έτσι ώστε με βάση τη γνώση (ή παραδοχή) να μπορούμε να προχωρούμε στον υπολογισμό αυτών των μακροσκοπικών ποσοτήτων του συστήματος, όπως πίεση, θερμοκρασία, κλπ. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων των υπολογισμών αυτών με τις πειραματικά μετρούμενες πιέσεις, θερμοκρασίες και άλλες ποσότητες, που θα δούμε στη συνέχεια επιτρέπει να ελέγξουμε την ορθότητα ή μη των βασικών υποθέσεων για τον τρόπο κατανομής των σωματιδίων του συστήματος στις διάφορες δυναμικές καταστάσεις.

Ο τρόπος αυτός δεν είναι τελείως στατικός. π.χ. ένα σωματίδιο του συστήματος μπορεί λόγω κάποιας αλληλεπίδρασης να φύγει από την κατάσταση που βρίσκεται και έτσι πρόσκαιρα να αλλάξει ανεπαίσθητα η κατανομή. Όμως αν το σύστημα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, τότε είναι πολύ πιθανό ένα άλλο σωματίδιο να καταλάβει σύντομα την δυναμική κατάσταση του αρχικού σωματιδίου. Επειδή λοιπόν η δυναμική κατάσταση συγκριμένων σωματιδίων μέσα στο σύστημα μπορεί να αλλάζει με τη πάροδο του χρόνου, χωρίς όμως να αλλάζει η στατιστική κατανομή, π.χ. των κινητικών ενεργειών των σωματιδίων, θα λέμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση κατανομής πιθανότητας ενός σωματιδίου του συστήματος να βρίσκεται σε συγκεκριμένη δυναμική κατάσταση. Πιο ακριβή ορισμό της κατανομής πιθανότητας θα δούμε παρακάτω. Στο Σχ. 2.1 φαίνεται πως μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου ο αριθμός των σωματιδίων $n(E)$ που έχουν ενέργεια στο διάστημα $(E, E+\delta E)$, για διαφορετικές τιμές της κινητικής ενέργειας E : E_1, E_2, E_3 κλπ., σε ένα σύστημα που βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία.



Σχήμα 2.1.: Ο αριθμός των σωματιδίων του συστήματος, για ένα σύστημα που βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία για διαφορετικές τιμές της ενέργειας (ακριβέστερα: στο διάστημα $E, E+\delta E$) E_1, E_2, E_3, \dots συναρτήσει του χρόνου.

Τα μακροσκοπικά συστήματα που θα μας απασχολήσουν είναι εκείνα που βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Έστω ένα σύστημα που βρίσκεται σε μια μεταβατική κατάσταση π.χ. ένα κλειστό δοχείο που περιέχει ένα αέριο που θερμάνθηκε απότομα σε ένα φούρνο επί 10 δευτερόλεπτα και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερο χωρίς να ανταλλάσει ενέργεια με κανένα τρόπο με το περιβάλλον (το μονώνουμε θερμικά). Τότε εμπειρικά γνωρίζουμε ότι μετά πάροδο αρκετού χρόνου το σύστημα θα φτάσει σε μια μόνιμη κατάσταση που θα χαρακτηρίζεται από την σταθερότητα της απόλυτης θερμοκρασίας και της πίεσης, ενώ μπορούμε να υποθέσουμε ότι τότε (στην κατάσταση δηλαδή της θερμοδυναμικής ισορροπίας) η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας των διάφορων π.χ. ενεργειακών καταστάσεων δεν θα μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Μια σχηματική απεικόνιση μιας βαθμιαίας εξέλιξης με τον χρόνο προς μια κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας φαίνεται στο Σχ.2.2.



Σχήμα 2.2.: Εξέλιξη του αριθμού των καταστάσεων σε κάθε στοιχειώδες διάστημα $(E, E+\delta E)$ για ένα σύστημα που το αφήνουμε να οδηγηθεί προς μια κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας.

2.2. Ο Νόμος κατανομής των Maxwell-Boltzman.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα μακροσκοπικό σύστημα του οποίου τα σωματίδια θα τα θεωρήσουμε ίδιου είδους αλλά διακεκριμένα. Αυτό σημαίνει το εξής: Όταν απαριθμούμε τις επιτρεπτές δυναμικές καταστάσεις που μπορεί να πάρει το μακροσκοπικό σύστημα που θεωρούμε, τότε η κατάσταση που προκύπτει από την εναλλαγή δύο σωματιδίων α και β , έτσι ώστε το σωματίδιο α να πάει στην δυναμική κατάσταση του β και αντίστροφα, θεωρείται διαφορετική από την αρχική. Αυτή η πρόταση δεν είναι αδιαφιλονίκητα σωστή σε οποιοδήποτε μακροσκοπικό σύστημα. Πχ. μια παρόμοια υπόθεση για την κατανομή των ηλεκτρονίων σε διάφορες καταστάσεις μέσα σε ένα μέταλλο οδηγεί σε υπολογισμούς που έρχονται σε φανερή αντίφαση με το πείραμα.

Περιοριζόμενοι λοιπόν σε συστήματα με σωματίδια ίδιου είδους αλλά διακεκριμένα μπορούμε να διατυπώσουμε τον νόμο της κατανομής Maxwell-Boltzman. Για τη διατύπωση, έστω ένα κλειστό σύστημα πολλών σωματιδίων, N το πλήθος. Με $n(E)\delta E$ παριστάνουμε τον αριθμό των σωματιδίων που έχουν ενέργειες στο διάστημα $(E, E+\delta E)$. Τότε ο συνολικός αριθμός N θα μπορεί προσεγγιστικά να προσδιοριστεί ως:

$$\int n(E)dE=N$$

Έστω δε T η απόλυτη θερμοκρασία του συστήματος. Ο νόμος της κατανομής Maxwell-Boltzmann δίνει τότε την πιθανότητα ένα σωματίδιο του συστήματος να έχει ενέργεια στο διάστημα $(E, E+\delta E)$. Αυτή η πιθανότητα δίνεται από την έκφραση:

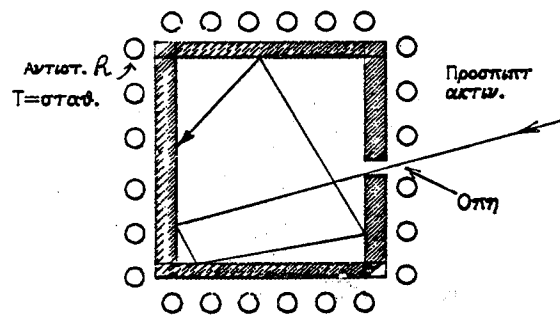
$$\frac{n(E)}{N} = \frac{1}{q} e^{-\beta E} \quad (2.1)$$

όπου $\beta=1/kT$, και $q = \int e^{-\beta E} dE$. Η σχέση (2.1) είναι πολύ σημαντική γιατί καθορίζει την πιο πιθανή κατανομή της ενέργειας μέσα στα σωματίδια ενός στατιστικού συνόλου. Έχει δε πολύ ευρεία εφαρμογή σε πολλές κατηγορίες συστημάτων όπως θα δούμε στις εφαρμογές.

2.3. Θερμική ακτινοβολία και η Αρχή της Κβαντικής Θεωρίας

Στην προσπάθεια να κατανοηθεί θεωρητικά το φαινόμενο της θερμικής ακτινοβολίας του μέλανος σώματος έγινε μια σύγκριση της αναμενόμενης με βάση τις προβλέψεις της κλασικής θεωρίας φασματικής κατανομής του μέλανος σώματος με την πειραματικά παρατηρούμενη κατανομή.

Μέλαν σώμα θεωρείται εκείνο που απορροφά πλήρως το σύνολο της προσπίπτουσας πάνω σε αυτό ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Μια πειραματική διάταξη για την πραγματοποίηση κατά προσέγγιση ενός μέλανος σώματος φαίνεται στο Σχ.2.3.



Σχήμα 2.3.: Συσκευή για την υλοποίηση κατά προσέγγιση μέλανος σώματος. Γύρω από την κοιλότητα υπάρχουν ρευματοφόροι αγωγού με την βοήθεια των οποίων επιτυγχάνουμε επιθυμητή θερμοκρασία T . Από την πορεία των ακτίνων φαίνεται ότι το μέλαν σώμα απορροφά πλήρως την προσπίπτουσα στην κοιλότητα ακτινοβολίας.

Η σύγκριση αυτή έδειξε πολύ μεγάλη ασυμφωνία μεταξύ θεωρίας και πειράματος. Τούτο οδήγησε τον M. Planck να αναθεωρήσει τις κλασσικές απόψεις και να υποθέσει ότι ένα σύστημα που εκτελεί απλές αρμονικές ταλαντώσεις μπορεί να έχει ενέργειες που είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας ορισμένης πεπερασμένης ενέργειας (1901). Έτσι γεννήθηκε η θεωρία των "κβάντα". Αργότερα μια νέα, αλλά σχετική όμως με το παραπάνω θέμα ιδέα διατυπώθηκε από τον Einstein (1905) προκειμένου να εξηγήσει τα πειραματικά δεδομένα του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Κάπως αργότερα ο Bohr προκειμένου να εξηγήσει τα γραμμικά φάσματα ατόμων διατύπωσε την θεωρία διατυπωμένη με βάση τις συνθήκες του Bohr" και είχε μεγάλη επιτυχία στην ερμηνεία των πολυπλόκων ατομικών φασμάτων (1913). Η εργασία των φυσικών αυτών μαζί με τις προόδους που συντελέστηκαν αργότερα από τους de Broglie, Schrodinger και Heisenberg έθεσε τα θεμέλια και τη μαθηματική διατύπωση αυτής της θεωρητικής ενότητας που σήμερα ονομάζεται κβαντική θεωρία. Η τεράστια πρόοδος όμως που συντελέσθηκε ως σήμερα δεν θα ήταν δυνατή χωρίς τη συμβολή του Rutherford ο οποίος με το πείραμα του, της σκέδασης σωματιδίων άλφα από φύλλα χρυσού, απέδειξε ότι το άτομο έχει θετικά φορτισμένο πυρήνα ενώ το αρνητικό φορτίο του ατόμου είναι τοποθετημένο στους εξωτερικούς φλοιούς. Εξίσου σημαντική όμως ήταν η εισαγωγή σε αυτό το πείραμα της μεθοδολογίας της σκέδασης η οποία αργότερα με την ανάπτυξη των επιταχυντών υπήρξε αποφασιστική για την πρόοδο της φυσικής.

Ας συζητήσουμε λοιπόν πρώτα την θερμική ακτινοβολία. Το θέμα είναι κατ' αρχήν εξαιρετικά πολύπλοκο διότι απαιτείται γνώση από διαφορετικά κεφάλαια της φυσικής όπως στατιστικής φυσικής ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας και θερμοδυναμικής. Παρόλα αυτά θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια συνοπτική περιγραφή του θέματος, επικαλούμενοι συχνά ποιοτικά επιχειρήματα, ή χρησιμοποιώντας θεωρητικά αποτελέσματα χωρίς απόδειξη. Ωστόσο θα παρουσιάσουμε με λεπτομέρεια τα βήματα με τα οποία ο Planck κατέληξε στην κβάντωση της ενέργειας ώστε να μπορέ -

σουμε να δούμε πως κατάφερε με την εργασία του να εξηγήσει ικανοποιητικά την θερμική ακτινοβολία του μέλανος σώματος.

2.4. Θεωρία των Rayleigh-Jeans

Η θεωρία αυτή ήταν μια πρώτη συστηματική προσπάθεια να εξηγηθεί η φασματική κατανομή του μέλανος σώματος καθώς και ο νόμος του Wien με βάση την λεπτομερειακή δομή, δηλαδή με βάση την συμπεριφορά των ατόμων ή μορίων του συστήματος που δίνει την θερμική ακτινοβολία. Στην προσπάθεια αυτή θεωρήθηκε ότι σε μια κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας στο μέλαν σώμα υπάρχει μια ακτινοβολία μέσα στην κοιλότητα του μέλανος σώματος. Αυτή οφείλεται στις επιταχύνσεις που δέχονται φορτία που βρίσκονται στη εσωτερική επιφάνεια της κοιλότητας, όπως είδαμε στο παράρτημα 1. Υπό την επίδραση ακτινοβολίας που δέχονται από την περιοχή της κοιλότητας εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις δεδομένου ότι το κάθε άτομο είναι υποχρεωμένο να κινείται γύρω από μια μέση θέση που κατέχει στο κρυσταλλικό πλέγμα. Τώρα στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπεται σε μια ορισμένη περιοχή συχνοτήτων $(\nu, \nu+d\nu)$ είναι ανάλογη με την μέση ενέργεια (ταλαντώσεως) των φορτίων για τον προφανή λόγο ότι υπάρχει μια συνεχής ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας που βρίσκεται μέσα στην κοιλότητα και των ταλαντευόμενων φορτίων. Έτσι η ενέργεια που θα προσλαμβάνει η κοιλότητα από τους ταλαντωτές θα είναι μεγάλη μόνο όταν η μέση ενέργεια των ταλαντωτών είναι επίσης μεγάλη και αντίστροφα. Έτσι από λεπτομερή μελέτη των συνθηκών ισορροπίας μέσα στην κοιλότητα οι Rayleigh-Jeans κατέληξαν στην ισότητα:

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi a^3 \nu^2 d\nu}{c^2} \quad (2.2)$$

όπου $N(\nu)d\nu$ είναι ο αριθμός των επιτρεπομένων συχνοτήτων σε ένα διάστημα συχνοτήτων $(\nu, \nu+d\nu)$, και a είναι η διάσταση

μιας κυβικής κοιλότητας. Ο περιορισμός στον αριθμό των επι-
τρεπομένων συχνότητων προκύπτει αν θεωρήσουμε ότι μέσα στην
κοιλότητα σχηματίζονται στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

2.5. Υπολογισμός της ενέργειας ανά διάστημα συχνοτήτων

Με βάση την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την
ενέργεια ανά cm^3 $\rho(\nu)d\nu$ στο φάσμα του μαύρου σώματος αν γνω-
ρίζουμε και την μέση ενέργεια ανά στάσιμο κύμα. Αυτή αν θεω-
ρήσουμε ότι η κατανομή της ενέργειας ακολουθεί την στατιστι-
κή Βολτςμαν ισούται με kT . Άρα προκύπτει:

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3} \quad (2.3)$$

Για τον πειραματικό έλεγχο της ορθότητας της παραπάνω
εξίσωσης μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε την κατανομή της ενεργ-
γειακής πυκνότητας σαν συνάρτηση του μήκους κύματος λ , δεδο-
μένου ότι τα πειράματα μετρούν ευκολότερα φασματικές κατανο-
μές συναρτήσεως του λ που μπορεί να μετρείται με μεγάλη ακρί-
βεια. Έτσι αν θυμηθούμε τη σχέση μεταξύ συχνότητας και μή-
κους κύματος:

$$\nu = c/\lambda \quad (2.4)$$

και την διαφορίσουμε, θα πάρουμε:

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda \quad (2.5)$$

Η σχέση (2.5) μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την μορφή
της συνάρτησης κατανομής της ενεργειακής πυκνότητας σαν συν-
άρτηση του μήκους κύματος $w(\lambda)$, που θα ορίζεται έτσι ώστε να
ικανοποιείται για τα αντίστοιχα διαστήματα $d\nu$ και $d\lambda$ η ισό-
τητα:

$$w(\lambda)d\lambda = \rho(\nu)d\nu \quad (2.6)$$

Η σχέση (2.3) λόγω της (2.5) γίνεται:

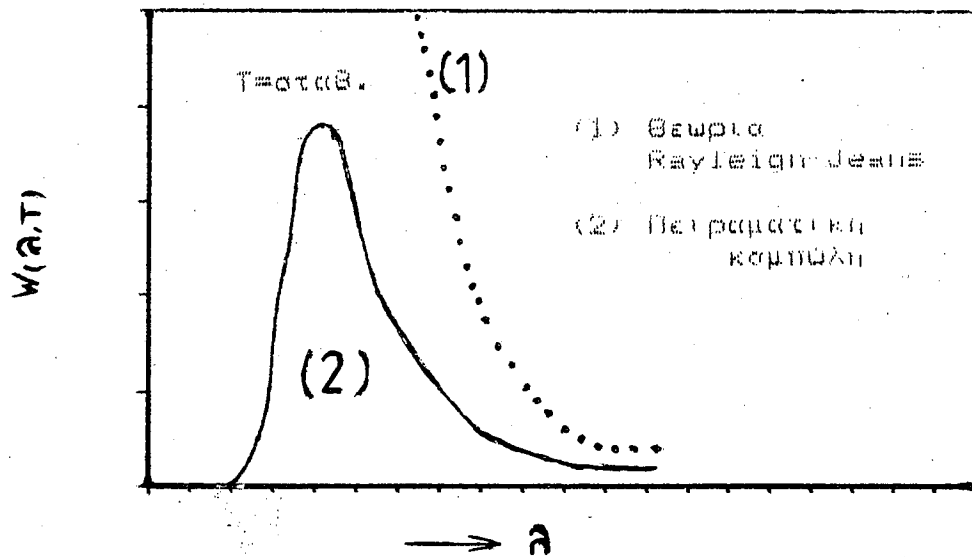
$$\rho(\nu)d\nu = -\rho(\nu)(c/\lambda^2)d\lambda$$

και λόγω της εξ.(2.2):

$$w(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi k}{\lambda^5} \lambda T d\lambda \quad (2.7)$$

Η σχέση (2.7) αποτελεί την φασματική κατανομή των Rayleigh-Jeans. Είναι τώρα δυνατόν να κάνουμε μια γραφική παράσταση της φασματικής αυτής κατανομής βάζοντας στον οριζόντιο άξονα το μήκος κύματος λ ενώ στον κατακόρυφο άξονα βάζουμε τις τιμές της συνάρτησης $w(T, \lambda)$.

Τα αποτελέσματα ενός τέτοιου υπολογισμού φαίνονται στο Σχ.2.4 στο οποίο έχουμε σχεδιάσει και τα πειραματικά σημεία.



Σχήμα 2.4.: Θεωρητική πρόβλεψη των Rayleigh-Jeans για την πυκνότητα ενέργειας στο μέλαν σώμα. Στο ίδιο σχήμα φαίνονται και τα πειραματικά αποτελέσματα.

Τόσο τα πείραμα όσο και η θεωρία αντιστοιχούν στην ίδια τιμή της απόλυτης θερμοκρασίας. Παρατηρούμε ότι η διαφωνία μεταξύ πειράματος και θεωρίας είναι ριζική ιδίως στις περιοχές των μικρών μήκων κύματος (ή μεγάλων συχνοτήτων). Αντίθετα στο όριο των μεγάλων μήκων κύματος βλέπουμε ότι η θεωρία πλησιάζει -

ζει τα πειραματικά αποτελέσματα. Η μη ρεαλιστική συμπεριφορά της πρόβλεψης των Rayleigh-Jeans φαίνεται και από το αποτέλεσμα που προβλέπει για την ενεργειακή πυκνότητα όταν το μήκος κύματος τείνει στο μηδέν.

Αντίθετα τα πειραματικά δεδομένα είναι πεπερασμένα για μικρά λ και τείνουν στο μηδέν όταν το λ τείνει στο μηδέν. Η ανώμαλη αυτή συμπεριφορά της συνάρτησης των Rayleigh - Jeans πήρε την ιστορική ονομασία "υπεριώδης καταστροφή". Η ονομασία αυτή δείχνει βέβαια τη σπουδαιότητα που είχε η αποτυχία αυτή της θεωρίας των Rayleigh-Jeans. Παρακάτω θα πρέπει να αναζητήσουμε τρόπους να ξεφύγουμε από το θεωρητικό αυτό αδιέξοδο. Για να εκτιμήσουμε τον εντυπωσιακό τρόπο με τον οποίο αποτυγχάνει η θεωρία αυτή ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης φασματικής κατανομής σε όλο το διάστημα των μηκών κύματος, δηλαδή από μηδέν ως το άπειρο. Θα είναι τότε:

$$\int_0^{\infty} w(T, \lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{8\pi k}{\lambda^5} \lambda T d\lambda = \left[\frac{1}{\lambda^3} \right]_0^{\infty} \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι η παραδοσιακή αντίληψη που στηρίζεται στην Κλασική Μηχανική και Κλασική ηλεκτροδυναμική έρχεται σε έντονη αντίθεση με το πείραμα αφού όπως φαίνεται από το Σχ.2.4 το ολοκλήρωμα της συνάρτησης φασματικής κατανομής (πειραματική καμπύλη) είναι πεπερασμένο. Άρα αυτό σημαίνει ότι οι κλασικές αντιλήψεις περί ακτινοβολίας που οδήγησαν στις εξισώσεις (2.7) και (2.8) πρέπει να αναθεωρηθούν.

2.6. Θεωρία του Planck

Μολονότι η θεωρία των Rayleigh-Jeans ονομάστηκε θεωρία της υπεριώδους καταστροφής κατά κανένα τρόπο δεν θα πρέπει να θεωρηθεί ως μια μάταια επιστημονική προσπάθεια. Διότι η αποτυχία της να συμφωνήσει με το πείραμα κατέδειξε ότι ο τρόπος με τον οποίο ερμηνεύεται η μεταφορά ενέργειας, ως μια μεταφορά δηλαδή ενέργειας κατά έναν συνεχή τρόπο δεν οδηγούσε σε συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα. Η λαθεμένη ερμη-

νεία αυτή δεν αποδίδεται μόνο στους δύο αυτούς φυσικούς, αλλά σε όλον τον τότε επιστημονικό κόσμο. Η ασυμφωνία αυτή ανάμεσα στη θεωρία και το πείραμα έπαψε να υπάρχει όταν το 1901 διατύπωσε ο Max Planck ένα νέο αξίωμα που ασφαλώς βρισκόταν σε ριζική αντίθεση με τις ως τότε έννοιες της κλασικής φυσικής.

Το αξίωμα του Planck μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

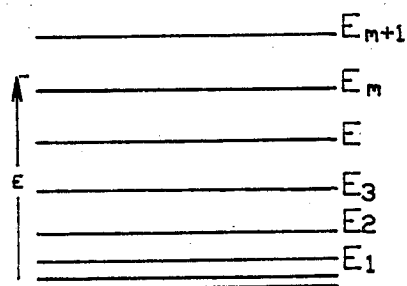
Κάθε φυσικό σύστημα του οποίου μια "συντεταγμένη" εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις του χρόνου μπορεί να έχει ενέργειες E που ικανοποιούν τη σχέση:

$$E = nh\nu, \quad \text{όπου } n=0,1,2,3,\dots \quad (2.9)$$

ενώ ν είναι η συχνότητα ταλαντώσεως και το h μια παγκόσμια σταθερά. Προτού όμως δούμε την φυσική σημασία της υπόθεσης του Planck ας διερευνήσουμε λίγο ακόμη την ενεργειακή συμπεριφορά ενός αρμονικού ταλαντωτή. Ας υποθέσουμε ότι ένα υλικό αποτελείται από μικρά σωματίδια (π.χ. άτομα, ή μόρια) που το καθένα τους εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις. Αν για ένα από αυτά τα σωματίδια σχεδιάσουμε το ενεργειακό του διάγραμμα παριστάνοντας την κάθε δυνατή τιμή ενέργειας του σωματιδίου με ένα μικρό οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα που απέχει από τον άξονα της μηδενικής ενέργειας κατά απόσταση ανάλογη της επιτρεπτής ενέργειας, τότε θα πάρουμε προφανώς το τελείως σκιασμένο ορθογώνιο το Σχ.2.5α, αν οι επιτρεπτές τιμές ενέργειας καθορίζονται σύμφωνα με την κλασική άποψη. Διότι η κλασική άποψη δέχεται ότι ένας αρμονικός ταλαντωτής μπο-



Σχήμα 2.5α.: Συνεχές ενεργειακό διάγραμμα.



Σχήμα 2.5β.: Διακριτό ενεργειακό διάγραμμα.

ρεί να έχει οποιαδήποτε τιμή ενέργειας. Η ενέργεια E ενός αρμονικού ταλαντωτή μπορεί να αυξηθεί ή να ελαττωθεί κατά ένα οποιοδήποτε μικρό τμήμα ενέργειας δE θέλουμε. Σκεφθείτε π.χ. ότι ένα απλό εκκρεμές που εκτελεί ταλαντώσεις μπορούμε κατά βούληση να του αλλάζουμε το πλάτος ταλάντωσης κατά όσο μικρό τμήμα θέλουμε (άρα και την ενέργεια ταλάντωσης). Γιατί κατά τέτοιο να μην συμβαίνει και σε ένα άτομο μέσα σε ένα στέρεο σώμα;

Η εικόνα του Σχ.2.5α, μας επιτρέπει να διατυπώσουμε την κλασική αντίληψη περί των δυνατών τιμών ενέργειας ενός αρμονικά ταλαντευόμενου συστήματος λέγοντας ότι: ένας κλασικός αρμονικός ταλαντωτής έχει συνεχές ενεργειακό διάγραμμα.

Τώρα το ενεργειακό διάγραμμα ενός ταλαντωτή που ικανοποιεί την υπόθεση του Planck μοιάζει με εκείνο του Σχ.2.5β. Αυτή είναι η φυσική σημασία του αξιώματος του Planck: Ότι, δηλαδή, το ενεργειακό διάγραμμα του ταλαντωτή είναι διακριτό. Για το λόγο αυτό λέμε ότι η ενέργεια του αντικειμένου που ικανοποιεί την υπόθεση του Planck είναι κβαντισμένη, από τη λέξη quantum που σημαίνει ποσόν. Ο ακέραιος n ονομάζεται κβαντικός αριθμός.

2.7. Υπολογισμός της συνάρτησης φασματικής κατανομής $w(\lambda)$ με βάση την υπόθεση του Planck.

Για τον υπολογισμό αυτό πρέπει να γνωρίζουμε θεωρητικά το πόσο συχνά έχει ένα άτομο την επιτρεπόμενη ενέργεια $\epsilon_n = nh\nu$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ισχύει εδώ η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του Boltzmann του εδαφίου 2.2 που λέει ότι η πιθανότητα $P(\epsilon)$ ένας ταλαντωτής να έχει ενέργεια ϵ είναι ανάλογη του:

$$P(\epsilon_n) = A \exp(-\epsilon_n/kT) \quad (2.10)$$

όπου k η σταθερά του Boltzmann, $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Joule } k^{-1}$ και A μια σταθερά που καθορίζεται από τη συνθήκη ότι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης κατανομής (2.10) σε όλο το διάστημα ενεργειών $\epsilon (0, \infty)$ ισούται με 1. Με βάση αυτή την έκφραση υπολογίζουμε πρώτα την μέση τιμή της ενέργειας $\langle \epsilon \rangle$ του ταλαντωτή: Δηλαδή

πολλαπλασιάζουμε κάθε μια επιτρεπόμενη τιμή ενέργειας με τον αντίστοιχο συντελεστή πιθανότητας από την έκφραση (2.10) και κατόπιν διαιρούμε το συνολικό αποτέλεσμα το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων:

$$\sum_{n=0} e^{-\beta n h \nu}, \text{ όπου } \beta = 1/kT \quad (2.11)$$

Η διαίρεση γίνεται ώστε να εξασφαλιστεί σωστό αποτέλεσμα σε περίπτωση όπου η $P(\epsilon)$ δεν είναι κανονικοποιημένη. Έτσι προκύπτει η έκφραση:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0} n h \nu \cdot e^{-\beta n h \nu}}{\sum_{n=0} e^{-\beta n h \nu}} \quad (2.12)$$

Να γραφεί έτσι:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n h \nu \cdot e^{-\beta n h \nu}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n h \nu}}$$

Μπορείτε να δείξετε ότι:

$$\langle \epsilon \rangle = - \frac{d}{d\beta} \left[-\ln \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta n h \nu) \right\} \right] \quad (2.13)$$

Αλλά είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n h \nu} = 1 + \exp(-\beta 1 h \nu) + \dots + \exp(-\beta n h \nu) = (1 - \exp(-\beta h \nu))^{-1} \quad (2.14)$$

Συνεπώς λόγω της 2.14 η εξ. 2.13 γίνεται

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{h \nu}{\exp(h \nu / kT) - 1} \quad (2.15)$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση ενεργειακής κατανομής ως προς τη μεταβλητή της συχνότητας ν διότι η μόνη αλλαγή που πρέπει να κάνουμε στην Σχέση 2.2 είναι να αντικα-

ταστήσουμε την μέση τιμή της ενέργειας με αυτήν από τον υπολογισμό με βάση την υπόθεση του Planck:

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi a^3 \nu^2 d\nu}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (2.16)$$

Αυτή είναι η περίφημη συνάρτηση κατανομής συχνοτήτων στην οποία κατέληξε θεωρητικά ο Planck. Η (2.17) μπορεί να γραφεί και σαν συνάρτηση του μήκους κύματος λ , όπως κάναμε και στη θεωρία των Rayleigh-Jeans, οπότε καταλήγουμε στη σχέση:

$$w(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1} \quad (2.17)$$

Στο Σχ.2.6 η Εξ.2.18 συγκρίνεται με τα πειραματικά αποτελέσματα. Η συμφωνία είναι εκπληκτική. Ο τρόπος με τον οποίο ταιριάζουμε την θεωρητική καμπύλη με τα πειραματικά αποτελέσματα περιγράφεται σε βιβλία αξιολόγησης πειραματικών δεδομένων. Πρόκειται για ένα πρόβλημα προσαρμογής (fitting) που έχει μια ελεύθερη παράμετρο την σταθερά h . Η τιμή που προκύπτει για το h από αυτή την προσαρμογή θεωρίας με πείραμα είναι:

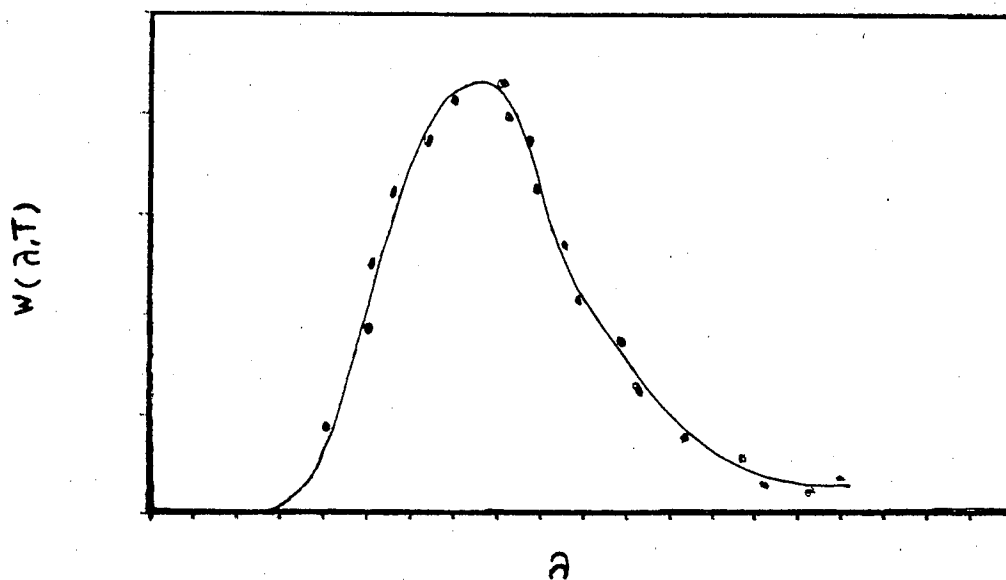
$$h = 6.63 \times 10^{-27} \text{ erg-sec}$$

Η σταθερά αυτή ποσότητα είναι γνωστή σαν σταθερά του Planck. Είναι παγκόσμια σταθερά και θα σας δοθεί η ευκαιρία να την μετρήσετε μόνοι σας στο εργαστήριο.

Νόμος του Wien:

Πρόβλημα 1. Ολοκληρώστε τη σχέση (2.17) για να βρείτε την ολική ακτινοβολία από ένα μέλαν σώμα σε όλα τα μήκη κύματος. Η σχέση που προκύπτει λέγεται Νόμος των Stefan-Boltzmann. (Απάντηση: Προκύπτει:

$$W \int_0^\infty I_\lambda d\lambda = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} T^4 \text{ Wm}^{-2}$$



Σχήμα 2.6.: Πειραματικά δεδομένα της φασματικής κατανομής του μέλανος σώματος και προσαρμογή με την θεωρητική κατανομή του Planck.

Ασκήσεις: Κεφάλαιο 2

1) (α) Υπολογίστε προσεγγιστικά την επιφανειακή θερμοκρασία του Ηλίου υποθέτοντας ότι είναι μέλαν σώμα ακτίνας $7 \times 10^8 \text{ m}$ που απέχει $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ από τη Γη. Θα χρειασθείτε σαν δεδομένο ότι η ηλιακή σταθερά (ισχύς ανά μονάδια επιφάνεια σε ένα επίπεδο κάθετο στις ακτίνες του Ηλίου) είναι 1400 W/m^2 .

(β) Υπολογίστε την επιφανειακή θερμοκρασία του Ήλιου από το γεγονός ότι $\lambda_{\text{max}} = 4900 \text{ \AA}$.

2) Ακτινοβόλος ενέργεια προσπίπτει σε κάποιο ημιδιαφανές σώμα με ρυθμό 40 W/m^2 . Η επιφάνεια απορροφά 25 W/m^2 . (α) ποιός είναι ο συντελεστής ανάκλασης της επιφάνειας; (β) Αν το σώμα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον του και μπορεί να ανταλλάξει ενέργεια με το περιβάλλον μόνο με ακτινοβολία, ποιός είναι ο ρυθμός με τον οποίο ακτινοβολεί το σώμα;

3) Μια επίπεδη επιφάνεια αργύρου έχει συντελεστή ανακλαστικότητας 0.98 σε θερμοκρασία σε 900° Kelvin . Ποιός είναι ο ρυθμός ακτινοβολίας της επιφάνειας αυτής σε αυτή τη θερμοκρα-

σία; Ποια είναι η εκπεμπσιμότητα της επιφάνειας αυτής σε αυτή τη θερμοκρασία;

4) Ακτινοβολία επιταχυνόμενου σημειακού φορτίου. Η στιγμιαία ακτινοβολία επιταχυνόμενου ηλεκτρικού φορτίου δεν μας λέει πολλά πράγματα για την συνολική ισχύ που εκπέμπει ένα π.χ. επιταχυνόμενο ηλεκτρόνιο σε όλο το χώρο. Προσπαθήσετε να ολοκληρώσετε τη σχέση 1.14 σε όλη τη στερεά γωνία 4π και να δείξετε τη σχέση (1.15) που δείχνει τη συνολική ισχύ που χάνει το επιταχυνόμενο ηλεκτρόνιο.

Λύσεις ορισμένων ασκήσεων του Κεφαλαίου 3

Άσκηση 2.1:

(α) Η ένταση I της ενέργειας που εκπέμπεται από τον ήλιο μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$I(T) = (S4\pi R^2) / (4\pi r_{\text{ηλίου}}^2)$$

όπου S η ηλιακή σταθερά, R , η απόσταση Ηλίου-Γης, και $r_{\text{ηλίου}}$ η ακτίνα του Ηλίου. Έτσι ο νόμος των Stefan-Boltzman μπορεί να γραφεί:

$$(SR^2) / r_{\text{Ηλίου}}^2 = \sigma e T^4 \quad (2)$$

Αλλά η εκπεμπσιμότητα ισούται με τη μονάδα δεδομένου ότι ο Ήλιος θεωρείται μέλαν σώμα. Έτσι από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$T = (SR^2 / \sigma r_{\text{H}}^2)^{1/4} = 4800^\circ \text{K}$$

(β) Είναι $\lambda_{\text{max}} T = 2.96 \times 10^7 \text{ }^\circ \text{KA}$ (Νόμος του Wien). Έτσι προκύπτει:

$$T = (2.96 \times 10^7 \text{ }^\circ \text{KA} / 4.9 \times 10^3 \text{ A}) = 6.010^\circ \text{K}.$$

Η διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο αυτών μεθόδων θα μπορούσε να αποδοθεί στο γεγονός ότι ο Ήλιος δεν είναι ένα τέλει μέλαν σώμα σε θερμοδυναμική ισορροπία.

Άσκηση 2. Να βρείτε το μήκος κύματος στο οποίο η μονοχρωματική ενεργειακή πυκνότητα της ακτινοβολίας του μαύρου σώματος γίνεται μέγιστη για δεδομένη θερμοκρασία.

Λύση: Ορίζουμε για ευκολία στις πράξεις: $z=hc/\lambda kT$. Έτσι από την Εξ. 2.17 προκύπτει:

$$E(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda k T \lambda^4} \frac{kT}{e^z - 1} \frac{1}{e^z - 1} = \alpha \frac{z^5}{(e^z - 1)^2}$$

όπου $\alpha = (8\pi k^5 T^5 / h^4 c^4)$.

Για να βρούμε το μέγιστο της $E(\lambda)$, ας βρούμε πρώτα την παράγωγο dE/dx και ας δούμε πότε αυτή μηδενίζεται:

$$dE/dz = 0 \text{ ή } 5\alpha z^4 - (\alpha z^5 e^z / (e^z - 1)^2) = 0$$

Η τελευταία καταλήγει στην:

$$5e^z - ze^z z - 5 = 0 \quad (1)$$

Η λύση της υπερβατικής αυτής εξίσωσης μπορεί να γίνει είτε με γραφικό τρόπο είτε με μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στο Σχ.2.8 φαίνεται ένα απλοϊκό πρόγραμμα σε γλώσσα Basic που μπορεί να βρει τη λύση της εξίσωσης (1).

Πρόγραμμα H/Y για την ανεύρεση του μήκους κύματος του μέγιστου της φασματικής κατανομής του μαύρου σώματος.

```

10 D=0
20 z=0.0
30 g=exp(-d)
40 GOTO 80
50 PRINT H;
60 D=-D*0.2
70 PRINT "ALLAGH PROSHMOY"
80 FOR I=1 TO 1000
90 Z=Z+D*I
92 E=G
100 H=EXP(-Z)+0.2*Z-1
110 G=H
120 IF(E*H)<0 THEN 50
130 NEXT I
140 END

```

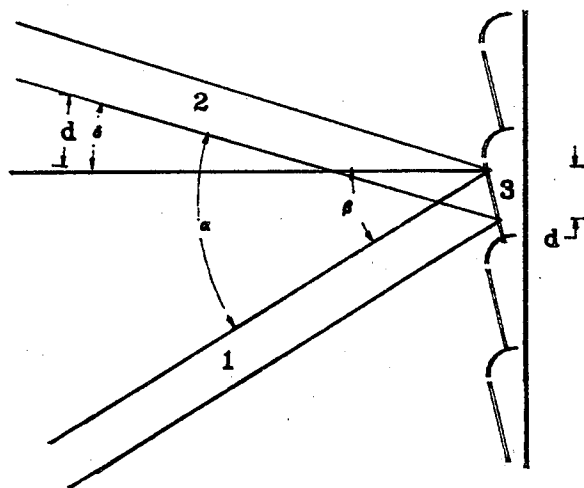
Σχήμα 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Οπτική Φασματοσκοπία-Φασματομέτρα

Η μελέτη των φαινομένων της φυσικής απαιτεί όργανα μέτρησης της φασματικής κατανομής της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Προς την κατεύθυνση αυτή αναπτύχθηκαν τρία είδη φασματοσκοπίων και φασματομετρών. 1^ο φασματομέτρα πρισματος, 2^ο φασματομέτρα φράγματος, 3^ο Fourier Transform. Θα μελετήσουμε μόνο τα 2 τελευταία είδη των φασματομέτρων λόγω της μεγάλης υπεροχής σε σχέση με το πρώτο. Στο σχήμα 3.1α έχουμε εικόνα συμβολής από ανάκλαση. Είναι φανερό ότι η εικόνα συμβολής θα είναι συνάρτηση της γωνίας θ διότι από αυτήν εξαρτάται η διαφορά δρόμου:

$$m\lambda = \Delta x_1 + \Delta x_2 = d \sin \alpha + d \sin \beta$$



Σχήμα 3.α Εικόνα χάραξης φωτοβολίας (Blazed). Το πάχος του αλουμινίου γενικώς ισούται με το μήκος κύματος φωτοβολίας, ενώ το βάθος χαραγής είναι περίπου το μισό αυτού του πάχους. Εξήγηση συμβόλων:
 d : αποστάσεις χαραγών , L : περιοχή μη
 χαραθείσα, α : γωνία πρόσπτωσης β : γωνία περίθλασης, θ : γωνία φωτοβολίας , η
 η είναι η κάθετος προς τη κατεύθυνση χαραγής.

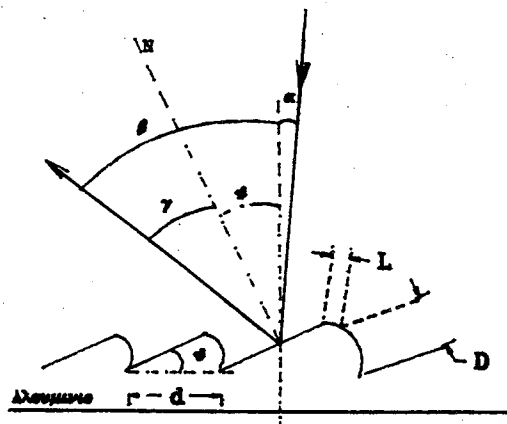
όπου α η γωνία πρόσπτωσης και β η γωνία παρατήρησης της συμβολής εξ ανακλασεως . Ενα μεγάλο μέρος της προσπίπτουσας δέσμης σπατελιέται διότι ανακλάται στον κροσσό μηδενικής τάξης. Αν η γωνία χάραξης του φράγματος επιλεγεί κατάλληλα, όχι μόνο επιτυγχάνεται μέγιστη ένταση για επιθυμητό μήκος κύματος και την προαπαιτούμενη τάξη, αλλά βρίσκουμε η εικόνα περίθλασης μηδενικής τάξης να είναι σοβαρά εξασθενημένη .

Αντίθετα αυτή η ενέργεια που χάνεται χρησιμοποιείται για την αύξηση της έντασης άλλων τάξεων που έχουν επιλεγεί.

Η απόδοση του φράγματος γίνεται μέγιστη για εκείνα τα μήκη κύματος που πληρούν την σχέση:

$$2d \sin \theta_B = n\lambda$$

όπου θ_B λέγεται γωνία φωτοβολίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα (γωνία χαραγής του φράγματος)



Σχήμα 3.1.β Εξήγηση της γεωμετρίας των ακτίνων

Με το φασματόμετρο λοιπόν μπορούμε να αναλύσουμε την ακτινοβολία μιας πολυχρωματικής φωτεινής πηγής, και να επιλέξουμε μια μονοχρωματική συνιστώσα της . Συχνά όμως χρειάζεται να μελετήσουμε τον βαθμό απορρόφησης μιας συγκεκριμένης συχνότητας (μικρή περιοχή συχνοτήτων) με σκοπό να μελετήσουμε π.χ την ύπαρξη συγκεκριμένων ενεργειακών σταθμών. Τούτο επιτυγχάνεται όταν στην πορεία των ακτίνων, ανάμεσα στη φωτεινή μονοχρωματική δέσμη απο το φράγμα και έναν φωρατή ακτινοβολίας, τοποθετήσουμε το προς μελέτη δοκίμιο. Το αποτέλεσμα μπορεί να μας δώσει

τον συντελεστή απορρόφησης με μέτρηση της έντασης με και χωρίς το δοκίμιο. Πρώτος που προτείνει την κατασκευή οπτικών φραγμάτων ανάκλασης ήταν ο Lord Rayley σε άρθρο του στην Encyclopedia Britannica το 1888. Πρότείνει ότι θεωρητικά είναι δυνατόν να μετατοπίσουμε ενέργεια έξω από τον άχρηστο κροσσό μηδενικής τάξης. Έτσι ο Robert Wood (1868-1955) πέτυχε το 1910 να χαράξει εγκοπές με ελεγχόμενο σχήμα, όπως αυτές στο Σχ3.1. Τα περισσότερα σύγχρονα φράγματα έχουν το σχήμα αυτό ή έχουν την μορφή "blased, δηλαδή χαρακτηρίζονται από κάποια εγκοπή γωνίας φωτοβολίας (γ). Σαν συνέπεια του τελευταίου αυτού τρόπου χάραξης, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών χαραγών είναι ίση με το εύρος της κάθε χαραγής. Αν η γωνία χάραξης επιλεγεί κατάλληλα, όχι μόνο επιτυγχάνεται η μέγιστη δυνατή ένταση για το επιθυμητό μήκος κύματος και την προσαιτούμενη τάξη, αλλά επιπλέον βρίσκουμε ότι η εικόνα περίθλασης μηδενικής τάξης (που δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον) βρίσκεται κοντά στο ελάχιστο της εικόνας περίθλασης απλής σχισμής και είναι σοβαρά εξασθενημένη. Η ενέργεια αυτή που χάνεται χρησιμοποιείται για την αύξηση της έντασης της τάξης που έχει επιλεγεί. Μια απλούστατη διάταξη φασματομέτρου είναι ένα γυάλινο πρίσμα. Αυτή όμως δεν διακρίνεται για την μεγάλη απόδοση που μπορεί να συναντήσει κανείς σε ένα φασματόμετρο με φράγμα ανάκλασης.

Φασματόμετρο Czerny-Turner

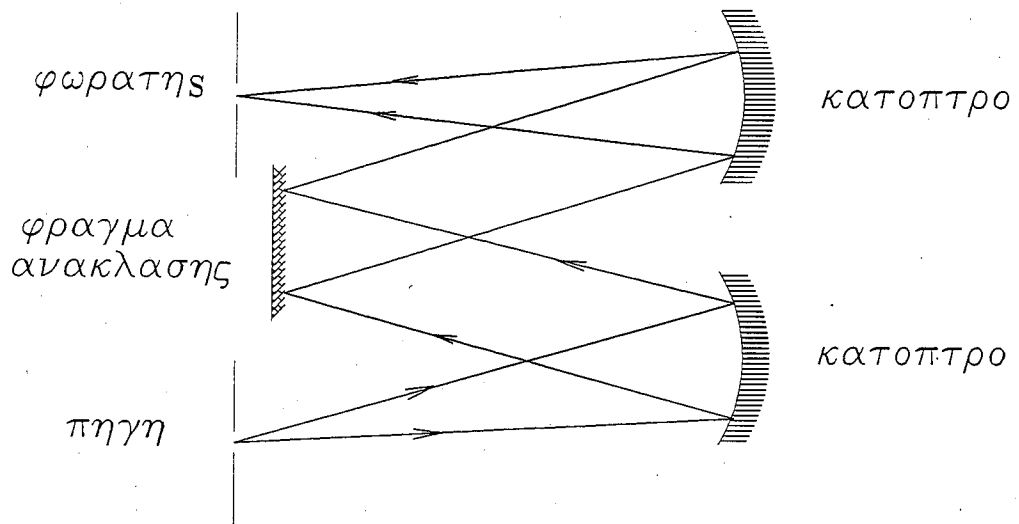
Χρησιμοποιεί δύο κάτοπτρα. Η φωτεινή δέσμη ανακλάται στο πρώτο κάτοπτρο, μετά από το δεύτερο κάτοπτρο και τέλος συγκεντρώνεται στον φωρατή.

Φασματόμετρο Ebert-Fastie

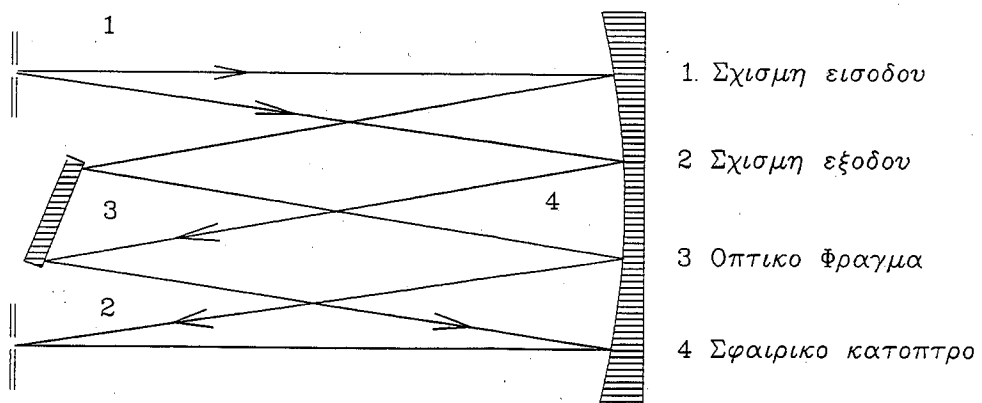
Χρησιμοποιεί ένα μεγαλύτερο σφαιρικό κάτοπτρο. Ένα τμήμα το κατόπτρου χρησιμεύει για την επίτευξη ευθυγράμμισης του φωτός, ενώ ένα άλλο τμήμα για την εστίαση μετά την ανάκλαση στο φράγμα.

Τα πραγματικά συστήματα φασματογράφων, ειδικότερα σε εκείνα που θέλουμε να μελετούν υπέρυθρο ή υπεριώδη ακτινοβολία, λειτουργούν σε συνθήκες χαμηλής πίεσης της τάξης των 10^{-2} Torr, επειδή έτσι αποφεύγεται η ύπαρξη ατμών νερού που προκαλεί ανεπιθύμητο φάσμα απορρόφησης. Αυτή επιτυγχάνεται με μια αντλία κενού δύο βαθμίδων ή μια αντλία κενού που περιέχει μια αντλία διάχυσης.

Το πρώτο κάτοπτρο χρησιμεύει για να καταστήσει την ακτινοβολία παράλληλη, ενώ το δεύτερο για να την εστιάσει στο φωρατή.



Σχήμα 3.2 Φασματοόμετρο Cherny-Turner.

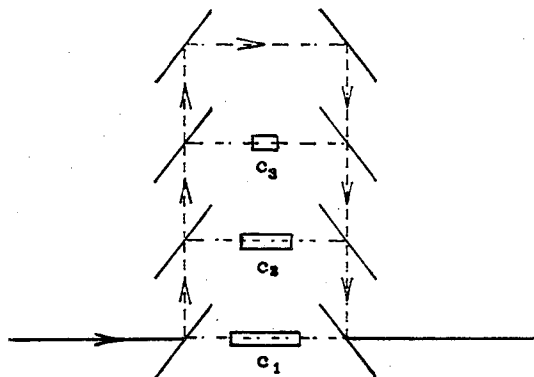


Σχήμα 3.3 Φασματοόμετρο Ebert-Fastie.

Αν θέλουμε να ενισχύσουμε το φωτεινό σήμα προτού πέσει στον φωρατή τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και έναν τεμαχιστή της δέσμης.

3.4 Συμβολόμετρα - Βασικές έννοιες.

Η βασική ιδέα των συμβολομέτρων βασίζεται στο εξής: προσπίπτουσα κύμανση με ένταση I_0 διαχωρίζεται σε δύο ή περισσότερες επιμέρους δέσμες οι οποίες διανύουν διαφορετικές οπτικές διαδρομές $L_v = n x_v$ (όπου n ο δείκτης διάθλασης) προτού να υπερτεθούν στην έξοδο του συμβολομέτρου (βλ Σχ.3.4). Επειδή όλες οι δέσμες προέρχονται από την ίδια πηγή, κατά συνέπεια είναι σύμφωνες εφόσον η μέγιστη διαφορά οπτικού δρόμου δεν ξεπερνάει το μήκος συμφωνίας. Το ολικό πλάτος του διαδιδόμενου κύματος που είναι επαλληλία των επιμέρους κυμάτων θα εξαρτάται από τα επιμέρους πλάτη A_v και από τις φάσεις $\phi_v = \phi_0 + (2\pi/\lambda)P_v$ των μερικών κυμάτων, όπου P_v είναι η διαφορά



Σχήμα 3.4 Βασική αρχή λειτουργίας συμβολομέτρου.

δρόμου. Συνεπώς το ολικό πλάτος (άρα και η προκύπτουσα ένταση) εξαρτάται (μάλιστα είναι πολύ ευαίσθητη) από το μήκος κύματος. Η μέγιστη ολική ένταση θα προκύπτει όταν όλα τα μερικά κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά, όταν δηλαδή

$$\Delta P_{ij} = P_i - P_j = m \lambda, \quad m=1,2,3,\dots$$

Η ολική ένταση είναι

$$I = \text{σταθ.} \cdot \left| \sum_k A_k \right|^2$$

Σαν παράδειγμα συσκευών με συμβολή δύο μερικών δεσμών είναι τα συμβολόμετρα του Michelson - και των Mach-Zehnder. Παραδείγματα συμβολής πολλαπλών δεσμών είναι το συμβολόμετρο Fabry-Perot και κάτοπτρα

υψηλής ανακλαστικότητας με πολλαπλές στρώσεις διηλεκτρικών. Η συνθήκη $\Delta P_{ij} = m\lambda$, $m=1,2,3,\dots$ για την μέγιστη τιμή του συντελεστή διάδοσης ικανοποιείται όχι μόνο για ένα μοναδικό μήκος κύματος λ , αλλά για όλα τα $\lambda_{\mu\epsilon\gamma}$ για τα οποία

$$\lambda_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{\Delta P}{m}, \quad m=1,2,3$$

Το διάστημα

$$\delta\lambda = \frac{\Delta P}{m} - \frac{\Delta P}{m+1} = \frac{\Delta P}{m(m+1)}$$

ονομάζεται Ελεύθερο φασματικό διάστημα του συμβολόμετρου. Μπορεί αυτό το μέγεθος να εκφραστεί πιο βολικά συναρτήσει της συχνότητας. Επειδή $v=c/\lambda$, έπεται $\Delta P=c(m/v)$, και έτσι το ελεύθερο φασματικό διάστημα γίνεται $\delta v=c/\Delta P$ ($\Delta m=1$), και έτσι γίνεται ανεξάρτητο του m .

3.5 Πλεονεκτήματα Συμβολομέτρων .

Για τη μελέτη διαφόρων φαινομένων οπτικής, όπως μορφής φασματικών κατανομών που εκπέμπονται από άτομα, δηλαδή συνεχούς ή γραμμικού φάσματος, η χρησιμοποίηση συμβολομέτρων είναι προτιμητέα σε σύγκριση με φασματομέτρα τύπου φράγματος ή πρίσματος διότι, όσον αφορά την διακριτική ικανότητα ανάλυσης φασματικών γραμμών τα συμβολόμετρα παρουσιάζουν ανώτερη επίδοση ακόμη και σε σύγκριση με μεγάλα φασματομέτρα τύπου φράγματος. Σε φασματοσκοπία λέιζερ, οι διάφοροι τύποι των φασματομέτρων όχι μόνο βοηθούν στο να μετρηθούν τα σχήματα των γραμμών εκπομπής ή απορρόφησης, αλλά χρησιμεύουν ουσιαστικά στις μεθόδους λέπτυνσης των ευρών φασματικών γραμμών των λέιζερ μοναχικού τύπου κ.ά.

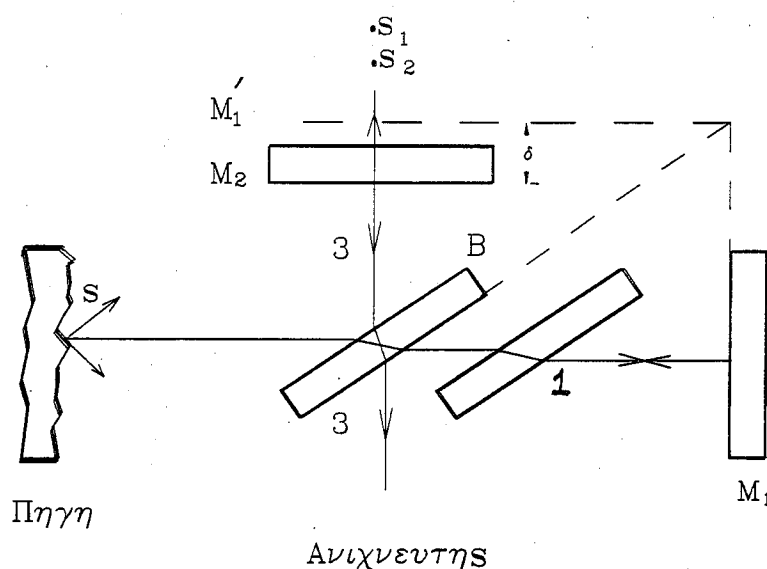
Τα συμβολόμετρα έχουν και σπουδαία ιστορική σημασία αφού ήταν ουσιαστική η συνδρομή τους στη θεμελίωση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας με το περίφημο πείραμα του Michelson το οποίο έδειξε ότι η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή σε όλα τα συστήματα αναφοράς που κινούνται με σταθερή το ένα ως προς το άλλο ταχύτητα.

3.6 Το συμβολόμετρο του Michelson.

Η βασική αρχή του συμβολόμετρου του Michelson φαίνεται στο Σχήμα. Το προσπίπτον επίπεδο κύμα $E=A_0 \exp i(\omega t - kx)$ διαχωρίζεται με τη βοήθεια του διαιρέτη δέσμης Δ στα κύματα.

$$E_1 = A_1 \exp [i(\omega t - kx)] \quad \text{και} \quad E_2 = A_2 \exp [(i\omega t - kx + \phi)]$$

Αν ο διαιρέτης δέσμης έχει μηδαμινή απορροφήση ($R+T=1$), τότε στο σχήμα 3.5 φαίνεται η πορεία των ακτίνων στο συμβολόμετρο Michelson. Η ακτίνα



Σχήμα 3.5

α από την πηγή S διαιρείται σε δύο ακτίνες με την βοήθεια του διαιρέτη δέσμης B . Μετά την ανάκλασή τους στα κάτοπτρα αλουμινίου M_1 και M_2 οι δύο δέσμες συμβάλλουν, αφού προγουμένως η δέσμη 2 περρασει για δεύτερη φορά μέσα από τον διαιρέτη δέσμης B . Προφανώς οι δύο συμβάλλουσες δέσμες είναι σύμφωνες αφού προκύπτουν από την ίδια αρχική πηγή. Η μόνη διαφορά φάσης μεταξύ αυτών μπορεί να προκύψει από την διαφορετική απόσταση των δύο κατόπτρων από τον διαιρέτη δέσμης και από το γεγονός ότι η δέσμη 2 υφίσταται μια πρόσθετη διαφορά φάση εξαιτίας του ότι διασχίζει τον διαιρέτη δέσμης δύο φορές όταν κατευθύνεται προς το κάτοπτρο M_2 . Η διαφορά φάσης μπορεί να ονομασθεί δ , και αν υποθέσουμε ότι ο διαιρέτης δέσμης διαιρεί την αρχική δέσμη έτσι ώστε το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο $E_{\text{ολ}}$ ισούται, όπως φαίνεται στο σχήμα 2, με $2E \cos(\delta/2)$, όπου E είναι το πλάτος του διαδιδόμενου και ανακλώμενου πεδίου. Επειδή η ισχύς P που

σχετίζεται με μια ακτίνα είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του πλάτους του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου:

$$P \propto 4\cos^2(\delta/2) \propto 1 + \cos\delta$$

Η διαφορά φάσης δ σχετίζεται με την διαφορά δρόμου d των δύο ακτίνων με την σχέση:

$$\delta = 2\pi(2d\lambda^{-1} - 1)$$

όπου η πρόσθετη διαφορά κατά π προκύπτει από το ότι η ακτίνα 3 αλλάζει φάση κατά π όταν ανακλάται στο οπτικά πυκνότερο μέσο του 3, πράγμα που δεν συμβαίνει στην ακτίνα 2. Έτσι η έκφραση για την εξάρτηση από την διαφορά δρόμου της έντασης που θα χαρακτηρίζει το αποτέλεσμα της συμβολής θα είναι :

$$I(d) = (I_0/4)(1 + \cos(2\delta\lambda^{-1} - 1)\pi)$$

Η έκφραση αυτή παίρνει την μέγιστη τιμή όταν ισχύει

$$(2d/\lambda - 1)\pi = 2n\pi, \quad \text{όπου } n=1,2,\dots$$

Ελάχιστη γίνεται όταν

$$d = m\lambda/2, \quad \text{όπου } m=0,2,4,\dots$$

Το αποτέλεσμα τούτο σημαίνει ότι αρκεί μια μετατόπιση του κινητού κατόπτρου κατά $2(\lambda/4) = \lambda/2$ ώστε η εικόνα συμβολής (μικρή φωτεινή κηλίδα) να αντιστραφεί και από μέγιστη ένταση να μετατραπεί σε ελάχιστη (μηδενική) ένταση.

Η κίνηση του κατόπτρου M_2 μπορεί να γίνεται μικρομετρικά με τη βοήθεια του μικρομέτρου. Στην πράξη μπορούμε να θέσουμε σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα u τον βερνιέρο με τη βοήθεια ενός μοτέρ, οπότε η επανάληψη των μεγίστων ή ελαχίστων θα γίνεται με περιοδικό τρόπο. Στο εργαστήριο, στη θέση ϕ_1 τοποθετούμε έναν αποκλίνοντα φακό με περίπου (-20mm εστιακή απόσταση), οπότε η δέσμη αποκλίνει. Η απόκλιση αυτή είναι συμμετρική ως προς την αρχική κατεύθυνση της δέσμης και για τον λόγο αυτό η προκύπτουσα δέσμη γίνεται κωνική. Πάνω στο πέτασμα θ η εικόνα συμβολής αποτελείται από μια σειρά ομοκέντρων δακτυλίων με εναλλασσόμενη ένταση. Γιατί προκύπτει η εναλλαγή της έντασης; Αυτό είναι εύκολο να το δούμε διότι όσο απομακρυνόμαστε πάνω στο πέτασμα από την θέση θ , αυτό

σημαίνει ότι διαφορά φάσης δεν εξαρτάται μόνο από την διαφορά της απόστασης d των δύο κατόπτρων από τον $\Delta\Delta$, αλλά και από την γωνιακή απόκλιση β_m από τον αρχικό άξονα συμμετρίας, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6. Έτσι είναι :

$$\Delta\phi = 4d \cos \beta_m$$

και η συνθήκη για να έχουμε τον κροσσό μέγιστης έντασης υπ' αριθμόν m είναι :

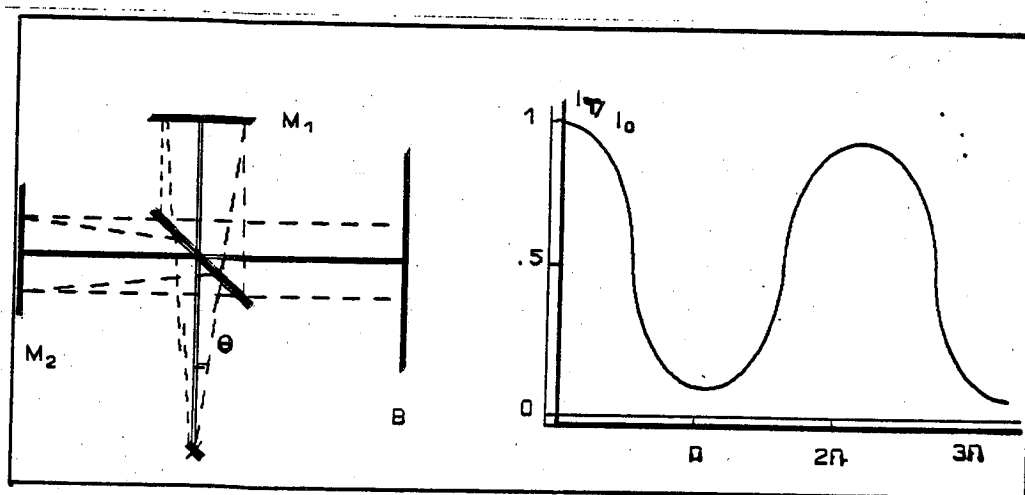
$$4d \cos \beta_m = m\lambda$$

όπου $m = 1, 3, 5 \dots$

ενώ για την γωνιακή θέση κροσσού ελάχιστης έντασης (σκοτεινός) θα πρέπει να είναι :

$$4d \cos \beta_m = m\lambda, \text{ όπου } m = 0, 2, 4, \dots$$

Για αποκλίνουσα προσπίπτουσα δέσμη φωτός η διαφορά οπτικού δρόμου εξαρτάται από τη γωνία πρόσπτωσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7. Στο Επίπεδο Β παρατηρείται εικόνα συμβολής από ομόκεντρους δακτύλιους, με

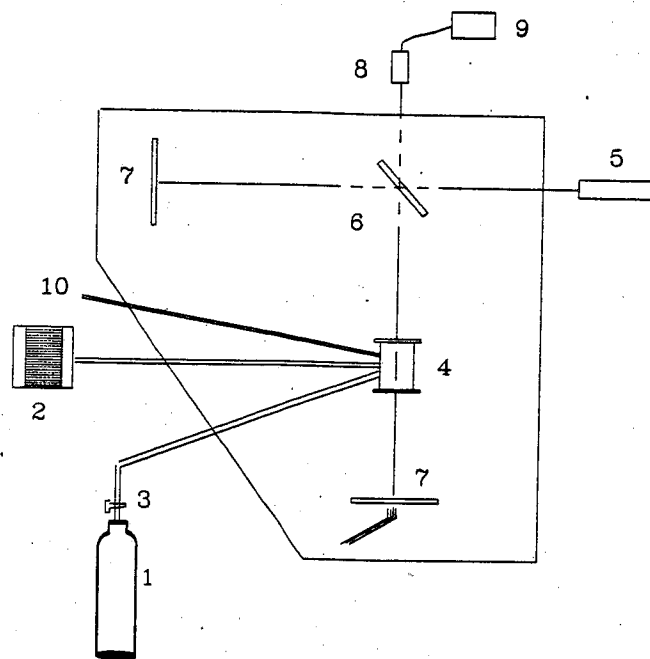


Σχήμα 3.6 απεικόνιση του τρόπου δημιουργίας εικόνας συμβολής στο συμβολόμετρο Michelson.

Σχήμα 3.7 Κατανομή φωτεινής έντασης σαν συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο συμμετρίας.

κέντρο συμμετρίας πάνω στο άξονα συμμετρίας του συστήματος . Όταν μετακινούμε του καθρέπτη M_2 , προκαλούμε μεταβολή των διαμέτρων των φωτεινών κύκλων. (Η αποκλίνουσα δέσμη πετυχαίνεται αρκετά καλά με ένα λέιζερ He-Ne και ένα αποκλίνοντα φακό , $f=20$ mm.)

Η ένταση $I(\theta, \Delta r)$ πίσω από μια μικρή τρυπούλα εξακολουθεί να ικανοποιεί προσεγγιστικά τη σχέση του σχήματος 3.7 . Αν η δέσμη είναι τελείως παράλληλη αλλά ένας από του δύο καθρέπτες M_1 ή M_2 είναι ελαφρά κεκλιμένος, τότε η εικόνα συμβολής αποτελείται από παράλληλους κροσσούς που κινούνται σε κατεύθυνση κάθετη προς τους κροσσούς όταν η απόσταση d μεταβάλλεται. Το Σ.Μ. μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μέτρηση τη απόλυτης τιμής του μήκους κύματος μετρώντας τον αριθμό N των μεγίστων στη θέση B κατά την μετακίνηση d του κατόπτρου M_2 . Αρα έχουμε ένα φασματομέτρο. Μια εφαρμογή συμβολόμετρου Michelson για μέτρηση δεικτών διάθλασης αερίων φαίνεται στο σχήμα 3.8. Η μέθοδος συνίσταται στη βαθμιαία εισαγωγή σε προηγουμένως εκκενωθέν δοχείο του προς μέτρηση αερίου δείγματος . Η διάμετρος των κροσσών μεταβάλλεται εφόσον με την μεταβολή της πυκνότητας



Σχήμα 3.8 πειραματικές διατάξη για μέτρηση δεικτών διάθλασης με συμβολόμετρο.

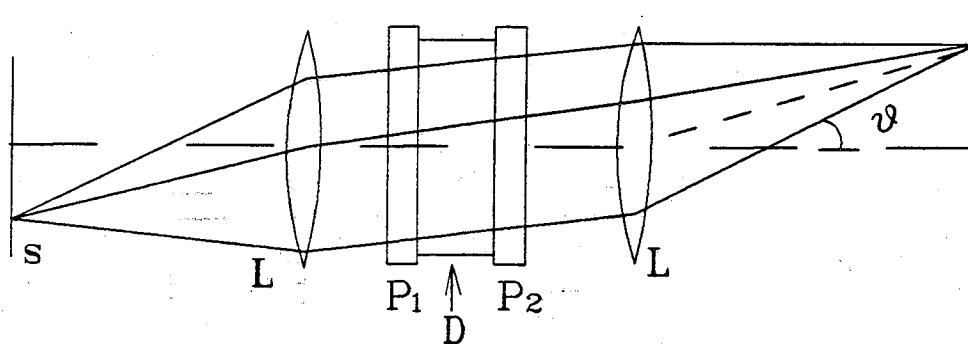
του αερίου μεταβάλλεται και η οπτική διαφορά δρόμου. Η καταμέτρηση πίεσης, θερμοκρασίας και φωτεινής έντασης γίνεται με κατάλληλους ηλεκτρονικούς αισθητήρες. Έχοντας κατά μετρήσει τον αριθμό των κροσσών με ακρίβεια της τάξης του $1/20$ του κροσσού, ο δείκτης διάθλασης του αερίου στην θερμοκρασία και πίεση T και P δίνεται από τον απλό τύπο :

$$n=1+N\lambda/2d$$

όπου λ το μήκος κύματος της ακτινοβολίας (σύμφωνη ακτινοβολία) και d το ενεργό πάχος του δοχείου.

Συμβολόμετρο Fabry-Perot - Μελέτη εύρους φασματικών γραμμών.

Το συμβολόμετρο Fabry - perot είναι από τις πιο σοβαρές εφαρμογές του φαινομένου συμβολής πολλών ακτίνων με ευρύτατο πεδίο εφαρμογών σε πολλούς τομείς της εργαστηριακής φυσικής αλλά και της σύγχρονης τεχνολογίας. Ανακαλύφθηκε από τους Charles Fabry και Alfred Perot, δύο Γάλλους οπτικούς το 1887. Αποτελείται ουσιαστικά από δύο πλάκες γυαλιού ή χαλαζία, λειασμένες έτσι ώστε οι αποκλίσεις επιπεδότητας να είναι μικρότερες από $\lambda/20$ ή $\lambda/200$ τις P_1 και P_2 όπως φαίνεται στο σχήμα 3.9.



Σχήμα 3.9 Το συμβολόμετρο Fabry-Perot.

Οι εσωτερικές επιφάνειες φέρουν επικάλυψη από ένα στρώμα μερικώς διαπερατό και με υψηλή ανακλαστικότητα, είναι δε παράλληλες και έτσι περιέχουν ένα επίπεδο παράλληλο στρώμα αέρα ανάμεσά τους. Οι πλάκες είναι κατασκευασμένες ελαφρώς πρισματικές ώστε να αποφεύγονται διαταραχές

στο φαινόμενο που θα προκαλούσαν οι ανακλάσεις στις εξωτερικές ακάλυπτες επιφάνειες. Στο πρωτότυπο όργανο το ένα πλακίδιο είναι σταθερό, ενώ το άλλο εδράζεται σε ένα μηχανισμό κινούμενο από μικρομετρικούς κοχλίες ώστε να παρέχεται η δυνατότητα της μεταβολής της απόστασης μεταξύ των πλακών. Μπορεί επίσης οι πλάκες να χωρίζονται από ένα αποστατικό στο οποίο είναι σταθερά προσαρμοσμένες. Το αποστατικό κατασκευάζεται από υλικό χαμηλού συντελεστή γραμμικής διαστολής (Invar ή Zerodur) και είναι ένας κύλινδρος με μια διαμετρική οπή στον διαμήκη άξονα. Οι σταθερά προσαρμοσμένες πλάκες, σε μια δεδομένη απόσταση, που ορίζεται από ένα αποστατικό συνθέτουν το ονομαζόμενο Fabry-Perot etalon.

Το συμβολόμετρο Fabry - Perot βασίζεται στο φαινόμενο της πολλαπλής συμβολής που ήδη είδαμε στο οπτικό φράγμα μόνο που εδώ η συμβολή γίνεται με διαίρεση του μετώπου κύματος.

Για την κατανόηση της λειτουργίας του συμβολομέτρου αυτού ας δούμε πρώτα το φαινόμενο της πολλαπλής συμβολής από τις δύο επιφάνειες μιας λεπτής διαφανούς πλάκας . Ας υποθέσουμε ότι ένα επίπεδο κύμα $E = A_0 \exp i(\omega t - kx)$ προσπίπτει υπό γωνία θ πάνω σε επίπεδη διαφανή πλάκα με δύο επίπεδες επιφάνειες μερικά ανακλαστικές όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.10,α. Σε κάθε επιφάνεια το πλάτος A_1 χωρίζεται σε μια συνιστώσα ανάκλασης $A_R = A_1$ και μια διάθλασης $A_T = A_1 (1-R)$, αν αμελήσουμε την απορρόφηση. Η ανακλαστικότητα $R = I_R/I_1$ εξαρτάται από τη γωνία πρόσπτωσης α και από την πόλωση του προσπίπτοντος φωτός . Αν ο δείκτης διάθλασης είναι γνωστός , το R μπορεί να υπολογισθεί από τους τύπους των εξισώσεων Fresnel . Από το Σχήμα 3.10 προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για τα πλάτη A_1 των κυμάτων που ανακλώνται στην κατώτερη επιφάνεια , και D_1 που διαδίδονται :

$$A_1 = RA_0 , \quad C_1 = A_0(1-R) , \quad D_1 = A_0(1-R)^2$$

κ.λ.π .

Ο αντίστοιχος γενικώτερος αλγόριθμος είναι

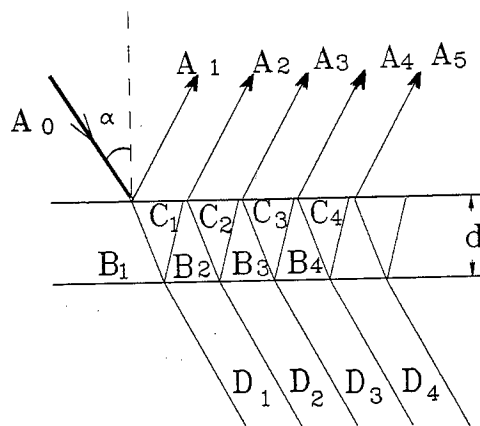
$$A_{i+1} = R A_i , \quad i = 1, 2, \dots$$

$$D_{i+1} = R D_i , \quad i = 1, 2, \dots$$

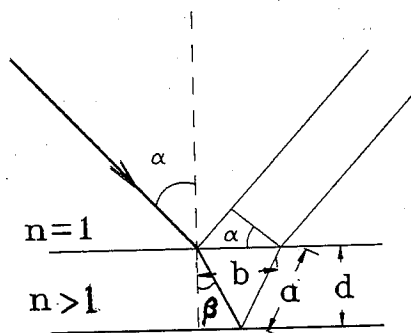
Τα διαδοχικά πλάτη E_i και E_{i+1} έχουν διάφορα οπτικού δρόμου : (Βλέπε Σχήμα 3.10β).

$$\Sigma s = (2nd/\cos \beta) - 2d \tan \beta \sin \alpha$$

Επειδή $\sin \alpha = n \sin \beta$ η σχέση αυτή δίνει :



(a)



$$\Delta s = 2na - b \sin \alpha$$

(β)

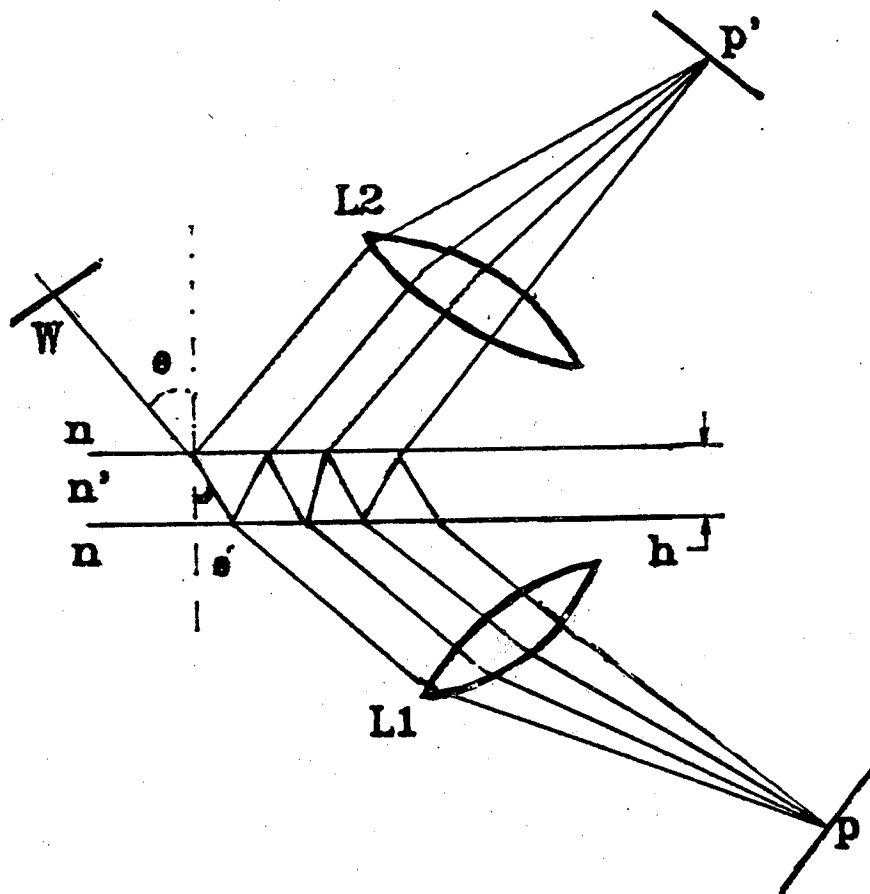
Σχήμα 3.10α Πορεία ακτίνας στις παράλληλες εσωτερικές επιφάνειες συμβολομέτρου Fabry Perot. Σχήμα 3.10β Εξήγηση διάφορας φάσης σαν συνάρτησή της απόστασης d και δείκτη διάθλασης

$$\Delta s = 2nd \cos \beta = 2nd \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$$

αν ο δείκτης διάθλασης εντός της πλάκας είναι η μεγαλύτερος του 1 και εκτός της πλάκας είναι η ίση με ένα συνεπώς η διαφορά δρόμου προκαλεί μια διαφορά φάσης δ . Για τη θεωρητική μελέτη λοιπόν της εικόνας συμβολής που προκύπτει από ένα συμβολόμετρο Fabry-Perot, ας δούμε τη διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ διαδοχικών ακτίνων στο κύμα που εξέρχεται. Αυτή δίνεται από την έκφραση

$$\delta = 2 \frac{2\pi}{\lambda_0} (d \cos \theta) n$$

$$\begin{aligned} \Psi_{o\lambda} &= A_1 + A_2 + \dots + A_v + \dots = \\ &= tt'A^{(1)} + tt'A^{(1)}rr'e^{-i\delta} + \\ &\quad tt'A^{(1)}(r')^2 e^{-2i\delta} + \\ &\quad tt'A^{(1)}(r')^4 e^{-3(i\delta)} + \dots \end{aligned}$$



Σχήμα 3.11 Εστίαση ανακλώμενης και διαδοκόμενης δέσμης στο φαινόμενο πολλαπλής συμβολής.

Για την ένταση ακτινοβολίας που είναι ανάλογη του $\Psi \Psi^*$, δηλαδή της απολύτης τιμή πλάτους στο τετράγωνο προκύπτει:

$$I^{(t)} = \frac{T^2}{1+R^2-2R\cos \delta} I^{(i)}$$

όπου $T=tt'$, $R=rr'$

Κάνοντας χρήση ενός φακού, όπως στο σχήμα 3.11, παίρνουμε μέγιστα έντασης φωτός στην εστία του όταν η οπτική διαφορά δρόμου δ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π :

$$m = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{2n' h \cos \theta'}{\lambda_0} = 1, 2, \dots$$

Αντίστοιχα, ελάχιστα παίρνουμε όταν η οπτική διαφορά δρόμου είναι περιττό πολλαπλάσιο του π :

$$= (2m+1)\pi = \frac{2n' d \cos \theta'}{\lambda_0} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$

Η κατανομές εντάσεων της διαδιδόμενης ακτινοβολίας δίνονται και από την έκφραση:

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}} = \frac{1}{1+F\sin^2(\delta/2)}$$

όπου

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

Συμπεριφορά της $I^{(t)}/I^{(i)}$, φαίνεται στο σχήμα 3.12 σαν συνάρτηση της διαφοράς φάσης. Εδώ η συνθήκη μεγίστου συμβολής προκύπτει:

$$\delta = (4\pi/\lambda_0)n' h \cos \theta' + 2\phi$$

ϕ είναι η αλλαγή φάσης σε εσωτερική ανάκλαση. Αν τότε βάλουμε

$$R + T + A = 1$$

όπου A είναι το κλάσμα του φωτός που απορροφείται από το μέταλλο, έχουμε:

$$\frac{I(t)}{I(i)} = \left(1 - \frac{A}{1-R}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+F\sin^2(\delta/2)}$$

Αν τοποθετήσουμε έναν συγκλίνοντα φακό L , τότε θα έχουμε όπως είδαμε λεπτούς λαμπρούς κροσσούς που αντιστοιχούν σε σταθερή γωνία πρόσπτωσης θ . Σε περιπτώσεις αξονικής συμμετρίας ($\theta = 0$ κλπ) παίρνουμε για ακέραιες τιμές του m :

$$m_0 = \frac{2n'h}{\lambda_0} + \frac{\phi}{\pi}$$

Η διάμετρος D_p του υπ αριθμόν p φωτεινού κροσσού δίνεται από τη σχέση :

$$D_p^2 = (2f\theta_p)^2 = \frac{4n'\lambda_0 f^2}{n^2 h} (p-1+\epsilon)$$

όπου εξ ορισμού $m_0 = m_1 + \epsilon$, με m_1 ακέραια τάξη του εσωτερικότερου κροσσού και $0 < \epsilon < 1$. Αν στο σύστημα έχουμε αξονική συμμετρία τότε οι διάμετροι των κύκλων που αντιστοιχούν στα μέγιστα φαίνονται όπως στο Σχήμα 3.13. Σαν παράγοντα διαπερατότητας ορίζουμε

$$T = \left(\frac{I(t)}{I(i)} \right)_{\max}$$

ενώ σαν παράγοντα αντίθεσης (contrast) :

$$C = \frac{\left(\frac{I(t)}{I(i)} \right)_{\max}}{\left(\frac{I(t)}{I(i)} \right)_{\min}}$$

Η ευκρίνεια \mathcal{F} των κροσμών ορίζεται σαν το πηλίκο του 2π διά του εύρους στο ένα δεύτερο του μεγίστου. Αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$$

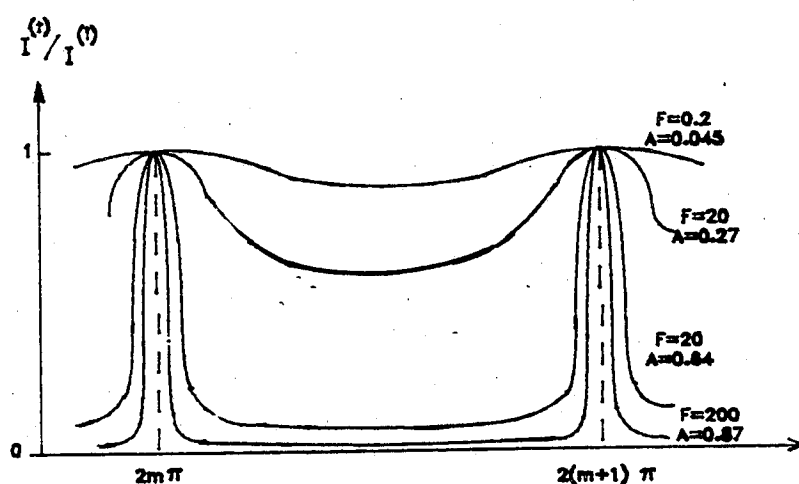
Εξ άλλου η μέγιστη διαπερατότητα προκύπτει ότι ισούται με:

$$\tau = \left(1 - \frac{A}{1-R}\right)^2$$

και

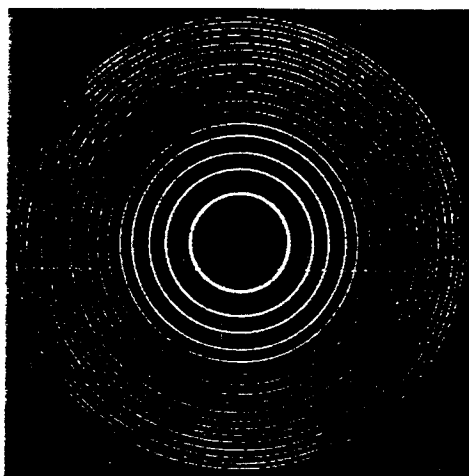
$$C = 1 + \mathcal{F} = \left(\frac{1+R}{1-R}\right)^2 = 1 + \frac{4\mathcal{F}^2}{\pi^2}$$

Παρατηρούμε ότι αυξημένη ανακλαστικότητα συνεπάγεται αυξημένη ευκρίνεια κροσσών και ταυτόχρονα αυξημένη ανακλαστικότητα σημαίνει ελαττωμένη διαπερατότητα. Το συμβολόμετρο Fabry-Perot χρησιμοποιείται για τη μελέτη λεπτής υφής φασματικών γραμμών ατόμων και για τη μορφή φασματικών γραμμών Laser, μέτρηση μήκους κύματος μονοχρωματικών πηγών, και μέτρηση δείκτη διάθλασης αερίων. Τα λείζερς είναι κοιλότητες Fabry-Perot. Φασματοσκοπική ανάλυση χημικών ουσιών μπορεί να γίνει με εξαιρετικά μεγάλη ευαισθησία με συμβολομετρία Fabry-Perot καθώς και μελέτη των μορφών φασματικών γραμμών ατόμων (line shape).



Σχήμα 3.12 Καμπύλη I_t/I_i συνάρτησε της διαφοράς φάσης δ για διάφορα R, F.

Η εικόνα πολλαπλής συμβολής που προκύπτει από ένα συμβολόμετρο Fabry-Perot μπορεί να παρατηρηθεί και σαν συνάρτηση του χρόνου αν παρατηρήσουμε ότι στην έκφραση Airy μπορούμε να μεταβάλλουμε το όρισμα του ημιτονικού όρου μεταβάλλοντας είτε τον δείκτη διάθλασης ή είτε την απόσταση d μεταξύ των κατόπτρων. Η μεταβολή του δείκτη διάθλασης είναι σχετικά ευκολότερο να επιτευχθεί αν τοποθετήσουμε το εταλον μέσα σε ένα στεγανό χώρο μεταξύ των δύο κατόπτρων όπως φαίνεται στη διάταξη του Σχήματος 3.13 .



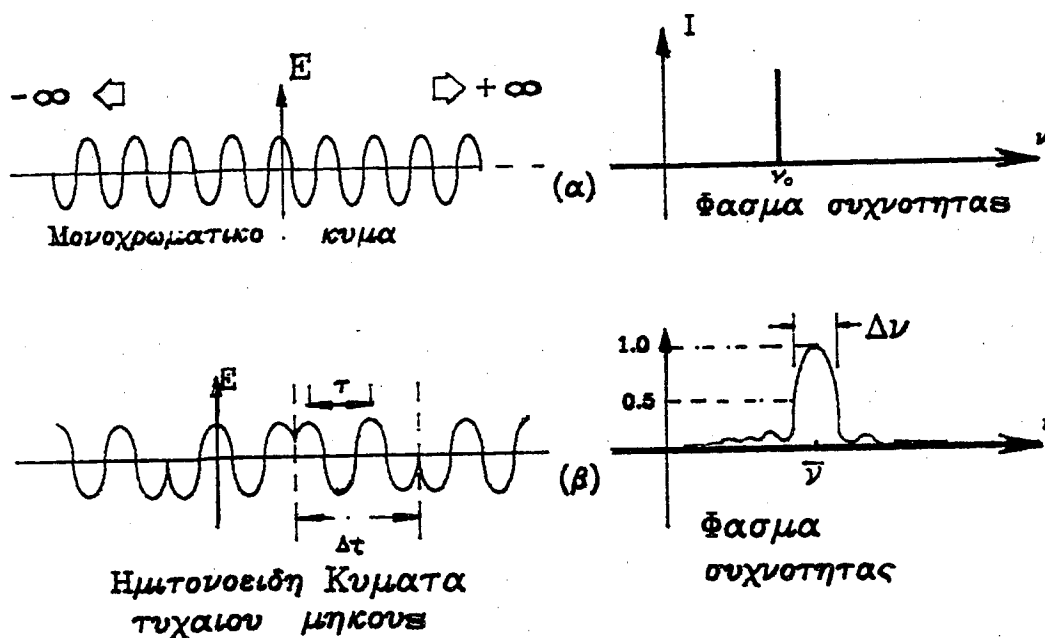
Σχήμα 3.13

Στον κατακόρυφο άξονα παριστάνεται η φωτεινή ένταση που αντιστοιχεί σε ένα μικρό τμήμα του κεντρικού κροσσού ενώ στον οριζόντιο άξονα η πίεση. Αποδεικνύεται ότι για αέρια με συμπεριφορά που προσεγγίζει το ιδανικό αέριο , η πίεση είναι ανάλογη προς του δείκτη διάθλασης του αερίου. Άρα στον άξονα των x έχουμε μεταβολή ανάλογη προς το όρισμα της συνάρτησης του Airy.

3.8 Συμφωνία - Lasers

Η έννοια της μονοχρωματικής σημειακής πηγής είναι μια μαθηματική εξιδανίκευση. Και η πιό απλή πηγή εκπέμπει μια σχετικά στενή φασματική περιοχή που περιλαμβάνει αρκετά μήκη κύματος. Στο Σχήμα 3.14 φαίνεται η απεικόνιση σε διάγραμμα ενός μονοχρωματικού κύματος και ενός τυχαίου κύματος. Το χρονικό διάστημα Δt στο οποίο η φάση είναι σχεδόν σταθερή,

ονομάζεται χρόνος συμφωνίας. Το αντίστοιχο χωρικό διάστημα $\Delta l = c \cdot \Delta t$, ονομάζεται μήκος συμφωνίας για ένα μονοχρωματικό κύμα το Δt είναι άπειρο ενώ το $\Delta \nu$ που λέγεται φάσμα συχνότητας είναι μηδέν.



Σχήμα 3.14

Η σαφήνεια των κροσσών U , σχέση σε μια συμβολομετρική διάταξη δίνει ένα μέτρο του βαθμού συμφωνίας. Μετατοπίζοντας λοιπόν, για παράδειγμα, το ένα κάτοπτρο σε ένα συμβολόμετρο Michelson μπορούμε να μετρήσουμε την χρονική συμφωνία. Όταν μεταβάλλουμε την απόσταση των δύο οπών στο πείραμα του Young, μπορούμε να μετρήσουμε την χωρική συμφωνία. Η ανάπτυξη και η χρησιμοποίηση των Laser στις πειραματικές διατάξεις σαν πηγές φωτός, έλυσε πολλά προβλήματα στον τομέα αυτό. Η μονοχρωματικότητα είναι βασική ιδιότητα των Laser που προσεγγίζουν το ιδανικό μονοχρωματικό φως. Το εύρος για παράδειγμα του φάσματος ενός μικρού εκπαιδευτικού Laser He-Ne είναι της τάξης των 2×10^{-3} nm. Οσον αφορά δε την συμφωνία, τα Laser παρουσιάζουν μεγάλο μήκος συμφωνίας. Για παράδειγμα μπορεί να δείχθει ότι ένα λειζερ που εκπέμπει γύρω στα 500nm, με $\Delta \lambda = 10^{-3}$ nm τότε το μήκος συμφωνίας θα φθάσει τα 25 cm (2.5×10^5 μm).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

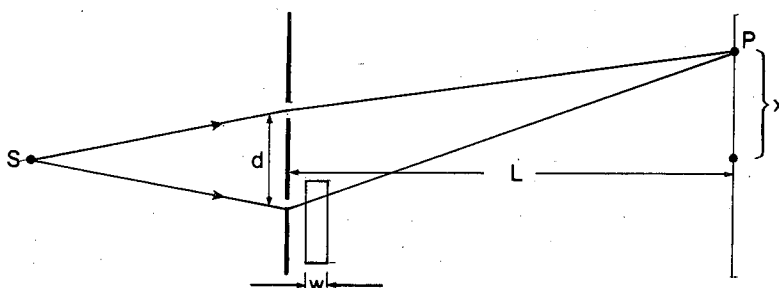
Ασκήσεις

- 1) Δύο μη σύμφωνες φωτεινές πηγές συμβάλλουν πάνω σε ένα πετάσμα. Ποιά είναι η εικόνα συμβολής;
- 2) Δύο επίπεδα κύματα με μήκος κύματος λ και ίση ένταση διασταυρώνονται με γωνία 45° . Υπολογίστε τις κυματικές μορφές που πρόκύπτουν. Ιδιαίτερα βρείτε όλα τα σημεία στα οποία δεν υπάρχει καθόλου κυματική κίνηση.
- 3) Ένα φιλμ από νερό ($n=1.33$) έχει πάχος 3200 \AA . Αν φωτισθεί με λευκό φως που προσπίπτει κάθετα τι χρώμα θα εμφανισθεί στο ανακλώμενο φως;
- 4) Μη ανακλών γυαλί . Συχνά οι φακοί έχουν επένδυση από λεπτά φιλμς διαφανών υλικών , όπως το ($n=1.38$) για να ελαττώνουν την ανάκλαση από την επιφάνεια το γυαλιού, χρησιμοποιώντας συμβολή. Πόσο πάχος επένδυση χρειάζεται που να παράγει ελάχιστη ανάκλαση στο κέντρο του οράτου φάσματος (5500 \AA);
- 5) ΦΡΑΓΜΑΤΑ. Φως μήκους κύματος 6000 \AA πέφτει πάνω σε φράγμα περιθλάσεως που έχει 5000 γραμμές ανά εκατοστόμετρο.
 - (α) Υπολογίστε την απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές γραμμές του φράγματος.
 - (β) Σε ποία γωνία θ αντιστοιχεί η γραμμή πρώτης τάξεως;
 - (γ) Αν ένας φακός εστιακής απόστασης 12 mm . χρησιμοποιηθεί για να εστιάσει το φως πάνω σε ένα πέτασμα, πόση είναι η απόσταση από το κεντρικό μέγιστο πρώτης τάξεως;
- (6) Τρεις στενές σχισμές σε ένα πετάσμα από χαλκό έχουν απόσταση $\delta=4$ εκατοστόμετρα. Μικροκύματα μήκους κύματος $\lambda=3$ χιλιοστόμετρα πέφτουν κάθετα επάνω στο πετάσμα. Υπολογίστε την κατανομή της έντασης που μετριέται πίσω από το πετάσμα.
- (7) Δύο ορθογώνια κομμάτια επιπέδου γυαλιού ακουμπάνε το ένα στο άλλο μεταξύ τους παρεμβάλλουμε ένα λεπτό φύλλο χαρτιού, στη μια μόνο άκρη της

επαφής των δύο γυαλιών, ώστε να σχηματισθεί μια πολύ λεπτή σφήνα αέρα. οι δύο πλάκες φωτίζονται με φως Νατρίου ($\lambda=5900\text{\AA}$) που προσπίπτει κάθετα. Σχηματίζονται δέκα κροσσοί συμβολής ανά εκατοστόμετρο σφήνας. Να βρήτε τη γωνία της σφήνας.

8) Τα κύματα που εκπέμπονται από δύο σημειακές πηγές χωρίζονται από μια απόσταση $\lambda/2$, έχουν διαφορά φάσης π , ενώ κάθε πηγή έχει ένταση I_0 . Να βρείτε την κατανομή έντασης στην εικόνα συμβολής. (Απαντ. $4I_0 \sin^2((\pi/2)\sin\theta)$).

9) Να βρείτε την εγκάρσια απομάκρυνση της κεντρικής κορυφής (Κεντρικός κροσσός) της εικόνας συμβολής που σχηματίζεται από ακτίνες που εξέρχονται από δύο σχισμές, αν μία από τις σχισμές καλύπτεται από ένα επίπεδο πλακίδιο πάχους w , και δείκτη διάθλασης n . Η απόσταση μεταξύ των σχισμών είναι d . (Απαντ. $x=L w(n-1)/d$).



Σχήμα 3.15

10) Να βρείτε την ακτίνα του 5^{ου} δακτυλίου στην εικόνα συμβολής που σχηματίζεται σε ένα συμβολομέτρο Fabry-Perot στο εστιακό επίπεδο ενός φακού με εστιακή απόσταση $f=0.5\text{ m}$. Η απόσταση των καθρεπτών του συμβολομέτρου είναι 1 cm , και το μήκος κύματος της μονοχρωματικής ακτινοβολίας είναι $\lambda=693\text{ nm}$. (Απαντ. 8.3 mm).

11) Για ποιά απόσταση μεταξύ των κατόπτρων σε ένα συμβολομέτρο Fabry-Perot μπορεί η διπλή γραμμή του Νατρίου να διαχωρισθεί ;
($\lambda=589\text{nm}$, $\Delta\lambda=0.6\text{ nm}$).

12) Με τη διάταξη Fabry-Perot (FP) του Σχήματος παίρνουμε με τη βοήθεια μιας φωτοδιόδου την κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας που προκαλείται από σύμφωνη πηγή σαν συνάρτηση της απόστασης d μεταξύ των δύο κατόπτρων του FP . Προσδιορίστε με βάση τα δεδομένα αυτά το άγνωστο μήκος κύματος της ακτινοβολίας (θεωρήστε για τον δείκτη διάθλασης του αέρα $n=1.000285$). Βρείτε το σφάλμα και σχολιάστε ενδεχόμενες βελτιώσεις της διάταξης.

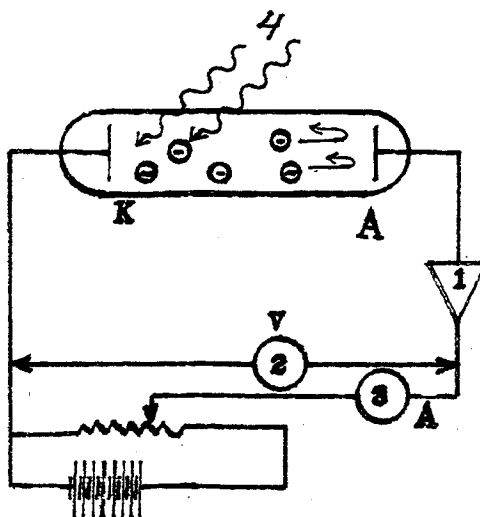
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ

4.1) Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο .

Ας δούμε τώρα ορισμένα φαινόμενα που μας βοηθούν να κατανοήσουμε βαθύτερα τη φύση της ύλης και της ακτινοβολίας. Το **φωτοηλεκτρικό φαινόμενο** αποτελεί ορόσημο για την εδραίωση της κβαντικής φυσικής διότι αναδεικνύει την **σωματιδιακή συμπεριφορά της ακτινοβολίας**. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο παρουσιάζει εξάλλου μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον λόγω του μεγάλου αριθμού εφαρμογών σε ηλεκτροοπτικές διατάξεις ανίχνευσης και αυτόματου έλεγχου (φωτοκύτταρα, φωτοπολλαπλασιαστές κ.ά). Ας δούμε τι συμβαίνει όταν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία αρκετά μικρού μήκους κύματος λ προσπίπτει πάνω σε μια καθαρή μεταλλική επιφάνεια, οπότε παρατηρείται πειραματικά μια εξαγωγή ηλεκτρονίων από την επιφάνεια αυτή. Στο Σχήμα 4.1 φαίνεται σχηματικά μία πειραματική διάταξη για την παρατήρηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. (Για λεπτομέρειες της διάταξης αυτή βλέπετε στο φυλλάδιο των εργαστηριακών ασκήσεων του Τομέα Φυσικής το Ε.Μ.Π.).

Βασικά στο πείραμα αυτό χρειαζόμαστε μια επίστρωση μετάλλου πάνω στο ηλεκτρόδιο Κ, όπως Καλίου και μια μονοχρωματική φωτεινή πηγή . Αυτά τα δύο αρκούν για την **εξαγωγή** των ηλεκτρονίων. Ωστόσο για την παρατήρηση και **ποσοτική** εκτίμηση του αριθμού των εξερχομένων ηλεκτρονίων χρειαζόμαστε τα ακόλουθα : μία λυχνία κενού μέσα στην οποία βρίσκεται η φωτοευαίσθητη επιφάνεια ώστε το ηλεκτρονικό ρεύμα να μην ελαττώνεται λόγω κρούσεων με μόρια του αέρα, μια πηγή σταθερής τάσης, μια ρυθμιστική αντίσταση ώστε να μας επιτρέπει επιλογή της διαφοράς δυναμικού στα δύο ηλεκτρόδια της λυχνίας και τέλος ένα βολτόμετρο και ένα αμπερόμετρο. Όταν λοιπόν **φωτίζουμε** το θετικά φορτισμένο ηλεκτρόδιο Κ, τότε παράγονται ηλεκτρόνια τα οποία εκπέμπονται προς διάφορες κατευθύνσεις, αλλά υπό την επιδράση της εξωτερικά εξασκουμένης διαφοράς δυναμικού μετακινούνται προς



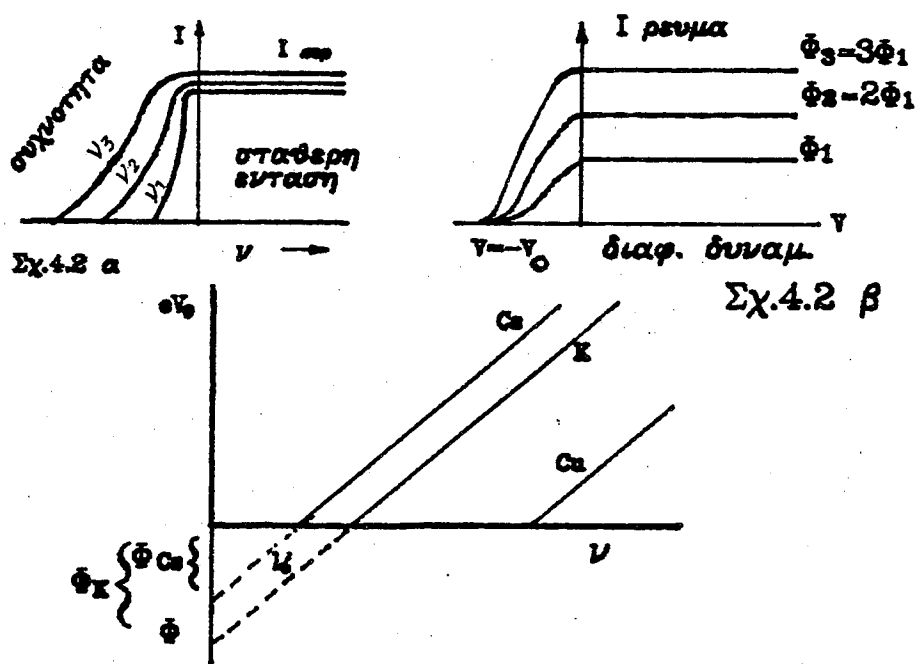
Σχήμα 4.1 Σχηματική παράσταση συσκευή για παρατήρηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου

1. Ενισχυτής, 2. Βολτόμετρο
3. Αμπερόμετρο, 4. Φωτεινή πηγή

το ηλεκτρόδιο A, και έτσι δημιουργείται ένα ρεύμα i του οποίου η συμβατική φορά μέσα στη λυχνία κενού στο Σχήμα 4.1 είναι προς τα αριστερά. Επειδή το ρεύμα i συχνά είναι ασθενικό χρησιμοποιείται και ο ενισχυτής 1. Τα πειραματικά αποτελέσματα φαίνονται στα Σχήμα 4.2α,β,γ. Πως μπορούμε να εξηγήσουμε τα πειραματικά αποτελέσματα στο παραγόμενο **φωτοηλεκτρικό ρεύμα** σα συνάρτηση της συχνότητας (Σχήμα 4.2α), και της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας (Σχήμα 4.2β) . Και τέλος πως εξηγείται η τιμή του **δυναμικού αποκοπής**, δηλαδή της τάσης εκείνης για την οποία μηδενίζεται το ρεύμα, σαν συνάρτηση της συχνότητας (Σχήμα 4.2.γ) που φαίνονται στα Σχήματα αυτά: Ένας τρόπος θα ήταν με τη βοήθεια της **κλασικής** άποψης ότι το φως αποτελεί ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Έτσι θα μπορούσαμε να προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε πως το φως διώχνει ηλεκτρόνια από την επιφάνεια του μετάλλου ως εξής: Το ηλεκτρικό πεδίο E του ηλεκτρομαγνητικού κύματος εξασκεί σε κάθε ηλεκτρόνιο της μεταλλικής επιφάνειας δύναμη ίση με $F = -e E$. Αν δεχθούμε π.χ. ότι η δύναμη είναι ημιτονικής μορφής, τούτο σημαίνει ότι το κάθε ηλεκτρόνιο θα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με διαρκώς αυξανόμενο πλάτος έως ότου το ηλεκτρόνιο αποκτά πλάτος ταλάντωσης ικανό να του επιτρέψει να ξεφύγει από τη μεταλλική επιφάνεια. Τούτο σημαίνει ότι ανεξάρτητα από τη συχνότητα

του προσπίπτοντος φωτός είναι δυνατόν να πετύχουμε εξαγωγή **φωτοηλεκτρονίων** από το μέταλλο αρκεί να φωτίσουμε την επιφάνεια του επί αρκετό χρόνο. Ας δούμε όμως και ας σχολιάσουμε τα πειραματικά αποτελέσματα. Στο Σχήμα 4.2 παρατηρούμε την εξάρτηση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος i για τρεις διαφορετικές συχνότητες προπίπτοντος φωτός.

Για σταθερή φωτεινή ένταση η καμπύλη 4.2α δείχνει ότι για αυξανόμενη τάση V , το ρεύμα i φτάνει σε μια τιμή κόρου, $I_{\text{κορ}}$, που ονομάζεται **ρεύμα κόρου**. Για μηδενική διαφορά δυναμικού, δηλαδή με την απουσία ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των ηλεκτροδίων, το ρεύμα εξακολουθεί να ρέει προς την ίδια κατεύθυνση. Ετσι το ρεύμα παρέχει όχι μόνο αγωγιμότητα, αλλά και μια



Σχήμα 4.2.α,β,γ (α) Φωτοηλεκτρικό ρεύμα σαν συνάρτηση της τάσης (θετική τάση σημαίνει ομαφατικά, το ηλεκτρόδιο Α είναι θετικότερο του ηλεκτροδίου Κ)

(β) Φωτοηλεκτρικό αήμα σαν συνάρτηση της διαφοράς δυναμικού V για τρεις διαφορετικές φωτεινές έντασεις.

(γ) Δυναμικό ανακοπής συνάρτησε της συχνότητας για τρία διαφορετικά είδη μεταλλου.

ηλεκτρεργετική δύναμη. Ακόμη και για μικρές αρνητικές τάσεις, το ρεύμα ρέει στην ίδια κατεύθυνση. Ωστόσο αρχίζει να ελατώνεται, εως ότου τελικά μηδενισθεί, για μια συγκεκριμένη διαφορά δυναμικού η οποία όπως αποδεικνύεται είναι συνάρτηση της συχνότητας (ν_1 , ν_2 , ή ν_3 στο

Σχήμα). Το παράδοξο τούτο από πρώτη άποψη φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί σχετικά εύκολα αν δεχθούμε ότι τα ηλεκτρόνια εξέρχονται με κάποια αρχική κινητική ενέργεια, η οποία διαφέρει από ηλεκτρόνιο σε ηλεκτρόνιο πράγμα που μπορεί να οφείλεται στις διαφορετικές ενέργειες που έχουν τα διάφορα ηλεκτρόνια μέσα στο κρυσταλλικό πλέγμα. Ανεξάρτητα του πόσο σωστή είναι αυτή η εξήγηση (αφήνουμε την σε βάθος μελέτη για το εδάφιο με τις εφαρμογές στο στερεό σώμα), μπορούμε στο πείραμα αυτό να βρούμε τη **μέγιστη κινητική ενέργεια** $E_{\max,k}$ μετρώντας το **ανασχετικό δυναμικό** V_0 στο οποίο μηδενίζεται το φωτοηλεκτρικό ρεύμα (Σχήμα 4.2β). Τότε μπορείτε να δείτε ότι ισχύει:

$$E_{\max,0} = eV_0$$

και η γραφική παράσταση της εξάρτησης της μέγιστης κινητικής ενέργειας $E_{\max,k}$ από την συχνότητα ν του φωτός δίνεται όπως αναφέραμε από το Σχήμα 4.2γ, για διάφορα υλικά φωτοευαίσθητης επιφάνειας. Πρέπει να τονισθεί εδώ ότι τα αποτελέσματα αυτά είναι ανεξάρτητα από τη επιλεγόμενη ένταση I της φωτεινής ακτινοβολίας.

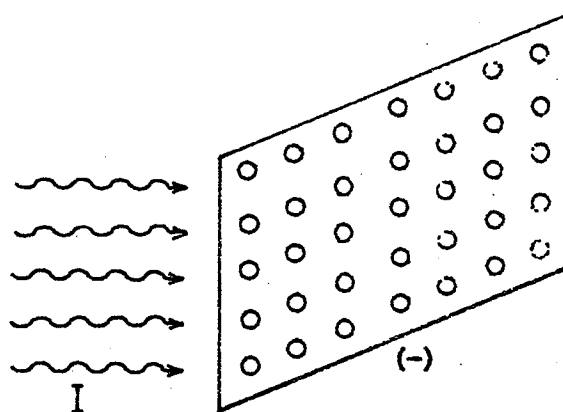
4.2 Προσπάθεια εξήγησης του φωτοηλεκτρικού φαινομένου με κλασική άποψη.

Η κλασική άποψη θα υποστήριζε ότι, επειδή η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία είναι συνεχής, έπεται ότι η εκπομπή ή όχι ηλεκτρονίων από το υλικό εξαρτάται από την ένταση I του φωτός και όχι από την συχνότητα ν . Οι λόγοι είναι οι εξής:

α) Για την εξαγωγή θα αρκούσε π.χ. μια αρμονικής εξάρτησης από το χρόνο δύναμη της μορφής $F = A \cos(\omega t) = -eE$ (1), όπου E η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος. Επειδή όμως η ένταση της ακτινοβολίας είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει ότι το πλάτος απομάκρυνσης εξαναγκασμένων ταλαντώσεων των ηλεκτρονίων θα γίνει τόσο μεγαλύτερο, όσο μεγαλύτερη είναι η ένταση I της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Εδώ θα πρέπει επί πλέον να υποθέσουμε ότι η ενέργεια της προσπίπτουσας ακτινοβολίας μοιράζεται εξ ίσου στα επιφανειακά ηλεκτρόνια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3, και έτσι θα πρέπει να περιμένουμε ταυτόχρονη εξαγωγή πολλών (ή λίγων) ηλεκτρονίων μετά από ορισμένο χρόνο. Έτσι για πολύ χαμηλές έντασεις, όπως π.χ. αν $I = 10^{-10} \text{ W/m}^2$, αναμένουμε φωτοηλεκτρική εκπομπή μετά χρόνο Δt μερικών εκατοντάδων ωρών!! Πειραματικά όμως βρίσκεται ότι $\Delta t = 10^{-9} \text{ s}$, όπως φαίνεται από Σχήμα 4.4.

β) Εκτός όμως του προηγούμενου συλλογισμού που οδηγεί σε πρόβλεψη που

είναι αντίθετη προς το πείραμα, επίσης οι κλασικές ιδέες του ότι το



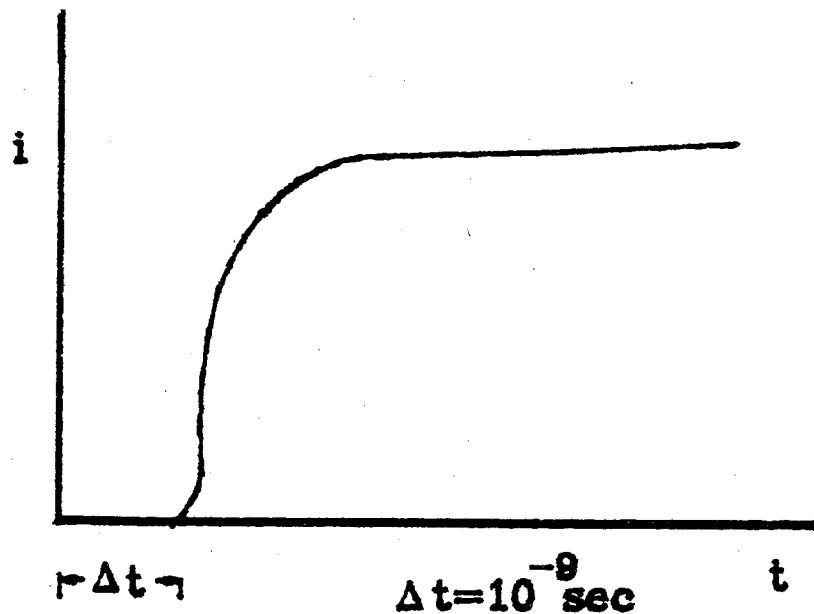
Σχήμα 4.3 Η φωτεινή ένταση της δέσμης μοιράζεται εξίσου στα επιφανειακά της τμήματα φωτοευαίσθητης επιφάνειας.

φωτοηλεκτρικό ρεύμα i είναι ανάλογο της έντασης της φωτεινής δέσμης I δεν μπορούν καθόλου να εξηγήσουν την ύπαρξη συχνότητας αποκοπής ν_0 , διαφορετικής για κάθε υλικό, κάτω της οποίας δεν έχουμε φωτοηλεκτρική εκπομπή ακόμη και για πάρα πολύ μεγάλες εντάσεις I ακτινοβολίας. Ούτε εξηγούν την εμφάνιση της σταθεράς h , ανεξάρτητης υλικού, όπως προκύπτει από την κλίση των πειραματικών καμπυλών (ευθείες!) για καθένα από τα τρία στοιχεία (Cs, K, Cu), ανεξάρτητα από το είδος του υλικού!

4.3 Κβαντική Ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

Για την εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου δεν επαρκούν όπως είδαμε οι απόψεις της κλασικής ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Ο Einstein για την εξήγηση του φαινομένου της εξαγωγής ηλεκτρονίων υπό την επίδραση φωτός θεώρησε ότι το φως αποτελείται από διάκριτα (ασυνεχή) κομμάτια ενέργειας τα οποία ονομάστηκαν "κβάντα" ενέργειας. Εάν το φως είναι "μονοχρωματικό", δηλαδή αποτελείται από ακτινοβολία ενός μήκους κύματος, τότε όλα τα κβάντα ενέργειας είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή $E=h\nu$. Σύμφωνα με τον Einstein η ενέργεια αυτή του ενός κβάντου που στο μέλλον θα το αποκαλούμε πάντοτε φωτόνιο απορροφάται, κατά το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, εντελώς από ένα μόνο ηλεκτρόνιο. Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια του φωτονίου δεν διαχέεται σε πολλά ηλεκτρόνια του μετάλλου αλλά μεταφέρεται σε ένα. Εδώ ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις: Το ηλεκτρόνιο που θα πρωταγωνιστήσει στο συγκεκριμένο γεγονός (εξαγωγή από το μέταλλο) μπορεί

να είναι πολύ κοντά στην επιφάνεια του μετάλλου στην πρώτη περίπτωση ενώ στην άλλη περίπτωση βρίσκεται σε μεγάλο βάθος μέσα στο μέταλλο.



Σχήμα 4.4 Γραφική παράσταση του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και δείχνει την τάξη μεγέθους του χρόνου που απαιτείται για εξαγωγή ενός φωτοηλεκτρονίου από μέταλλο.

Στην δεύτερη αυτή περίπτωση προτού το ηλεκτρόνιο βγει από το μέταλλο θα σπαταλήσει ένα τμήμα της ενέργειας που κέρδισε από το φωτόνιο λόγω διάβασης του μέσα από την πυκνή ύλη του μετάλλου. Ωστόσο στην πρώτη περίπτωση μολονότι πράγματι το ηλεκτρόνιο εξέρχεται με πρακτικά μέγιστη δυνατή ενέργεια, εν τούτοις η ενέργεια αυτή είναι ελαφρώς μικρότερη από την ενέργεια του καθενός προσπίπτοντος φωτονίου. Με άλλα λόγια φαίνεται σαν να υπάρχουν δυνάμεις, στην ακριβή φύση των οποίων θα υπεισεέλθουμε αργότερα, που αντιδρούν στην εξαγωγή του ηλεκτρονίου από το μέταλλο. Ετσι προκειμένου να ξεφύγει ένα ηλεκτρόνιο, πρέπει να καταναλώσει κάποιο έργο ώστε να ξεπεράσει κάποιο ύψος δυναμικής ενέργειας W που θα την ονομάζουμε **Έργο εξαγωγής** του συγκεκριμένου είδους μετάλλου. Αυτό σημαίνει ότι υπερβαίνει κάποια συχνότητα **κατωφλίου** $\nu_0 = W/h$ κάτω από την οποία δεν μπορεί

να εξαχθεί φωτοηλεκτρόνιο ανεξάρτητα από την ένταση I της ακτινοβολίας. Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την εικόνα η μέγιστη κινητική ενέργεια που θα έχουν τα φωτοηλεκτρόνια $E_{\text{κιν,μεγ}}$ θα δίνεται από έκφραση

$$E_{\text{κιν,μεγ}} = h\nu - W = h(\nu - \nu_0) \quad (4.1)$$

Η σχέση 4.1 μπορεί να γραφεί και σαν συνάρτηση του ανασχετικού δυναμικού V το οποίο μετράμε πειραματικά στην εργαστηριακή άσκηση του Σχήματος 4.1 δηλαδή είναι η διαφορά εκείνη δυναμικού που αν εφαρμοσθεί στο κύκλωμα μηδενίζεται το παρατηρούμενο φωτοηλεκτρικό ρεύμα. Είναι χρήσιμο να δείξετε ότι ισχύει

$$V = \frac{h\nu}{e} - \phi = \frac{hc}{e\lambda} - \phi \quad (4.2)$$

όπου το $\phi (=W/e)$ εκφράζει το έργο εξαγωγής αλλά σε μονάδες ηλεκτρικού δυναμικού. Οι Εξισώσεις 4.1 και 4.2 συμφωνούν και με την παρατήρηση ότι όταν ρίχνουμε στην μεταλλική επιφάνεια φως μεγαλύτερης έντασης I δεν προκύπτει μεγαλύτερη μέγιστη κινητική ενέργεια των εξερχομένων φωτοηλεκτρονίων. Σύμφωνα με την υπόθεση των φωτονίων, μια δέσμη μεγαλύτερης έντασης περιέχει απλά μεγαλύτερο αριθμό φωτονίων της ίδιας ενέργειας το καθένα, και άρα αυτή απελευθερώνει μεγαλύτερο αριθμό φωτοηλεκτρονίων χωρίς να μεταβάλλεται η ενεργειακή τους κατανομή. Βέβαια η αναλογία μεταξύ του αριθμού των φωτοηλεκτρονίων και της έντασης μπορεί να εξηγηθεί και με την κυματική θεώρηση του φωτός, αλλά αυτό που δεν μπορεί να εξηγηθεί είναι τόσο η ύπαρξη συχνότητας κατωφλίου όσο και η μέγιστη κινητική ενέργεια που αποκτούν τα φωτοηλεκτρόνια και που είναι συνάρτηση του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

Τέλος ας δούμε ένα ακόμη λεπτό σημείο που αδυνατεί να εξηγήσει η κυματική θεώρηση του φωτός στο παραπάνω πείραμα. Σύμφωνα με την αντίληψη ότι η ενέργεια του φωτός είναι συνεχής, αν ελαττώσουμε πάρα πολύ την ένταση του προσπίπτοντος φωτός ώστε με ισοκατανεμημένη απορρόφηση ενεργείας από κάθε ηλεκτρόνιο της μεταλλικής επιφάνειας, θα ήταν ίσως δυνατόν να πετύχουμε αύξηση του χρονικού διαστήματος μεταξύ της στιγμής που ανοίγουμε την φωτεινή δέσμη ως την εξαγωγή του πρώτου φωτοηλεκτρονίου. Π.χ. το διάστημα αυτό μπορεί να γίνει ίσο με μερικές ώρες. Αντίθετα, με την φωτονική θεώρηση αν έχουμε την ίδια ένταση φωτός επειδή το καθένα ξεχωριστό φωτόνιο της δέσμης δεν μοιράζει την ενέργεια

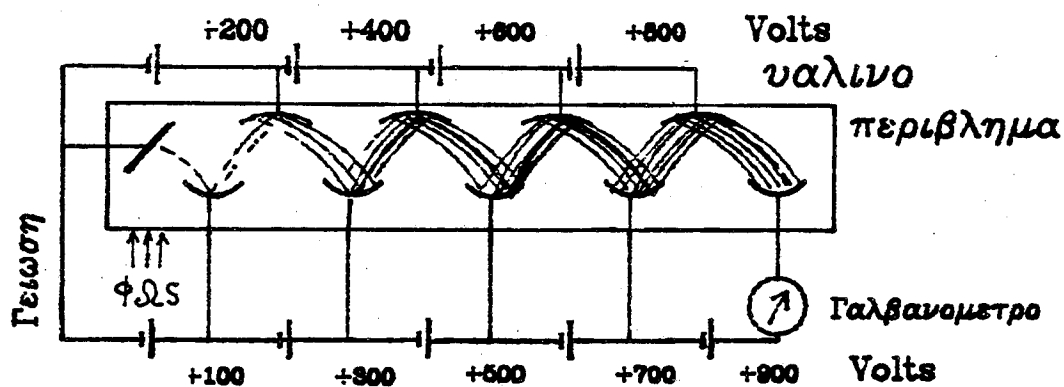
του εξίσου στα ηλεκτρόνια της μεταλλικής επιφάνειας αλλά αντίθετα έχει πεπερασμένη πιθανότητα να αλληλεπιδράσει με ένα μόνο από τα ηλεκτρόνια αυτά και να απορροφηθεί τελείως από αυτό ώστε να συμβεί φωτοηλεκτρική εκπομπή. Ένας αντίστοιχος υπολογισμός δίνει πολύ μικρότερο χρονικό διάστημα της τάξης 3×10^{-9} sec. μετά τον αρχικό φωτισμό (Βλ. E.O. Lawrens and J.W. Beam Phys. Rev. 32, 478 (1928)). Επομένως και το δεδομένο αυτό συνειγορεύει υπέρ της ύπαρξης των φωτονίων.

Με το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο επιβεβαιώνεται η κβαντισμένη φύση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, δηλαδή το γεγονός ότι η φωτεινή ενέργεια από μια φωτεινή πηγή μεταδίδεται κατά διακριτά τμήματα ενέργειας. Η μέχρι τώρα λοιπόν πειραματική μαρτυρία δεν υποστηρίζει εντελώς την σωματιδιακή εικόνα του φωτονίου διότι ένα κινούμενο σωματίδιο δεν χαρακτηρίζεται μόνο από την κινητική του ενέργεια αλλά και από την ορμή του. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δεν λέει πολλά πράγματα για την ύπαρξη ή μη ορμής του φωτονίου δεδομένου ότι το φυτόνιο στην περίπτωση αυτή αλληλεπιδρά με ένα ηλεκτρόνιο του μετάλλου το οποίο δεν είναι τελείως ελεύθερο από τις ενδεχόμενες δυνάμεις που ασκούνται πάνω του από το υπόλοιπο κρυσταλλικό πλέγμα. Έτσι δεν έχουμε εδώ μια σκέδαση δύο σωματιδίων (φωτόνιο-ηλεκτρόνιο) και συνεπώς δεν μπορούμε να μετρήσουμε την ορμή του φωτονίου. Πειραματική ένδειξη για την ύπαρξη της ορμής του φωτονίου παίρνουμε από το φαινόμενο Compton που θα μελετήσουμε στο επόμενο εδάφιο.

4.4 Εφαρμογές του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

Το γεγονός ότι το φωτοηλεκτρικό ρεύμα είναι ανάλογο προς τη ένταση της ακτινοβολίας για δεδομένο μήκος κύματος καθιστά το φωτοηλεκτρικό κύκλωμα (φωτοκύτταρο) βολικό και ακριβές φωτόμετρο. Για ερευνητικούς σκοπούς χρησιμοποιείται μια παραλλαγή του φωτοκυττάρου γνωστού ως **φωτοπολλαπλασιαστής**. Όμως ο φωτοπολλαπλασιαστής είναι συνδυασμένη εφαρμογή του φωτοηλεκτρικού φαινομένου και το φαινόμενου **δευτερογενούς ηλεκτρονικής εκπομπής**. Όταν φως πέφτει στην φωτοκάθοδο παράγονται φωτοηλεκτρόνια, τα οποία στον φωτοπολλαπλασιαστή επιταχύνονται σε ένα δυναμικό της τάξης των 100 Volt μεταξύ της φωτοκαθόδου και της πρώτης **δυνόδου**. Τότε δύο είδη φαινομένων μπορούν να συμβούν: είτε η επιφάνεια της δυνόδου, δηλαδή του κατά 100 Volt θετικότερου ηλεκτροδίου από την κάθοδο απορροφά τα προσπίπτοντα φωτοηλεκτρόνια και τα αφήνει να ρέουν ως "ηλεκτρόνια αγωγιμότητας" ή τα προσπίπτοντα φωτοηλεκτρόνια μπορεί να

εκτινάζουν νέα ηλεκτρόνια τα οποία λέγονται "δευτερογενή ηλεκτρόνια" από την επιφάνεια της δυνόδου. Αν οι επιλογές συνθηκών και υλικών των δυνόδων είναι ευνοϊκές, τότε περισσότερα ηλεκτρόνια από αυτά που προσπίπτουν εκτινάζονται, έτσι ώστε να προκύπτει ένα ηλεκτρικό ρεύμα που ρέει αντίθετα προς το προσπίπτον ρεύμα ηλεκτρονίων και μάλιστα να είναι ισχυρότερο από το φωτορεύμα μεταξύ φωτοκαθόδου και πρώτης δυνόδου. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ενίσχυση ενός αρχικού πάρα πολύ ασθενικού φωτοηλεκτρικού ρεύματος. Το Σχήμα 4.5 δείχνει μια τέτοια πειραματική διάταξη που λέγεται "φωτοπολλαπλασιαστής". Ενώ η φωτοηλεκτρική επιφάνεια (φωτοκάθοδος ϕ) εκπέμπει ένα πάρα πολύ ασθενικό ρεύμα, κάθε δευτερογενής εκπομπός (δύνοδος) πολλαπλασιάζει το ρεύμα έτσι ώστε η συνολική ενίσχυση που προκύπτει να είναι της τάξης του 10^6 ή 10^7 . Οι πιο μοντέρνοι φωτοπολλαπλασιαστές μπορούν με κατάλληλη σχεδίαση να ανιχνεύουν ακόμη και μεμονωμένα φωτόνια αρκεί να συμβεί φωτοηλεκτρικό φαινόμενο στην



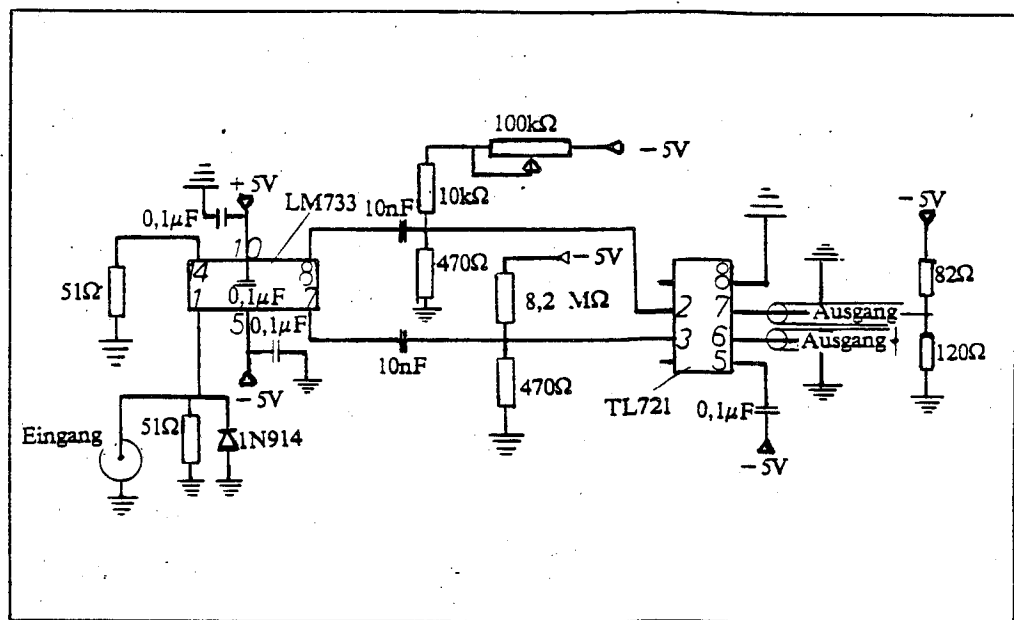
Σχήμα 4.5 Σχηματική παράσταση φωτοπολλαπλασιαστή.

φωτοκάθοδο. Αυτοί λειτουργούν με παλμό εξόδου που προκύπτει στην έξοδο του φωτοπολλαπλασιαστή και οφείλεται σε ένα μεμονωμένο φωτόνιο έχει διάρκεια της τάξης 10 nsec. Αυτός ενιχύεται με έναν video amplifier, και στη συνέχεια υφίσταται κατεργασία ενός κυκλώματος διευκρινιστή συγκριτή που σκοπό έχει να διώξει παλμούς που αντιστοιχούν σε θόρυβο και όχι σε γνήσια φωτοηλεκτρόνια. Ο εξερχόμενος παλμός είναι τότε κωδικοποιημένος τετραγωνικός παλμός και μπορεί να καταμετρηθεί ως αντιστοιχών σε ένα φωτόνιο. Το λογικό διαγράμμα της διαδικασίας αυτής φαίνεται στο Σχήμα 4.6

4.5 Εφαρμογές του φωτοηλεκτρικού φαινομένου στη φωτογραφία.

Το φωτογραφικό γαλάκτωμα και η αλληλεπίδραση του με το φως :

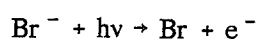
Τα πλέον ευαίσθητα φωτογραφικά υλικά είναι εκείνα που περιλαμβάνουν ένα αιώρημα silver halide υπό την μορφή "γαλακτώματος" γνωστού σαν ζελατίνα. Στο γαλάκτωμα αυτό μπορούν να προστίθενται ορισμένα άλλα υλικά με σκοπό να αυξήσουν την ευαισθησία του φιλμ ή να τροποποιήσουν την φασματική του απόκριση. Το silver halide είναι φωτοχημικώς ενεργό και κατά την έκθεση του σε φως κατάλληλου μήκους κύματος και επαρκούς έντασης παράγεται η λεγόμενη "λανθάνουσα εικόνα" (latent image). Όταν συμβαίνει αυτό τότε το αντίστοιχο silver halide υφίσταται πιο εύκολα αναγωγή παρά το μη εκτεθέν silver halide όταν υφίσταται αργότερα την επίδραση καποιου παράγοντα αναγωγής. Η αναγωγή (εμφάνιση) μπορεί να διακοπεί με τη βοήθεια καποιας κατάλληλης ουσίας (stopper), και το υπόλοιπο silver halide



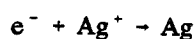
Σχήμα 4.6 Παράσταση σχηματική καταμέτρησης μεμονωμένων φωτονίων από φωτοπολλαπλασιαστή και ηλεκτρονικό κύκλωμα αναγωγής. (Διπλωματική εργασία J.Werner, Univ. Wuppertal 1989)

μπορεί να απομακρυνθεί από το γαλάκτωμα με το fixating, αφήνοντας μια εικόνα από μεταλλικό άργυρο. Τα τελευταία βήματα στην φωτογραφική διεργασία είναι πλύσιμο του γαλακτώματος για την απομάκρυνση διαφόρων υλικών που είναι απαραίτητα για τη διεργασία και η ξήρανση.

Το αλογονίδιο του αργύρου που έχει τη σπουδαιότερη σημασία για την φωτογραφική διεργασία είναι ο βρομιούχος αργύρος μολονότι τα γαλακτώματα είναι δυνατόν να περιέχουν μικρό ποσοστό ιοδιούχου αργύρου. Ο βρομιούχος αργύρος βρίσκεται στο γαλάκτωμα υπό την μορφή εξαιρετικά λεπτών κρυστάλλων (κόκκων). Ο βρομιούχος άργυρος είναι ιονικός κρύσταλλος με θετικά φορτισμένα ιόντα αργύρου. Υπάρχουν σημαντικές ενδείξεις ότι η λανθάνουσα εικόνα στην πραγματικότητα συνίσταται από άτομα αργύρου, τα οποία λειτουργούν ως καταλύτες στην αναγωγή του άμεσα σχετιζόμενου βρομιούχου αργύρου. Τέτοιος άργυρος λανθάνουσας εικόνας πιθανόν σχηματίζεται με αντιδράσεις φωτολυσης του τύπου:

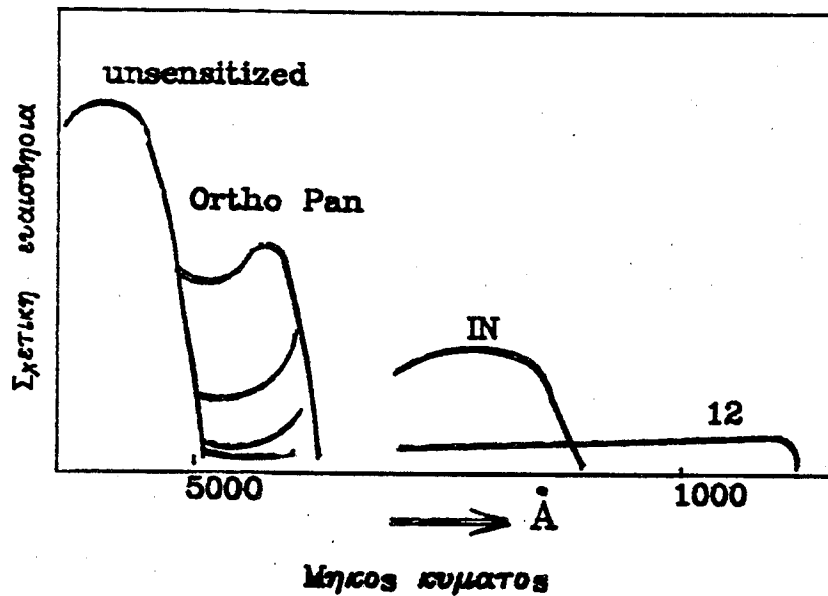


και



όπου $h\nu$ είναι ένα κβάντο ακτινοβολίας και e^- είναι ένα ηλεκτρονίο. Η θεωρία που διατυπώθηκε για το σχηματισμό της λανθάνουσας εικόνας είναι εκείνη των Gurney και Mott (1938). Κατά τη θεωρία τους οι κρύσταλλοι του βρομιούχου αργύρου παρουσιάζουν φωτοαγωγιμότητα: τόσο τα φωτοηλεκτρόνια όσα και τα ιόντα αργύρου είναι ευκίνητα, και σε ορισμένες θέσεις μέσα ή πάνω στον κρύσταλλο ενώνονται για να σχηματίσουν ένα στοιχείο αργύρου. Η θεωρία εξελίχθηκε από τον Berg (1948) και τους Mitchell και Mott (1957). Σύμφωνα με την θεωρία των Mitchell και Mott η ελάχιστη σταθερή λανθάνουσα εικόνα συνίσταται από τέσσερα άτομα αργύρου με ένα μοναδιαίο θετικό φορτίο (Ag^{+4}) και απαιτεί ένα ακόμη φωτοηλεκτρόνιο για τον σχηματισμό της. Τα παραπάνω ισχύουν για φως μήκους κύματος 4000 Angstroms. Από πειραματικές μαρτυρίες (Nebb 1948) για το παραπάνω μήκος κύματος, χρειάζονται περίπου 10 κβάντα να απορροφηθούν από έναν κόκκο για τον σχηματισμό ενός τμήματος λανθάνουσας εικόνας.

Από δεδομένα αυτού το είδους μπορεί να προκύψει η ευαισθησία της φωτογραφικής διεργασίας. Η απόκριση σε κβαντική αποδοτικότητα ενός απαριθμητή ορίζεται σαν το λόγο του αριθμού των γεγονότων καταμέτρησης προς τον αριθμό των γεγονότων που πραγματικά συμβαίνουν. Έτσι η θεωρία των Mitchell-Mott προβλέπει 33 τα εκατό αποδοτικότητα ενώ οι παρατηρήσεις του Webb υποδηλώνουν αποδοτικότητα γύρω στα 10 τα εκατό. Υπάρχουν όμως πρόσθετα φαινόμενα που ελλοτώνουν την πρακτική αποδοτικότητα (ανάκλαση, διάθλαση, σκέδαση φωτός από το γαλάκτωμα, απορρόφηση στη ζελατίνα).



Σχήμα 4.7 Σχετική ευαισθησία τύπων φωτογραφικών φιλμ σαν συνάρτηση του μήκους κύματος ακτινοβολίας.

Ετσι μόνο 10 τα εκατό των φωτονίων απορροφώνται από κόκκους βρομιούχου αργύρου. Ετσι η μέγιστη αποδοτικότητα περιορίζεται σε 1-3 τα εκατό. Και τούτο υπό την προϋπόθεση ότι όλα τα κβάντα που απορροφούνται από τον κόκκο χρησιμοποιούνται για σχηματισμό λανθάνουσας εικόνας και κανένας κόκκος δεν απορροφά περισσότερα από τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό φωτονίων. Επειδή στην πράξη αυτό σπάνια συμβαίνει, οι συνηθισμένες κβαντικές αποδοτικότητες είναι της τάξης του 0.1 τα εκατό. Η αποδοτικότητα αυτή έχει μια φασματική εξάρτηση και για διάφορους τύπους φωτογραφικού φιλμ φαίνεται στο Σχήμα 4.7. Η αποκοπή σε χαμηλά μήκη κύματος οφείλεται στην απορρόφηση του φωτός από τη ζελατίνη. Είναι δυνατόν με κατάλληλο τύπο υποστρώματος να επεκταθεί η ευαισθησία και σε χαμηλά μήκη κύματος (περιοχή XUV ή περιοχή ακτίνων X)

4.6 ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ COMPTON

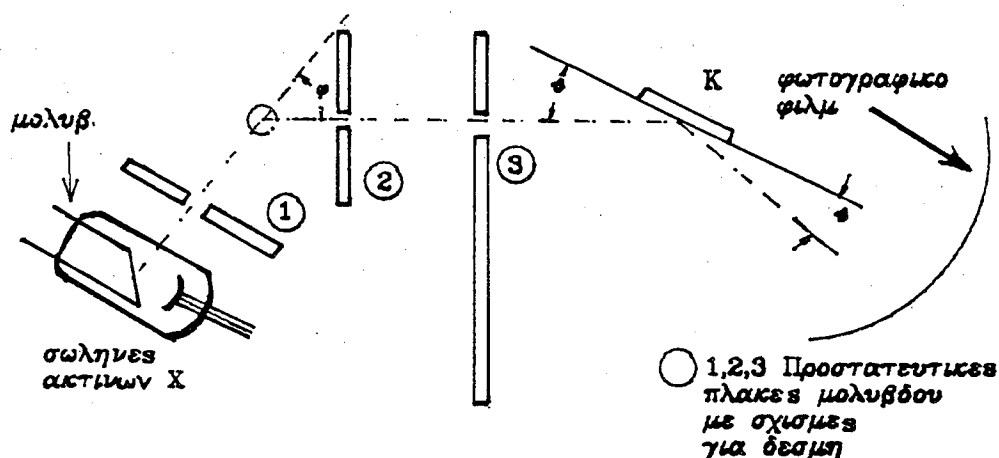
Ενδιαφέροντα φαινόμενα αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας με ύλη μπορούν να παρατηρηθούν με την χρησιμοποίηση ακτίνων X μικρού μήκους κύματος. Αυτές μπορούν να παραχθούν όταν επιταχύνουμε ηλεκτρόνια με μια μεγάλη διαφορά δυναμικού, π.χ. 10-50kV και με αυτά βομβαρδίσουμε μεταλλικούς στόχους. Τότε με την επιβράδυνση των ηλεκτρονίων από το μεγάλο πυρηνικό ηλεκτρικό πεδίο των ατόμων του μετάλλου προκύπτουν ακτινοβολίες πέδησης (Bremsstrahlung,

Γερμανική λέξη για το : ακτινοβολία επιβράδυνσης) . Το φάσμα αυτής της ακτινοβολίας είναι συνεχές και καλύπτει ένα ευρύ φάσμα μηκών κύματος. Με χρησιμοποίηση ακτίνων Χ μπορεί να εκτελέσει κανείς πειράματα σκέδασης ακτίνων αυτού του είδους με ελεύθερα ηλεκτρόνια. Μια σειρά πειραμάτων αυτού του είδους έγιναν από τον A.H.Compton μεταξύ του 1919 και 1923. Προτού παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων , ας δούμε τι αναμένουμε από την κλασική θεώρηση της ακτινοβολίας Χ , ότι δηλαδή πρόκειται για ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίου η ενέργεια μεταδίδεται με συνεχή τρόπο. Όμως όπως γνωρίζουμε από την κυματική, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταφέρουν ορμή . Ενας τρόπος με τον οποίο μπορεί να διαπιστωθεί μια έγκυρη μαρτυρία για την ύπαρξη της ορμής θα ήταν να πετύχουμε σκέδαση ενός φωτονίου ελεύθερο ηλεκτρόνιο . Η ύπαρξη τέτοιου είδους σκέδασης θα μας έδινε μια πρόσθετη εκδήλωση που χαρακτηρίζει την συμπεριφορά των σωματιδίων και είναι εκείνη της ικανοποίησης της αρχής της διατήρησης της ορμής. Αντίθετα το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο έδειξε ότι τα φωτόνια ικανοποιούν την αρχή της διατήρησης της ενέργειας χωρίς να μπορεί να δώσει πληροφορίες για την ικανοποίηση ή όχι της αρχής της διατήρησης της ορμής. Θα εξετάσουμε λοιπόν τώρα τα πειράματα εκείνα που καταδείχνουν την ύπαρξη ορμής και θα δούμε τώρα ότι πρέπει να θεωρήσουμε ταυτόχρονα τόσο την έννοια της ορμής όσο και την έννοια της ενέργειας του.

Πριν περιγράψουμε τα πειραματικά αποτελέσματα ας εξετάσουμε τι συμπεριφορά θα περιμέναμε να έχει ένα φωτόνιο κατά τη διαδικασία σκέδασης από ένα εμπόδιο. Ως τώρα λόγω της σχέσης του Planck έχουμε $E=hn$. Η σχέση όμως μεταξύ ενέργειας φωτονίου και ορμής του ποιά είναι ; Όπως είναι γνωστό από την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία, αν μια ενέργεια ηλεκτρομαγνητικού κύματος E απορροφηθεί τελείως από ένα σώμα τότε θα μεταδοθεί σε αυτό ορμή ίση προς E/c , δηλαδή ισχύει η σχέση $E=cp$ μεταξύ ατης ενέργειας E και της ορμής p που μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Ας δεχθούμε λοιπόν ότι ένα φωτόνιο αλληλεπιδρά με ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Τότε μπορούμε να κάνουμε την εξής παρατήρηση : το φωτόνιο δεν είναι δυνατόν να απορροφηθεί τελείως από το ηλεκτρόνιο με αύξηση της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου. Αν αυτό συνέβαινε τότε μπορεί να αποδειχθεί εύκολα (βλ. Άσκηση 4.9) ότι θα την παραβιαζόταν η διατήρηση της ενέργειας και ορμής. Απλά τώρα δίνουμε την απλοϊκή εξήγηση ότι στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ένα μέρος της ανταλλαγής που επιτρέπει την διατήρηση της ορμής. Επειδή όμως τούτο δεν συμβαίνει στην περίπτωση των

ελευθέρων ηλεκτρονίων δεν έχουμε την απαραίτητη εξισορρόπηση της ορμής. Πράγματι πειραματικά δεν έχει παρατηρηθεί πλήρης απορρόφηση ενός φωτονίου από ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Αντίθετα στο λεγόμενο φαινόμενο Compton ένα φωτόνιο σκεδάζεται ελαστικά από ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο, ενώ ταυτόχρονα η συχνότητα του φωτονίου μετά τη σκέδαση είναι μικρότερη εκείνης του προσπίπτοντος φωτονίου. Ας δούμε όμως τώρα από πιο κοντά τα πειράματα του Compton και τα αποτελέσματα πιο λεπτομερώς.

Η συσκευή που χρησιμοποιήθηκε από τον Compton και τους συνεργάτες του φαίνεται διαγραμματικά στο Σχήμα 4.8α. Οι ακτίνες X που προκύπτουν από το σωλήνα ακτίνων X και η προκύπτουσα δέσμη ακτίνων X κατευθύνεται προς ένα υλικό σκέδασης (στόχος) Σ .



Σχήμα 4.8α Σχηματική πειραματική διάταξη για παρατήρηση και καταγραφή σε φωτογραφικό φιλμ σκέδασης Compton

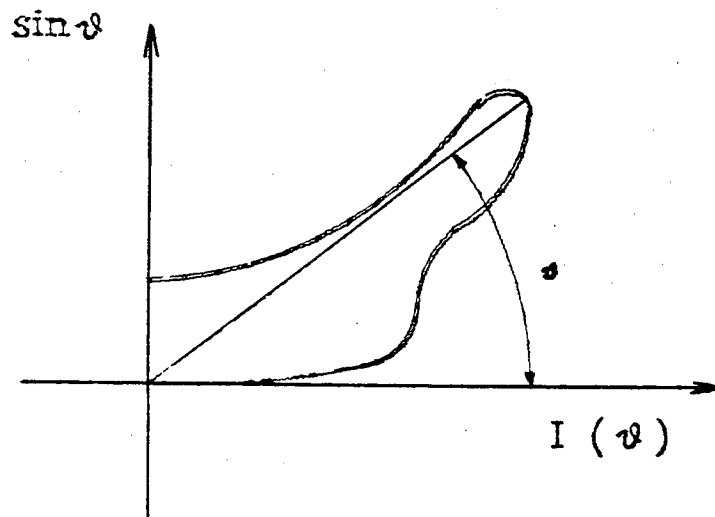
Η δέσμη σχηματίζει γωνία φ με την κατεύθυνση στην οποία είναι τοποθετημένος ο κρύσταλλος K. Προτού τοποθετήσουμε τον σωλήνα ακτίνων X σε τέτοια θέση ώστε η γωνία φ να έχει τυχούσα τιμή τον τοποθετούμε έτσι ώστε η κατεύθυνση της δέσμης να είναι οριζόντια, δηλαδή είναι $\varphi=0$. Στην περίπτωση αυτή απομακρύνουμε τον στόχο Σ και στρέφουμε αργά τον κρύσταλλο K. Βρίσκουμε ότι για μια συγκεκριμένη τιμή της γωνίας θ για την οποία ισχύει η σχέση Bragg για σκέδαση ακτίνων X από κρυστάλλους, παρατηρούμε στο φωτογραφικό φιλμ ένα μέγιστο αμαύρωσης, δηλαδή ένα

μέγιστο της έντασης ακτινοβολίας X . Με βάση τη σχέση Bragg μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το μήκος κύματος λ της ακτινοβολίας X , έστω λοιπόν ότι βρίσκουμε λ_0 . Ακριβέστερα αν παραστήσουμε γραφικά την ένταση της ακτινοβολίας που προκύπτει με βάση τον βαθμό αμαύρωσης του φιλμ σαν συνάρτηση του $\sin\theta$ προκύπτει πειραματικά η καμπύλη του Σχήμα 4.8β. Επειδή όμως υπάρχει μια αντιστοιχία μία προς μία μεταξύ του $\sin\theta$ και του μήκους κύματος της ακτινοβολίας X λόγω της σχέσης Bragg, μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά την ένταση της ακτινοβολίας πάνω στο φιλμ σαν συνάρτηση του μήκους κύματος που αντιστοιχεί σε κάθε μετρούμενη γωνία θ . Έτσι προκύπτει το διάγραμμα του Σχήματος 4.9. Τώρα πρέπει να θεωρήσετε σαν δεδομένο (βλ. σκέδαση ακτινοβολίας X από κρυστάλλους) ότι ο κρύσταλλος K μαζί με το φωτογραφικό φιλμ αποτελούν στην πραγματικότητα ένα φασματογράφο που μας δίνει την ποσοστιαία κατανομή της ακτινοβολίας X στα διάφορα μήκη κύματος. Αν δηλαδή αλλάξει η φασματική κατανομή της προσπίπτουσας ακτινοβολίας στα διάφορα μήκη κύματος αυτό θα διαπιστωθεί με μεταβολή της εικόνας αμαύρωσης πάνω στο φωτογραφικό φιλμ.

Στη συνέχεια επαναφέρουμε τον στόχο Σ στην αρχική θέση και μετακινούμε τον σωλήνα ακτίνων X έτσι ώστε να προκύπτει μια άλλη γωνία φ . Επαναλαμβάνουμε τότε την ίδια αργή σάρωση των γωνιών θ στρέφοντας πάλι αργά τον κρύσταλλο K ώστε να πάρουμε το νέο φάσμα της έντασης της ακτινοβολίας που πέφτει πάνω στο φωτογραφικό φιλμ σαν συνάρτηση της γωνίας θ η ισοδύναμα, όπως αναφέραμε πιο πάνω, πάνω στο φιλμ.

Το πειραματικό φάσμα για $\varphi=45^\circ$ είναι της μορφής του Σχήματος 4.9.β). Τα φάσματα των Σχήμα 4.9.γ,δ αντιστοιχούν σε γωνίες $\varphi=90^\circ$ και $\varphi=135^\circ$ αντίστοιχα.

Μπορούμε ποιοτικά να παρατηρήσουμε ότι ένα εμφανές αποτέλεσμα αυτών των πειραματικών διαγραμμάτων είναι ότι η ακτινοβολία X όταν σκεδάζεται από ελεύθερα ή σχεδόν ελεύθερα ηλεκτρόνια (πιο ακριβή διατύπωση του τι εννοούμε λέγοντας ελεύθερα ηλεκτρόνια όταν αυτά βρίσκονται μέσα στο στόχο θα δώσουμε σε λίγο) τότε σαν αποτέλεσμα της σκέδασης αυτής προκύπτει ακτινοβολία που έχει διαφορετικό μήκος κύματος από εκείνο της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Μια πρόσθετη παρατήρηση είναι ότι η δεύτερη κορυφή στο φάσμα της έντασης της ακτινοβολίας μετατοπίζεται προς τα δεξιά προς ολοένα και μεγαλύτερα μήκη κύματος όσο αυξάνει η γωνία φ από 0 ως 180° . Επίσης παρατηρούμε ότι σε οποιοδήποτε από τα σχήματα 4.9, το ένα από τα δύο μέγιστα της ακτινοβολίας αντιστοιχεί πάντα σε μήκος κύματος λ_0 , ίδιο δηλαδή με εκείνο της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.



Σχήμα 4.8β Διάταξη για την μέτρηση του μήκους κύματος των ακτίνων X , λ_0 , από τη σχέση $m\lambda_0 = d\sin\theta$, d , m σταθερά πλέγματος και $m=1$, μπορεί να προκύψει το μήκος κύματος της ακτινοβολίας X .

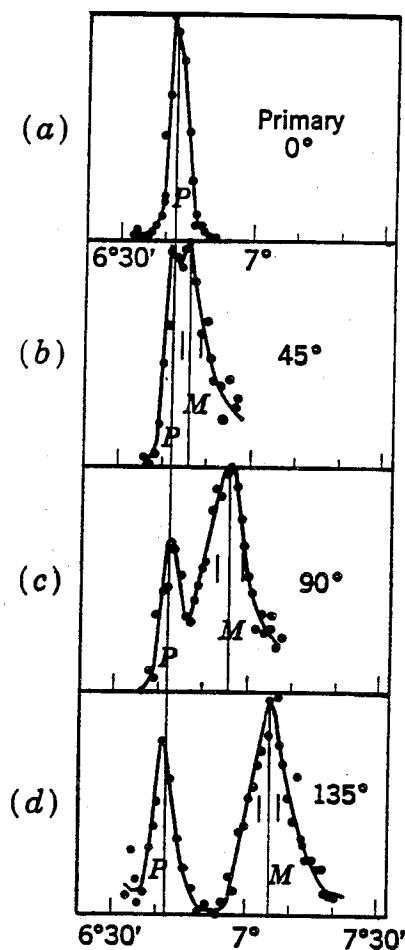
4.6.1 Φαινομενολογική εξήγηση του φαινομένου από τον Compton:

Ο Compton βρήκε για το δεύτερο μέγιστο της φασματικής κατανομής του μήκους κύματος λ της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας από τον στόχο Σ την παρακάτω εμπειρική σχέση:

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\phi) \quad (4.4)$$

όπου η τιμή που έπρεπε να εκλεγεί ώστε η σχέση 4.4 να ταιριάζει με τα πειραματικά δεδομένα ήταν $\lambda_c = 2.43 \times 10^{-12}$ m. Προφανώς το επόμενο μας καθήκον είναι να μπορέσουμε να ερμηνεύσουμε τόσο τα δεδομένα των φασματικών κατανομών του Σχήμα 4.9, δηλαδή να βρούμε την εξήγηση τους με βάση τις αρχές της φυσικής. Θα εξετάσουμε πρώτα λοιπόν την δυνατότητα να εξηγήσουμε την εμπειρική σχέση του Compton με βάση την υπόθεση ότι οι ακτίνες X συμπεριφέρονται στο παρόν πείραμα σαν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και θα διαπιστώσουμε ότι τούτο οδηγεί σε συμπεράσματα που έρχονται σε καταφανή αντίθεση με τα αποτελέσματα του πειράματος αυτού. Στη συνέχεια θα δούμε ότι υπάρχει μια πρακτικά πλήρης συμφωνία με το πείραμα αυτό όταν θεωρήσουμε ότι οι ακτίνες X συμπεριφέρονται σαν φωτόνια, έχουν δηλαδή κβαντισμένη ενέργεια και ταυτόχρονα έχουν σωματιδιακή άποψη για τα φωτόνια, το γεγονός δηλαδή ότι έχουν

συγκεκριμένη ορμή και συμμετέχουν σε ελαστικές κρούσεις με ηλεκτρόνια.



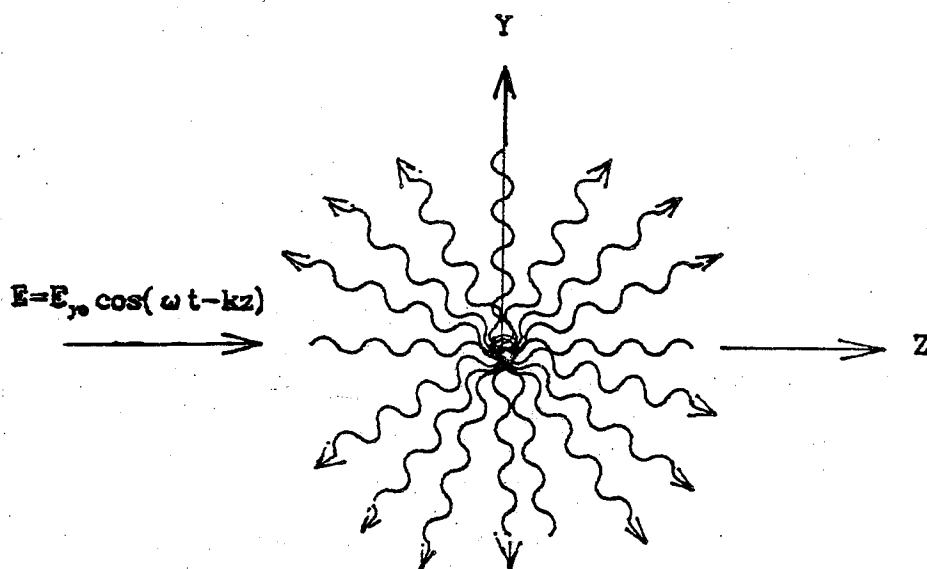
Σχήμα 4.9. α, β, γ, δ.

4.7 Κλασική Ερμηνεία του Φαινομένου Compton.

Εστω ότι η προσπίπτουσα ακτινοβολία X έχει στο φαινόμενο Compton ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά και επειδή στο συγκεκριμένο πείραμα είναι κατά προσέγγιση μονοχρωματική έστω ότι περιγράφεται από ένα αρμονικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα κυκλικής συχνότητας ω , όπως στο Σχήμα 4.8. Αν τώρα δεχθούμε ότι το μέγεθος ενός ηλεκτρονίου με το οποίο συγκρούεται το κύμα αυτό είναι πολύ μικρότερο του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, τότε η επιτάχυνση a που θα υφίσταται λόγω της συνιστώσας y , π.χ., του ηλεκτρικού πεδίου το κύματος $E_y = E_{y0} \cdot \cos(\omega t - kz)$, θα είναι:

$$\alpha = \alpha_y = E_y \frac{e}{m_e} = \alpha_{oy} \cos(\omega t - kz) \quad (4.5)$$

Εφ' όσον λοιπόν το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται είναι γνωστό από τον ηλεκτρομαγνητισμό ότι θα εκπέμπει μια ακτινοβολία της ίδιας συχνότητας με της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και μάλιστα αυτή θα εκπέμπεται προς όλες τις κατευθύνσεις του επιπέδου xy , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.10. Η ένταση της ακτινοβολίας είναι ανεξάρτητη της γωνίας θ , αν το κύμα είναι γραμμικά πολωμένο προς την κατεύθυνση y , ενώ για μη πολωμένο κύμα η ένταση της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας εξαρτάται από τη γωνία θ , αλλά εντοπίζεται όλη στην ίδια περιοχή συχνότητας, ίδια με την προσπίπτουσα. Η κλασική αυτή εικόνα σκέδασης θα συμφωνούσε με τα πειραματικά αποτελέσματα αν η προσπίπτουσα ακτινοβολία ήταν στην ορατή περιοχή ή είχε ακόμη μεγαλύτερο μήκος κύματος και έπεφτε π.χ. πάνω σε έναν καθρέπτη. Τότε γνωρίζουμε ότι πράγματι το σκεδαζόμενο φως δεν υφίσταται καμιά αλλαγή συχνότητας. Η θεώρηση όμως της ακτινοβολίας X σαν ηλεκτρομαγνητικής σαφώς δίνει διαφορετικές προβλέψεις (αμετάβλητη



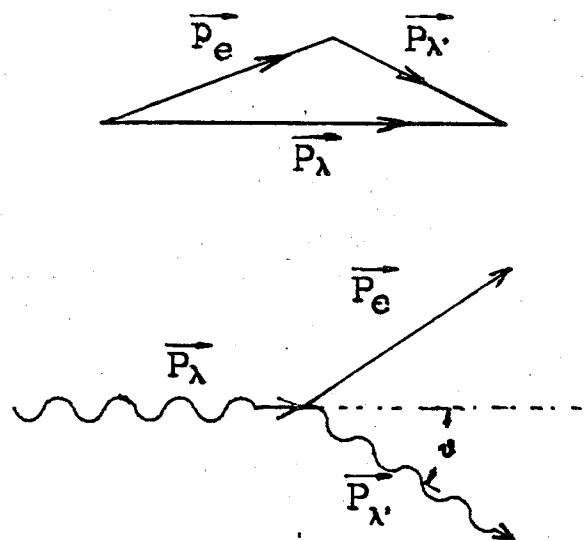
Σχήμα 4.10 Πολωμένο κύμα με επίπεδο πολωσης // προς τον άξονα προσπίπτει πάνω σε ελεύθερο ηλεκτρόνιο.

συχνότητα) όσον αφορά τη σκέδαση της από ελεύθερα ηλεκτρόνια (η σκεδαζόμενη συχνότητα εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης). Αρα η κλασική

θεωρία αδυνατεί να εξηγήσει το πείραμα αυτό.

4.8 Κβαντική Ερμηνεία του Φαινομένου Compton.

Σύμφωνα με την κβαντική ερμηνεία το φαινόμενο της σκέδασης Compton οφείλεται σε ελαστική κρούση ενός φωτονίου της δέσμης των ακτίνων X και ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου. Πως όμως μπορούμε να λέμε ότι μέσα στο μεταλλικό στόχο του πειράματος του Compton υπήρχαν ελεύθερα ηλεκτρόνια: Οποσδήποτε ένα ηλεκτρόνιο μετάλλου είναι δέσμιο μέσα στο μέταλλο με κάποια ενέργεια σύνδεσης, γιατί άλλοστε δεν είναι εύκολο να αποσπάσουμε ηλεκτρόνια από αυτό. Όμως η ενέργεια των ακτίνων X είναι εξαιρετικά μεγάλη, ίσως αρκετές χιλιάδες φορές μεγαλύτερη από το ελάχιστο έργο που πρέπει να καταβάλλουμε για να απελευθερώσουμε ηλεκτρόνια από ένα μέταλλο (έργο εξαγωγής). Επομένως παρά την σύνδεση ενός τέτοιου ηλεκτρονίου με το μέταλλο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτό συμμετέχει σαν πρακτικά ελεύθερο σωματίδιο σε συγκρούσεις με ακτίνες X. Τούτο επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι ο συντελεστής λ_c της πειραματικής σχέσης (4.4) είναι ανεξάρτητος από το είδος του μετάλλου που χρησιμοποιείται σαν στόχος στο πείραμα Compton. Η άποψη λοιπόν ότι τα φωτόνια της ακτινοβολίας X συμμετέχουν σε ελαστικές σκεδάσεις και άρα έχουν ορμή όπως την διατύπωσε ο Compton μπορεί διαγραμματικά να παρασταθεί όπως στο Σχήμα 4.11 στο οποίο, πριν από τη σκέδαση,



Σχήμα 4.11 Κινηματική συμπεριφορά ενός φωτονίου αν θεωρηθεί ότι συμπεριφέρεται σαν σωματίδιο σκεδαζόμενο ελαστικά από ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο.

το ηλεκτρονίο θεωρείται ακίνητο και ελεύθερο, ενώ μετά τη σκέδαση έχουμε στην τελική κατάσταση ένα κινούμενο ηλεκτρονίο και ένα φωτόνιο διαφορετικής συχνότητας (ν') από τη αρχική (ν).

Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τις αρχές της διατήρησης της ενέργειας και της ορμής στη σκέδαση αυτή και ας προσπαθήσουμε με βάση αυτό να οδηγηθούμε σε αποτελέσματα συγκρίσιμα με τα πειραματικά αποτελέσματα της σκέδασης Compton. Το φωτόνιο έτσι θα έχει πριν και μετά την κρούση ενέργεια $h\nu$ και $h\nu'$, αντίστοιχα, ενώ το ηλεκτρονίο πριν από την κρούση θα έχει ενέργεια ίση με την ενέργεια ηρεμίας του E_0 . Μετά την κρούση το ηλεκτρονίο θα έχει ενέργεια ίση με E . Τότε η αρχή της διατήρησης της ενέργειας δίνει :

$$h\nu + E_0 = h\nu' + E \quad (4.6)$$

Από τη σχέση (4.6) φαίνεται ότι, επειδή το E είναι μεγαλύτερο του E_0 , άρα και ν' είναι μικρότερο του ν , άρα το μήκος κύματος του φωτός που προκύπτει μετά τη σκέδαση είναι μεγαλύτερο εκείνου του προσπίπτοντος φωτός. Αυτό είναι ενθαρυντικό όσον αφορά την ερμηνεία του φαινομένου Compton.

Ας δούμε όμως πως μπορούμε να αναπαραγάγουμε τη σχέση (4.4). Για την εφαρμογή της αρχής της διατήρησης της ορμής στη σκέδαση αυτή, εφαρμόζουμε τον κανόνα αθροίσματος διανυσμάτων όπως στο τρίγωνο το Σχήμα 4.10, οπότε παίρνουμε :

$$P_e^2 = P_\lambda^2 + P_{\lambda'}^2 - 2|P_\lambda||P_{\lambda'}|\cos\theta \quad (4.7)$$

όπου P_λ , $P_{\lambda'}$, και P_e , είναι οι ορμές των φωτονίων πριν και μετά την κρούση, και του ηλεκτρονίου μετά την κρούση αντίστοιχα. Πολλαπλασιάζοντας την (4.7) επί c^2 , και επειδή είναι $E_\lambda = h\nu = (Pc)^2 + (mc^2)^2 = (Pc)^2$, αφού το φωτόνιο δεχόμαστε ότι έχει μάζα ηρεμίας μηδέν, προκύπτει:

$$h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta = P_e^2 c^2 \quad (4.8)$$

Όμως από την (4.5) έχουμε $h\nu - h\nu' = E - E_0$, άρα:

$$\begin{aligned}
 h^2v^2 + hv'^2 - 2h^2vv' &= E^2 + E_0^2 - 2EE_0 \\
 &= E_0^2 + P_e^2 c^2 + E_0^2 - 2EE_0 \\
 &= 2E_0^2 + P_e^2 c^2 - 2EE_0
 \end{aligned}$$

Αρα λόγω των Εξ. (4.8) και (4.9) προκύπτει αν τις αφαιρέσουμε κατά μέλη:

$$-2h^2vv'(1-\cos\theta) = 2E_0^2 - 2EE_0$$

ή

$$\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) = \frac{c}{v'} - \frac{c}{v} = \lambda' - \lambda$$

και συνεπώς προκύπτει η σχέση του Compton που διατυπώσαμε πριν.

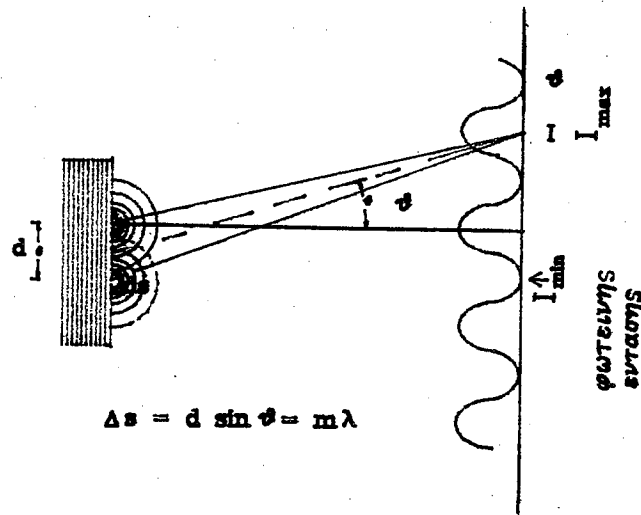
4.9 Αποτυχία της Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας.

Προτού αρχίσουμε να εξηγούμε τα παρατηρηθέντα φαινόμενα του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, μπορούμε να κάνουμε πρώτα μια ιστορική αναδρομή των θεωριών για το φως. Μετά θα δούμε πως η κλασική Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία αποτυγχάνει να εξηγήσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Η παλαιά επιστημονική αντιδικία μεταξύ της κυματικής θεωρίας του φωτός (Huygens, 1678) και της σωματιδιακής θεωρίας (Newton, 1675) φαίνεται να είχε γείρει υπέρ της πρώτης λόγω των εγασιών των Fresnel και Young (μεταξύ 1800 και 1820). Τα βασικά πειραματικά επιχειρήματα υπέρ του κυματικού χαρακτήρα του φωτός δίνονται από τα φαινόμενα της συμβολής και της περίθλασης. Οι σκοτεινοί κροσσοί συμβολής, οι οποίοι παρατηρούνται π.χ. με το πείραμα των δύο σχισμών του Young, αποδεικνύουν ότι η υπέρθεση φωτός πάνω σε φως μπορεί να παράγει σκοτάδι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.12.

Τούτο σημαίνει ότι το φως είναι κύμα διότι με υπέρθεση δύο κυματοσυρμών μπορούμε πράγματι να κάνουμε στάσιμα κύματα όπως βλέπουμε και στο πείραμα Michelson. Επίσης στο πείραμα κόψης του Ξυραφιού όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.13 παρατηρούμε στο φως φαινόμενα περίθλασης, δηλαδή μη ύπαρξης απόλυτα καθορισμένης σκιάς.

Ο Maxwell καθόρισε σαφέστερα τους νόμους παραγωγής και συμπεριφοράς των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων με τις περίφημες εξισώσεις του για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Από αυτές προκύπτει ότι τα Η-Μ κύματα ταξιδεύουν στο κενό με ταχύτητα $v=c=3 \times 10^8$ m/sec., ανεξάρτητα του μήκους κύματος. Οι

προβλέψεις του Maxwell επιβεβαιώθηκαν με πειράματα του Ηερτζ (Hertz).



Σχήμα 4.12

Ο Ηερτζ κατά παράξενη σύμπτωση ανακάλυψε και το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, που δεν συμβιβαζόταν με τη θεωρία αυτή, διότι σύμφωνα με την κρατούσα αντίληψη, φως επαρκούς έντασης θα μπορούσε να ασκήσει αρκετή δύναμη στα ηλεκτρόνια ώστε να απελευθερωνόνταν. Τα πειράματα δείχνουν όμως ότι η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων είναι ανεξάρτητη της φωτεινής έντασης. Οι αντιφάσεις αυτές μαζί με τα πειραματικά δεδομένα από το φάσμα ακτινοβολίας του ατόμου του Υδρογόνου που ήδη μελετήσαμε, οδήγησαν τον Niels Bohr στη διατύπωση της ομώνυμης θεωρίας.

4.10 Το άτομο του Υδρογόνου σαν πηγή διάκριτου φάσματος. Θεωρία του Bohr.

Όπως έχουμε δει πειραματικά οι παρατηρούμενες συχνότητες (ν_{obs}) στο φάσμα του ατόμου του υδρογόνου δίνονται από του εμπειρικό τύπο

$$\nu_{\text{obs}} = cR \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2} \right) \quad (4.11)$$

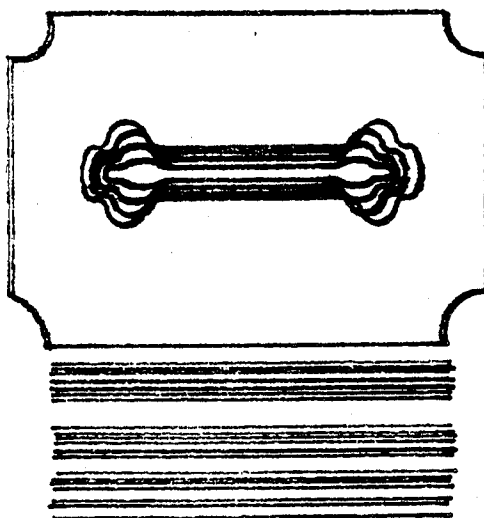
όπου n' , και n'' ακέραιοι ($0 < n'' < n'$).

Τώρα, στο άτομο του Υδρογόνου μπορούμε με κλασικά επιχειρήματα να προσδιορίσουμε την ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου.

Αφ ενός έχουμε το δεδομένο ότι στο ηλεκτρόνιο ασκείται η δύναμη Coulomb από του θετικό πυρήνα και συνεπώς αυτό υφίσταται κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)e}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (4.12)$$

όπου Z ο ατομικός αριθμός, e το φορτίο του ηλεκτρονίου και m η μάζα του ηλεκτρονίου. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ολική ενέργεια E που αποτελείται από την κινητική (E_k) και του δυναμική ενέργεια (E_p).



Σχήμα 4.13

Η κινητική ενέργεια ισούται λόγω της σχέσης 4.12 με :

$$E_k = m \frac{v^2}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2r} \quad (4.13)$$

Η δυναμική ενέργεια E_p ισούται με το έργο που πρέπει να καταναλώσουμε για να απομακρύνουμε το ηλεκτρόνιο από την θέση ισορροπίας σε απόσταση $r=r$ από το πρωτόνιο ως $r_1 = \infty$.

Το έργο αυτό για μετακίνηση του ηλεκτρονίου από τη θέση r_1 στη θέση r_2 δίνεται όπως αποδεικνύεται από την έκφραση

$$\Delta E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Ze^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (4.14)$$

Αν ως μηδέν (σημείο αναφοράς) της δυναμικής ενέργειας E_p ορίσουμε, $E_p=0$, για $r_1=\infty$, τότε το E_p παίρνει την έκφραση

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} Ze^2 \frac{1}{r_2} \quad (4.15)$$

οπότε μπορούμε να διώξουμε το δείκτη 2, και να γράψουμε :

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \quad (4.16)$$

και έτσι η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου παίρνει την μορφή

$$E_{ολ} = E_k + E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Ze^2 \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2r} \quad (4.17)$$

Έχοντας υπολογίσει μια έκφραση για την ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου (και την εξάρτηση της από την ακτίνα), ο Bohr έπρεπε να συμβιβάσει την πρόβλεψη αυτή με την πειραματική παρατήρηση των συχνοτήτων της σχέσης 4.11 η οποία εξειδικεύεται στη σχέση Balmer για $n=2$.

Ο Bohr έπρεπε να ξεκινήσει από την θεωρία του Rutherford του πυρηνικού ατόμου και εκείνης του Planck η οποία αντιστοιχούσε σε κάθε ταλαντώνομο ατομο μια κβαντισμένη ενέργεια, $h\nu$. Επίσης έπρεπε να συμβιβάσει αυτά με τη θεωρία του Einstein (για την εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου), ο οποίος αντιστοιχούσε ενέργεια κβάντου $h\nu$ σε φως συχνότητας ν .

Όμως φαινόταν να υπάρχει ένα λογικό αδιέξοδο, διότι από τον τύπο της ολικής ενέργειας που προκύπτει κλασικά, η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή, δηλαδή προέβλεπε ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων για ένα περιστρεφόμενο ηλεκτρόνιο. Πως λοιπόν μπορούσε να εξηγηθεί το φάσμα με της αιχμηρές διάκριτες γραμμές που περιγράψαμε.

Η επαναστατική υπόθεση του Bohr για την διαφυγή από το αδιέξοδο αυτό ήταν ότι η ηλεκτρομαγνητική θεωρία πρέπει να πάψει να ισχύει όπως την γνωρίζουμε όσον αφορά την ακτινοβολία από άτομα.

Η κύρια διαφοροποίηση των συνθηκών που οδηγεί στην εγκατάλειψη της θεωρίας της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι ότι στο άτομο έχουμε αλληλεπίδραση ηλεκτρονικών σωματιδίων σε εξαιρετικά μικρό χώρο. Στον χώρο αυτό του μικρόκοσμου οι αρχές της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας δεν είχαν ποτέ υποστεί πειραματικό έλεγχο.

Ας δούμε λοιπόν από κοντά την θεωρία του Bohr. Εφ' όσον τα άτομα εκπέμπουν διάκριτο φάσμα συχνοτήτων, άρα σύμφωνα με του Einstein φωτονίων με ενέργεια $h\nu$, θα πρέπει με κάθε τέτοια εκπομπή να μεταπίπτει ανάμεσα σε καταστάσεις με σαφώς καθορισμένο ενεργειακό περιεχόμενο, αλλιώς δεν μπορούν εύκολα να ερμηνευθούν οι σαφώς καθορισμένες (sharp lines) (αιχμηρές) φασματικές γραμμές. Έτσι το άτομο, με την εκπομπή ακτινοβολίας μεταπίπτει από ενεργειακή κατάσταση ενέργειας E σε μια άλλη με ενέργεια E' και φυσικά θα ισχύει $E - E' = h\nu$.

Για την πρόβλεψη των σαφώς καθορισμένων αυτών ενεργειακών σταθμών βοηθάει το (συμπτωματικό;) γεγονός ότι η σταθερά h έχει διαστάσεις στροφορμής. Η στροφορμή J του ηλεκτρονίου ισούται με $J = mvr$, όπου v η ταχύτητα. Σύμφωνα λοιπόν με τον Bohr, θα πρέπει να εξετασθεί το ενδεχόμενο σενάριο (υπόθεση κατά τον Bohr), ότι σε ένα άτομο Υδρογόνου η στροφορμή του ηλεκτρονίου πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του h :

$$mvr = nh, \quad \text{όπου } n=1,2,3,\dots \quad (4.18)$$

Κάνοντας την υπόθεση αυτή, ο Bohr βρήκε ότι το επιθυμητό αυτό αποτέλεσμα που δείχνει εντυπωσιακή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα προκύπτει μόνον αν υπάρχουν "κβαντισμένες" ενεργειακές στάθμες που να ορίζονται από τη συνθήκη

$$\text{στροφορμή} = \frac{nh}{2\pi}, \quad n = 1,2,\dots \quad (4.19)$$

Έτσι διαμορφώνεται η ακόλουθη εικόνα προβλέψεων της κλασικής θεωρίας και θεωρίας του Bohr:

ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

Κλασική εικόνα

εικόνα Bohr

$$mv^2 r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Ze^2$$

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}, \quad n = 1,2,3,\dots$$

με r οποιοδήποτε

(4.20,α,β)

Ας δείξουμε τώρα πως η θεωρία του Bohr εξηγεί τα πειραματικά αποτελέσματα. Από τις σχέσεις (4.12) και (4.20β) προκύπτουν εύκολα εκφράσεις για τις ακτίνες r και ταχύτητες v των ηλεκτρονίων:

$$r = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{4\pi^2 m Z e^2} \quad (4.21)$$

$$v = \frac{1}{n} \cdot \frac{2\pi Z e^2}{4\pi\epsilon_0 h}$$

Συνεπώς για την ολική ενέργεια τος ηλεκτρονίου, προκύπτει

$$E_{ολ} = -\frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 2r} = -\frac{1}{n^2} \frac{\pi^2 m Z^2 e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \quad (4.22)$$

β. Εξήγηση των παρατηρούμενων συχνοτήτων του φάσματος

Η συχνότητες ν_{th} που είναι επιτρεπτές είναι εκείνες που αντιστοιχούν σε ακέραιες μη μηδενικές τιμές n' και n'' από τη σχέση (4.22) ως εξής.

$$\nu_{th} = \frac{E_{n'} - E_{n''}}{h} = \frac{\pi^2 m Z^2 e^4}{8\epsilon_0 h^3} \left(\frac{1}{n''^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \quad (4.23)$$

Ο συντελεστής που βρίσκεται μπροστά από την παρένθεση δίνει ένα αποτέλεσμα $3 \times 10^{10} \times 109,700 \text{ sec}^{-1}$. Η σύγκριση των θεωρητικά προβλεπόμενων συχνοτήτων, ν_{th} , γίνεται με τις παρατηρούμενες συχνοτήτες, αν δούμε την τιμή του παράγοντα cR , που προκύπτει από τα πειραματικά αποτελέσματα. Η τιμή αυτή είναι $cR = 3 \times 10^{10} \times 109,677 \text{ sec}^{-1}$.

Βλέπουμε μια αξιομνημόνετη συμφωνία προβλέψεων και πειράματος. Η θεωρία του Bohr έδωσε μια πρώτη σοβαρή ενίσχυση της κβαντικής θεωρίας του ατόμου, ερμηνεύει κατά έναν "αυθαίρετο" μεν αλλά επιτυχή τρόπο το φάσμα συχνοτήτων του ατόμου, δεχόμενοι ότι το άτομο ακτινοβολεί μόνο όταν μεταπίπτει από διαφορετικές ενεργειακές ενεργειακές στάθμες οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη (4.19). Αδιαφορεί για το πως το άτομο δεν ακτινοβολεί όσο βρίσκεται σε μια σαφώς καθορισμένη ενεργειακή στάθμη. Η θεωρία του Bohr ωστόσο όσο σημαντική και αν ήταν, έχει περιορισμένη προβλεπτική ισχύ. Ερμηνεύει μόνο τις στάσιμες καταστάσεις του ατόμου. Δεν εξηγεί τι συμβαίνει όταν το άτομο αλληλεπιδρά με άλλα άτομα ευρισκόμενο παραδείγματος χάρη σε μια ατομική δέσμη. Δηλαδή δεν ερμηνεύει φαινόμενα σκέδασης. Ούτε η ίδια θεωρία μπορεί να εξηγήσει στάσιμες καταστάσεις μορίων. Θα προχωρήσουμε λοιπόν στο επόμενο κεφάλαιο σε πρόσθετα φαινόμενα, μη κλασικά, που απαιτούν ερμηνεία, όπως εκείνο όπου κινούμενα ατομικά σωματίδια παρουσιάζουν κυματική συμπεριφορά.

Ασκήσεις πάνω στο κεφάλαιο 4

(1) Δοσίμετρο Ακτίνων Χ Ένας πυκνωτής παράλληλων πλακών σε αέρα (χωρητικότητα $C=5.5 \times 10^{-11}$ Farad, όγκου $=50 \text{ cm}^3$) φορτίζεται με 110 volts. Έκθεση με ακτίνες Χ απομακρύνει 10% του αρχικού φορτίου. Να υπολογίσετε τη δόση (σε Roentgens) που εφαρμόστηκε στον πυκνωτή.

(Βοήθημα : Το 1 Roentgen ορίζεται ως εξής: Το roentgen είναι ποσότητα ακτινοβολίας Χ τέτοια ώστε η σωματιδιακή εκπομπή από 1 cm^3 αέρα υπό κανονικές συνθήκες παράγει ιόντα που έχουν 1 ηλεκτροστατική μονάδα ($=3.3 \times 10^{-10}$ Coulomb) ηλεκτρικού φορτίου οιοδήποτε προσήμου. Είναι φανερό ότι η μονάδα Roentgen μετράει το συνολικό αποτέλεσμα μιας έκθεσης σε ακτίνες Χ). (Απάντ. 0.0367 Roentgen).

(2) Να υπολογίσετε τη σταθερά πλέγματος d ενός κρυστάλλου NaCl (πυκνότητα $\rho=2.15 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$, Ατομικά βάρη:

Na \rightarrow 22.997, Cl \rightarrow 35.457) (απάντ. 2.82 Å)

(3) **Φασματοόμετρο Bragg.** Δεδομένης της κρυσταλλικής σταθεράς ενός πετρώματος, $d=2.82 \text{ Å}$, χρησιμοποιώντας ένα φασματοόμετρο Bragg παρατηρούμε φασματική γραμμή σε ανάκλαση πρώτης τάξης σε γωνία $\theta=15^\circ 53'$. Να βρείτε το μήκος κύματος και τη γωνία θ_2 ανάκλασης δεύτερης τάξεως . (απάντ. $\lambda=1.541 \text{ Å}$, $\theta=33^\circ 10'$).

(4) Θεωρία Bohr Φάσμα βαρίου υδρογόνου . Κάνοντας κατάλληλη μετατροπή στην τύπο που δίνει τις συχνότητες φωτονίων που αντιστοιχούν στη σειρά Balmer του υδρογόνου, υπολογίστε την διαφορά μεταξύ μηκών κύματος κανονικού υδρογόνου, και βαρέως υδρογόνου, D, που διαφέρει από το συνηθισμένου υδρογόνου λόγω του μεγαλύτερου ατομικού βάρους 2.01, δηλαδή λόγω της μεγαλύτερης πυρηνικής μάζας M . (Υπόδειξη : εκφράστε τη διαφορά $\lambda_H - \lambda_D$ με τη βοήθεια του λ_H).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΥΛΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

5.1 ΠΕΙΡΑΜΑ DAVISSON-GERMER - ΑΡΧΗ DE BROGLIE.

Είναι πειραματικό δεδομένο ότι τα υλικά σωματίδια παρουσιάζουν **κυματικές ιδότητες**. Το παράδοξο τούτο φαινόμενο, που από πρώτη άποψη δεν παρουσιάζεται συχνά στην καθημερινή εμπειρία, αποδείχθηκε πειραματικά για πρώτη φορά από τα πειράματα των Davisson - Germer το 1908 και ανεξάρτητα από τον G.P. Thomson το 1907. Τα νέα αυτά φαινόμενα επέδρασαν πολύ έντονα στον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε την έννοια της ύλης και για τον λόγο αυτό είναι πολύ χρήσιμο να τα συζητήσουμε με μεγαλύτερη προσοχή. Τα πειράματα αυτά έγιναν όταν οι βελτιώσεις στις πειραματικές τεχνικές επέτρεπαν την μελέτη των αποτελεσμάτων σκέδασης ηλεκτρονίων από κρυστάλους. Η μελέτη των αποτελεσμάτων σκέδασης αυτού του είδους, έδειξε ότι μια σκεδαζόμενη δέσμη ηλεκτρονίων ίδιας κινητικής ενέργειας παρουσιάζει εικόνα περίθλασης, άρα παρουσιάζει συμπεριφορά χαρακτηριστική κυμάτων. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 5.1α σε μια συσκευή στην οποία υπάρχει κενό μπορούμε να δημιουργούμε δέσμη ηλεκτρονίων επιθημητής κινητικής ενέργειας επιταχύνοντας τα μεταξύ κατάλληλα επιλεγόμενης διαφοράς δυναμικού.

Τα πειραματικά αποτελέσματα της σκέδασης μπορούμε να τα παρατηρούμε πάνω σε μια φθορίζουσα επιφάνεια. Στο Σχήμα 5.1β παρατηρούμε την ένταση των σκεδαζόμενων ηλεκτρονίων σαν συνάρτηση της γωνίας σκέδασης. Παρατηρούμε εικόνα περίθλασης παρόμοια με εκείνη που παίρνουμε πειραματικά από σκέδαση ηλεκτρομαγνητικής μονοχρωματικής ακτινοβολίας. Αν τώρα θεωρήσουμε προς στιγμήν μόνο ότι τα ηλεκτρόνια της δέσμης, που τα καθένα τους έχει ορμή p , έχει κυματική υπόσταση με μήκος κύματος λ , τότε η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής από δύο ανακλάσεις σε δύο παράλληλα κρυσταλλικά επίπεδα, n_1 και n_2 , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1γ είναι

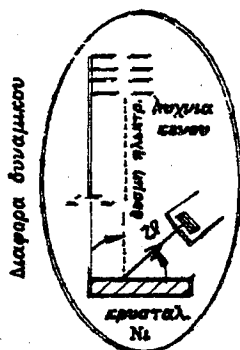
$$n \lambda' = d \sin \theta \tag{5.1}$$

η

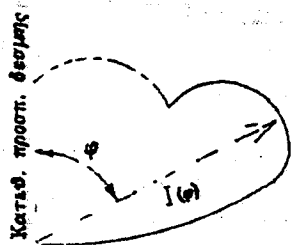
$$D \sin \phi = n \lambda' \tag{5.2}$$

όπου ο ορισμός της γωνίας θ φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Από πειράματα σαν αυτό που περιγράφουμε εδώ βρέθηκε ότι το μήκος κύματος λ που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση, ικανοποιεί και τη σχέση : 0 τόνος στο λ μπαίνει για να υποδηλώνει την μεταβολή του λ μέσα σε ύλη. (Στη συνέχεια για απλούστευση παραλείπουμε τον τόνο)

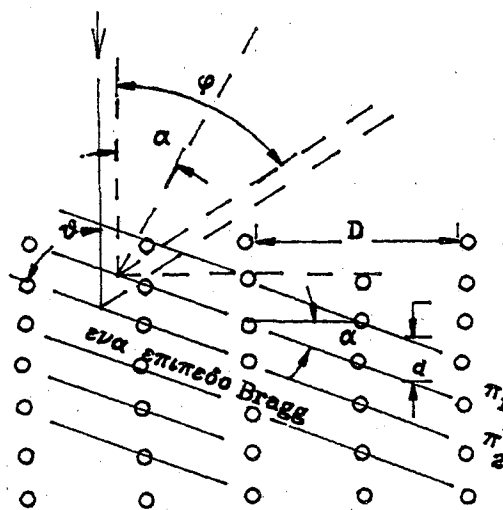
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{h}{\sqrt{2m eV}} \tag{5.3}$$



Σχήμα 5.1α



Σχήμα 5.1β Ενταση σκεδαζομένων ηλεκτρονίων σε πολικό διάγραμμα (για την ερμηνεία της γωνίας ϕ βλ. επόμενο σχήμα 5.1γ.)



Σχήμα 5.1γ Σκέδαση δέσμης ηλεκτρονίων κάθετα σε επιφάνεια κρυστάλλου .Η διαφορά διαδρομής των ακτίνων 1 και 2 ανακλώμενες σε δύο διαδοχικά επίπεδα Bragg είναι ίση με $AB+BF=2d \sin \theta$. Η συνθήκη ενισχυτικής περίθλασης είναι $2d \sin \theta = n \lambda'$. Αλλά $D \sin \phi = d$, άρα τελικά $D \sin \phi = n \lambda'$

όπου V είναι το επιταχύνον δυναμικό, και K η κινητική ενέργεια του καθενός ηλεκτρονίου της δέσμης. Εδώ πρέπει να σταθεί κανείς αρκετή ώρα και να σκεφθεί αν υπάρχουν παραδείγματα από την καθημερινή εμπειρία τέτοιων αποτελεσμάτων. Δεν πρόκειται ασφαλώς να βρει κανείς εύκολα φαινόμενα της καθημερινής εμπειρίας που να αναδεικνύουν την κυματική συμπεριφορά υλικών σωματιδίων, όπως είναι το ηλεκτρόνιο. Το συμπέρασμα μας είναι λοιπόν, ότι το παραπάνω πείραμα αναδεικνύει μια θαυμαστή και όχι τόσο έκδηλη ιδιότητα της ύλης. Όμως στο μικρόκοσμο αυτή η ιδιότητα όχι μόνο είναι έκδηλη, αλλά είναι ίσως η επικρατούσα ιδιότητα της ύλης. Αν θεωρήσουμε λοιπόν εδώ ηλεκτρόνια και βάλουμε τις αριθμητικές τιμές των e, m και h , στο σύστημα S.I., παίρνουμε

$$\lambda = \frac{1.7}{\sqrt{V}} \text{ \AA} \quad (5.4)$$

άρα το λ αντιστοιχεί με την ορμή του ηλεκτρονίου μια και η ορμή συνδέεται με την κινητική ενέργεια με τη σχέση :

$$p = (2meV)^{1/2} \quad (5.5)$$

(δ) Τα πειράματα αυτά καθώς και άλλα τα οποία μπορεί να βρει κανείς στις παραπομπές στο τέλος του κεφαλαίου επιβεβαίωσαν τη σχέση την οποία είχε προτείνει ο De Broglie, ότι δηλαδή για ελεύθερα σωματίδια, ισχύει:

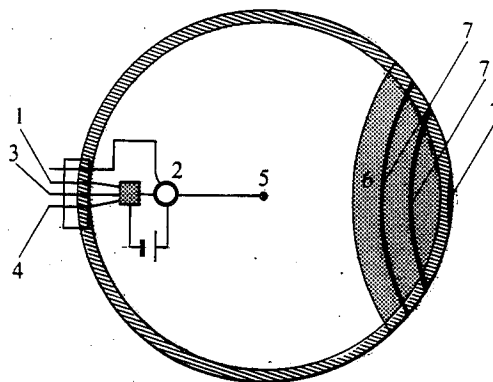
$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad (5.6)$$

όπου λ το μήκος κύματος και k ο κυματικός αριθμός.

5.2 ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΚΔΗΛΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΗΣ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ.

Το 1907 και 1908 ο G.P. Thomson δημοσίευσε πειραματικά αποτελέσματα που κατεδείχναν καθαρά την κυματική φύση των ηλεκτρονίων. Η διαφορά σε σύγκριση με τα πειράματα των Davisson-Germer συνίστατο στο ότι χρησιμοποίησε δέσμες ηλεκτρονίων μεγαλύτερης ενέργειας, 10-40 KeV αντί των 0-600 eV που σήμαινε ότι τα ηλεκτρόνια ήταν πλέον δεισιδύτικα και μπορούσαν να περάσουν μέσα από λεπτά φύλλα (περίπου 1000Å) στερεού υλικού και έτσι να μπορούν να παρατηρούνται μετά από διάδοση αντί ανάκλασης. Το υλικό στο οποίο γινόταν η σκέδαση αποτελείτο από μικροκρυσταλλικά συσσωματώματα στα οποία οι μεμονωμένοι κρύσταλλοι ήταν τυχαία

προσανατολισμένοι έτσι ώστε να παρουσιάζονται όλοι σχεδόν οι προσανατολισμοί. Όταν λοιπόν είχε δεδομένη ενέργεια των ηλεκτρονίων, υπήρχε συγκεκριμένη γωνία σκέδασης που ικανοποιούσε την εξίσωση Bragg για κάθε δοσμένο επίπεδο ανάκλασης. Λόγω της μικροκρυσταλλικής δομής πολλοί μικροκρύσταλλοι ικανοποιούσαν την εξίσωση Bragg για καθένα από τα επίπεδα ανάκλασης του κρυστάλλου. Επειδή τέτοια επίπεδα υπάρχουν αρκετά, προέκυπταν εικόνες περίθλασης υπό την μορφή συγκεντρικών κύκλων (βλ. Σχήμα 5.2)



Σχήμα 5.2 Τομή λυχνίας για την παρατήρηση πειραματικών δεδομένων της σκέδασης σύμφωνα με του G.P. Thompson, ηλεκτρονίων από πολυκρυσταλλο άνθρακα.
1,2:ηλεκτρόδια ανόδου καθόδου. 3, 4 Ηλεκτρόδια θέρμανσης, καθόδου.
5.Στόχος από πολυκρυσταλλικό άνθρακα. 6.Φθορίζον επίχρυσμα. 7.Δακτύλιος περίθλασης.

Η εικόνα αυτή ήταν πολύ διαφορετική από εκείνη του πειράματος των Davisson-Germer διότι η εικόνα περίθλασης μπορούσε να παρατηρηθεί σε φωτογραφική πλάκα μακριά από το φύλλο σκεδαστή. Τέτοια πειράματα μπορούν σήμερα να γίνουν ευκολότερα, όπως είναι αυτό που μπορεί να γίνει στο εργαστήριο του Τομέα Φυσικής του Ε.Μ.Π, όπου χρησιμοποιείται μια πειραματική διάταξη που συνίσταται από λυχνία κενού μέσα στην οποία επιτυγχάνεται δέσμη ηλεκτρονίων και προσπίπτει σε σκεδάζον υλικό που συνίσταται από μικροκρυσταλλικό Άνθρακα. Η εικόνα περίθλασης εμφανίζεται πάνω σε φθορίζον επίστρωμα σε ένα τμήμα της επιφάνειας της λυχνίας. Υπάρχει δυνατότητα μεταβολής της επιταχύνουσας διαφοράς δυναμικού και κατά συνέπεια παρακολούθησης της εξάρτησης της γωνίας μεγίστου της έντασης από την συχνότητα (ή μήκος κύματος) της δέσμης των προσπιπώντων ηλεκτρονίων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2.

Όπως φαίνεται από την εξίσωση 5.1 η γωνία μεγίστου της περίθλασης εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ των δύο διαδοχικών επιπέδων σκέδασης d . Συνεπώς πειραματική μέτρηση της απόστασης d μπορεί να δώσει πληροφορίες για τη σταθερά πλέγματος του κρυστάλλου και επομένως να βοηθήσει στην μελέτη της δομής του. Εάν βέβαια θελήσουμε να επεκταθούμε περισσότερο πάνω σε αυτό το σημείο θα πρέπει να διερωτηθούμε κατά πόσο η ηλεκτρονική δέσμη εισέρχεται σε βάθος μέσα στον κρύσταλλο. Η απάντηση εδώ είναι ότι τούτο είναι συνάρτηση τόσο της ενέργειας όσο και του είδους της δέσμης των σωματιδίων. Έτσι οι κυματικές ιδιότητες που είναι δυνατό να παρουσιάσουν συνηθισμένα άτομα, τα οποία σε αντίθεση με την περίπτωση των ηλεκτρονίων είναι ηλεκτρικώς ουδέτερα επιτεύχθηκαν από τους Eastmann, Stern, και τους συνεργάτες τους. Η τεχνική ήταν βασικά η ίδια με εκείνη των Davisson-Germer, εκτός του γεγονότος ότι λόγω της μη δυνατότητας να επιταχύνουν δέσμη ατόμων δοσμένης ενέργειας, αναγκάστηκαν να χρησιμοποιήσουν μια κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας μοριακών ταχυτήτων χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα επιλογέα ταχυτήτων. Λόγω του ότι οι ενέργειες των σωματιδίων ήταν της τάξης των 0.05eV , που σημαίνει ότι αντιστοιχούσαν σε μήκος κύματος της τάξης των 1\AA , η διείσδυση ατόμων της δέσμης μέσα στον κρύσταλλο ήταν μηδαμινή. Έτσι σε αντίθεση με το πείραμα των Davisson-Germer, η σκέδαση **οφειλόταν σε μια επιφανειακή διάταξη** ατόμων που σχηματίζουν την εξωτερική επιφάνεια του κρυστάλλου. Με τα πειράματα των Easterman, Stern επιβεβαιώθηκε η σχέση του de Broglie σε συνειθισμένα άτομα. Φαινόμενα περίθλασης υλικών σωματιδίων από κρυστάλλους μπορεί επίσης να παρατηρηθούν και σε άλλα στοιχειώδη σωματίδια χωρίς ηλεκτρικό φορτίο όπως τα νετρόνια. Π.χ σε έναν πυρηνικό αντιδραστήρα παράγονται, κατά τις διεργασίες της ελεγχόμενης σχάσης, νετρόνια με ορισμένη κατανομή ταχυτήτων. Τα πειράματα περίθλασης, χρησιμοποιώντας κρυστάλλους με γνωστή πλεγματική σταθερά δίδουν επιβεβαίωση της ύπαρξης υλικών κυμάτων και ακριβούς επιβεβαίωσης της εξίσωσης de Broglie. Η ακρίβεια οφείλεται στο γεγονός ότι η παροχή νετρονίων σε πυρηνικούς αντιδραστήρες είναι πολύ σημαντική σε ρυθμό παραγωγής. Κρύσταλλοι κατάλληλοι για πειράματα ανάλυσης δεσμών νετρονίων είναι οργανικές ενώσεις με πολύ υδρογόνο επειδή τα νετρόνια σκεδάζονται ισχυρά υπό το υδρογόνο. Αντίθετα οι ακτίνες X σκεδάζονται πολύ ασθενικά από άτομα υδρογόνου. Τα νετρόνια αλληλεπιδρούν κυρίως με τον πυρήνα του ατόμου με πυρηνικές δυνάμεις, και η αλληλεπίδραση αυτή είναι ισχυρή.

5.3 Κυματομηχανική - Αρχή του de Broglie

Τα πειράματα των Davisson και Germer ανέδειξαν ότι τα ηλεκτρόνια μπορούν να επιδεικνύουν κυματική συμπεριφορά. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, το φαινόμενο Compton είναι σωματιδιακές εκδηλώσεις της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η ανακαλύψεις αυτές βοήθησαν στο να εδραιωθεί η παράδοση κατά αρχήν ιδέα ότι η ύλη μπορεί να έχει κυματικές ιδιότητες, η ακτινοβολία να έχει σωματιδιακές ιδιότητες και έτσι να υπάρχει η έννοια του δυΐσμου της ύλης και ακτινοβολίας. Για την θεωρητική υποστήριξη των ανακαλύψεων αυτών προτάθηκε η θεωρία της κυματομηχανικής η οποία ξεκίνησε αρχικά με μια παραδοχή από τον Luis de Broglie (1924) πριν από την ανακάλυψη των Davisson και Germer. Η ιδέα αυτή ουσιαστικά διατύπωνε την άποψη ότι τα σωματίδια της ύλης θα πρέπει να ακολουθούν την ίδια σχέση που ακολουθούν και τα κβάντα :

$$\text{ορμή} = \frac{h}{\lambda} \quad (5.7)$$

Το ότι αυτή η σχέση ισχύει για κβάντα φωτός φαίνεται από την σχέση του Einstein.

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \quad (5.8)$$

Επειδή η ορμή και η ενέργεια φωτονίου, όπως προκύπτει από το φαινόμενο Compton συνδέονται με τη σχέση $E=pc$, άρα έχουμε την εξ. (5.7). Την τολμηρή αυτή παραδοχή ή υπόθεση ο de Broglie δικαιολόγησε ως εξής: Αν θέλουμε να υπάρχει ευστάθεια στο άτομο, πρέπει να εισάγουμε ακέραιους αριθμούς (θεωρία Bohr). Τα μόνα φαινόμενα φυσικής ως τώρα που περιλαμβάνουν ακέραιους είναι εκείνα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και συμβολής. Αυτό υποδήλωνε κατά τον de Broglie την ιδέα ότι τα ηλεκτρόνια θα μπορούσαν να θεωρούνται όχι απλά ως σωματίδια, αλλά ότι πρέπει να τους αποδοθεί κάποια περιοδικότητα. Κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι για περιγραφή αρμονικού κύματος (φωτός) χρησιμοποιείται το μήκος κύματος που μετράται με συμβολόμετρα και ότι με την εξίσωση (5.7) εισάγουμε την υποθετική ορμή, μπορούμε αντίστροφα αν μετρήσουμε την ορμή του, τότε μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα υποθετικό μήκος κύματος :

$$\lambda = \frac{h}{\text{ορμη}} = \frac{h}{mv}$$

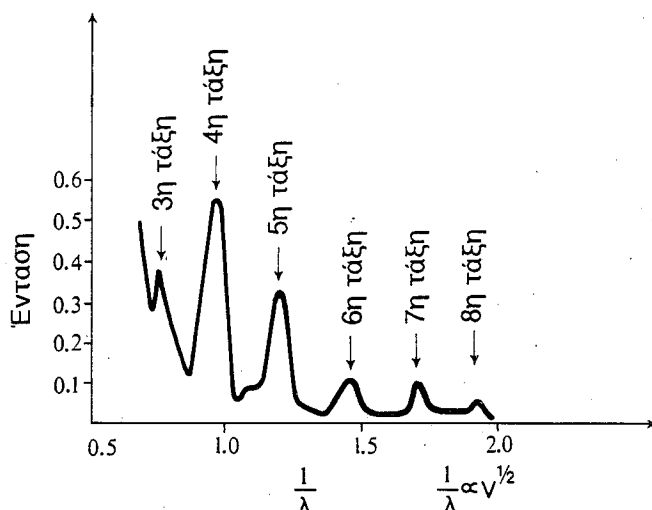
Μολόνоти το 1926 ο ορισμός του "μήκος κύματος de Broglie" ήταν μια μαθηματική δοξασία, μετά τη δημοσίευση των αποτελεσμάτων των Davisson-Germer το μήκος κύματος De Broglie έδωσε εκπληκτικά λογική εξήγηση των πολυπλόκων πειραματικών καμπύλων περίθλασης.

5.4 Διερεύνηση της συνθήκης περίθλασης

Αν θεωρήσουμε πάλι την εξίσωση (5.2) που περιγράφει την αναγκαία συνθήκη για να έχουμε ενισχυμένη ένταση της περιθλώμενης δέσμης ηλεκτρονίων στην κατεύθυνση ϕ θα ήταν ενδιαφέρον να κάνουμε μια πιο προσεκτική μαθηματική διερεύνηση της, η οποία θα οδηγήσει σε πρόσθετα ενδιαφέροντα φυσικά συμπεράσματα. Η εξίσωση αυτή βλέπουμε ότι έχει τέσσερις παραμέτρους : D , ϕ , n και λ . Τώρα για δοσμένη γωνία ϕ που ικανοποιεί την εξ. 5.2 για αντιστοιχία n, λ και D , γενάται το ερώτημα τι συμβαίνει αν : κρατώντας σταθερά το ϕ και το D μεταβάλλουμε μόνο το λ . Προφανώς το n είναι μια παράμετρος που απλά προκύπτει από την Εξ. 5.2 και δεν μπορούμε να την καθορίζουμε κατά βούληση. Τι περιμένουμε λοιπόν να συμβεί στο n αν μόνο μεταβάλλουμε το λ : Η απάντηση είναι ότι επειδή το n είναι υποχρεωμένο να παίρνει ακέραιες μόνο τιμές για να έχουμε ενισχυμένη εξερχόμενη δέσμη, τότε θα πέρνουμε ενισχυμένο σήμα μόνο για διακεκριμένες τιμές του μήκους κύματος λ που αντιστοιχούν σε ακέραιες τιμές του n . Με άλλα λόγια για τις συγκεκριμένες τιμές των D και ϕ που επιλέξαμε θα υπάρχει μια αντιστοιχία (n, λ) , για $n=1,2,3$, κ.λ.π. Το συμπέρασμα αυτό της διερεύνησης παρατηρείται πράγματι και πειραματικά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3 που προκύπτει από πειραματικά δεδομένα των Davisson και Germer (Proc. Nat. Acad. Sci. 14.619(1928)).

Ας κρατήσουμε τώρα το λ σταθερό επειδή μας ενδιαφέρει περίθλαση συγκεκριμένης τάξης, π.χ. 3^{ης} τάξης, ας μεταβάλλουμε δε το ϕ . Αν παρατηρήσουμε τότε το πολικό διάγραμμα της έντασης σαν συνάρτηση της γωνίας ϕ θα διαπιστώσουμε την ύπαρξη δύο τοπικών μεγίστων για δύο τιμές της γωνίας ϕ .

Αυτό μας επιτρέπει ότι υπάρχουν δύο τιμές της σταθεράς D που ικανοποιούν την συνθήκη ενισχυμένης σκέδασης, η οποία πρέπει να θεωρείται αναγκαία και όχι ικανή συνθήκη για ενισχυμένη σκέδαση. Η συνθήκη είναι ικανή όταν υπάρχουν μέσα στον κρύσταλλο παράλληλα επίπεδα σε απόσταση $d=D \sin \alpha$.



Σχήμα 5.3 Κατανομή της έντασης της σκεδαζόμενης δέσμης ηλεκτρονίων από κρύσταλλο για σταθερή τιμή της γωνίας ϕ σαν συνάρτηση του μήκους κύματος των προσπίτοντων ηλεκτρονίων. Παρατηρούνται οι διάφορες τάξεις που αντιστοιχούν στις ακέραιες τιμές του δείκτη n στην εξίσωση 5.2.

Ετσι η ύπαρξη δύο τοπικών γεγίστων στο Σχήμα 5.3 ερμηνεύεται σαν επιβεβαίωση της ύπαρξης στον συγκεκριμένο κρύσταλλο δύο διαφορετικών επιπέδων Bragg, η ακριβέστερα τουλάχιστον δύο διότι πιθανά να υπάρχουν και άλλα των οποίων τα μέγιστα έντασης είναι πάρα πολύ μικρά για να διαπιστωθούν με την ακρίβεια που είχε η συγκεκριμένη πειραματική συσκευή των Davisson και Germer.

5.5 Πείραμα: Να επαληθεύσετε την αρχή του De Broglie στο εργαστήριο. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την συσκευή του Σχήματος 5.2 που στηρίζεται στη αρχή του πειράματος περίθλασης τύπου Τόμσον, όπου γίνεται σκέδαση δέσμης ηλεκτρονίων πάνω σε κρύσταλλο άνθρακα. Παρατηρούμε για δεδομένο επιταχυνόν δυναμικό των ηλεκτρονίων έχουμε στην φθορίζουσα (Για το φαινόμενο του φθορισμού βλ. φωτάγεια) επίθρωση της λυχνίας δύο συγκεντρικούς δακτυλίους περίθλασης. Ο καθένας από αυτούς αντιστοιχεί σε διαφορετικό επίπεδο Bragg. Μπορούμε να μετρούμε για τον ένα δακτύλιο την διάμετρο του και να την παραστήσουμε γραφικά σαν συνάρτηση της επιλεγόμενης τάσης. Ακριβέστερα παριστάνουμε γραφικά την συνάρτηση

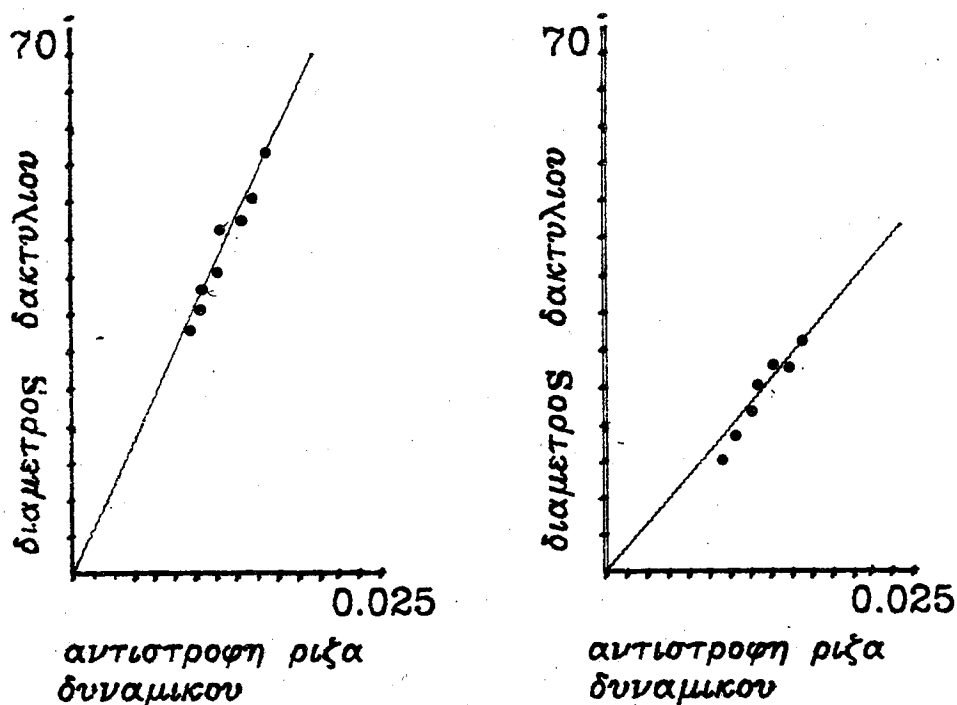
$$D = f (V_{\text{anod}}^{-1/2}) \quad (5.9)$$

Η κλίση της ευθείας γραμμής πάνω στην οποία πρέπει να βρίσκονται τα πειραματικά σημεία σχετίζεται με την σταθερά του πλέγματος d με την

$$\lambda = Dd/(2L) \quad (5.10)$$

σχέση: Αν τα πειραματικά σημεία είναι αυτά που βλέπουμε στο Σχήμα 5.4.α,β να βρείτε την σταθερά πλέγματος του κρυστάλλου το άνθρακα, που αντιστοιχεί στους δύο δακτυλίους περιθλασης.

Μια τυπική σειρά ενεργειών για την μέτρηση και ανάλυση των αποτελεσμάτων της περιθλασης ηλεκτρονίων σε μια τυπική εργαστηριακή συσκευή είναι η ακόλουθη :



Σχήμα 5.4.α,β Μεταβολή της διαμέτρου δακτυλίων περιθλασης σαν συνάρτηση της αντίστροφης ρίζας του δυναμικού για δύο διαφορετικούς δακτύλιους. (από κάποια εργαστ. άσκηση φοιτητής)

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ Bragg ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΑΝΘΡΑΚΑ.

1) Μετρήστε την διάμετρο D του καθενός δακτυλίου για κάθε τιμή της ανοδικής τάσης V . Καταχωρήστε τις μετρήσεις στον πίνακα I. Κάνετε χρήση αν χρειαστεί και των δύο περιοχών υψηλής τάσης του τροφοδοτικού.

2) Παραστήστε γραφικά σε ένα διάγραμμα τα αποτελέσματα. Έτσι παραστήστε τα ζεύγη σημείων $(D, V^{-1/2}_{\text{anod}})$.

3) Από τις κλίσεις των δύο καμπυλών μπορείτε να προσδιορίσετε τις αποστάσεις d μεταξύ των διαδοχικών περιθλώντων επιπέδων Bragg. Ο υπολογισμός αυτός θα γίνει πρώτα για τον εσωτερικό και μετά για τον εξωτερικό δακτύλιο

$$(d = (2L/D)\sqrt{150/V_{\text{anod}}}) , \quad L = 13.5 \text{ cm} \quad (5.11)$$

4) Προσδιορίστε τον λόγο d_{11}/d_{10} των δύο αποστάσεων Bragg και εξετάστε κατά πόσο είναι σύμφωνος με τον λόγο $\sqrt{3}:1$ που αντιστοιχεί σε εξαγωνική διάταξη των ατόμων άνθρακα στο κρυσταλλικό πλέγμα. Κατά πόσο τα αποτελέσματα αυτά ευνοούν την διάταξη των ατόμων σε εξαγωνικό πλέγμα έναντι της διάταξης σε κυβικό πλέγμα;

5) Εκτιμήσατε το στατιστικό και συστηματικό σφάλμα στον προσδιορισμό του d .

Για της ερμηνεία του τρόπου παραγωγής του ίχνους των τροχιών των ηλεκτρονίων πάνω στην φθορίζουσα επιφάνεια της φιάλης στο πείραμα περίθλαση ηλεκτρονίων απαιτείται η κατανόηση του φαινομένου της φωταύγειας.

5.6 Φωταύγεια

Φωταύγεια είναι η εκπομπή φωτός από ένα σώμα η οποία εκπέμπεται επί πλέον της θερμικής της ακτινοβολίας στην ίδια θερμοκρασία, ή της θερμοκρασίας της διεγείρουσας πηγής. Είναι χαρακτηριστικό της φωταύγειας ότι η διεγείρουσα πηγή είναι συχνά μη θερμικής φύσεως (όπως π.χ. ενεργητικά

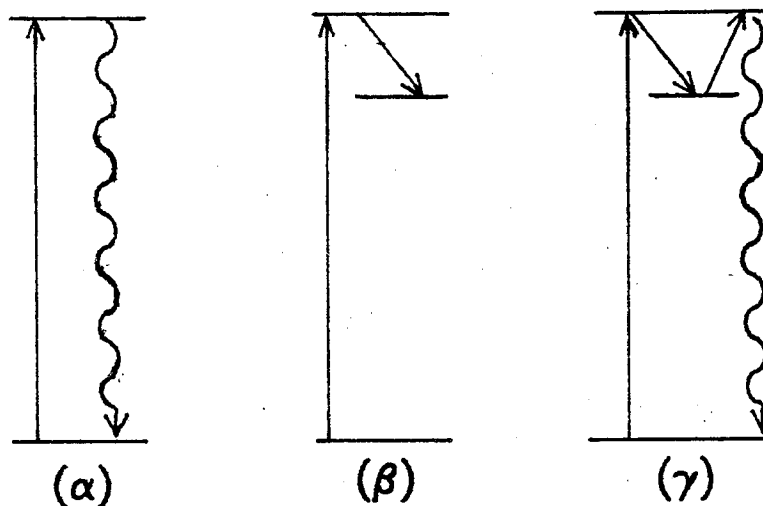
ηλεκτρόνια σε σωλήνα καθοδικών ακτίνων) και έτσι δεν περιορίζεται από θερμοδυναμικούς περιορισμούς στους οποίους υπόκεινται άλλες διεργασίες (όπως π.χ. οι εκκενώσεις αίγλης). Συχνά τα υλικά που δίνουν φωταύγεια είναι σε θερμοκρασία περιβάλλοντος όταν λειτουργούν. Υπάρχει και ένας εναλλακτικός όρος: **φθορισμός**, ο οποίος εφαρμόζεται σε στιγμιαία διέγερση και εκπομπή ακτινοβολίας. σε αντίθεση με τον όρο **φωσφορισμό** που λαβαίνει χώρα αρκετά μετά την διαδικασία διέγερσης.

Φυσικές Αρχές Φωταυγείας : Στο Σχήμα φαίνεται η απλούστερη περίπτωση όπου ένα άτομο ή περιοχή του στερεού σώματος ανυψώνεται σε μια διεγερμένη κατάσταση με κάποια μη θερμική διεργασία. Από την κατάσταση αυτή αποδιεγείρεται με εκπομπή ακτινοβολίας (Σχήμα 5.5α) . Υπάρχει και άλλος τρόπος αποδιέγερσης με ενδιάμεση μετάπτωση (χαλάρωση) (Σχήμα 5.5.β) . Στη διεργασία αυτή παράγεται διαφορετικό μήκος κύματος ακτινοβολίας. Τέλος, μπορεί να υπάρξουν **παγίδες** (Σχήμα 5.5.γ) , οι οποίες είτε καθυστερούν την εκπομπή, όπως συμβαίνει στον φωσφορισμό είτε απαιτούν ένα είδος διέγερσης (stimulation) για να εκλύσουν τη παγιδευμένη ενέργεια. Τέτοιο φαινόμενο έχουμε π.χ. σε συσκευές αποθήκευσης εικόνας.

Στην πραγματικότητα τα υλικά που υφίστανται φωταύγεια παρουσιάζουν αρκετά πιο πολύπλοκη συμπεριφορά. Οι ενεργειακές στάθμες μπορεί να αντιστοιχούν σε μεμονωμένα άτομα ή μόρια, ή ακόμα μπορεί να αντιστοιχούν σε πλατιές ενεργειακές ζώνες, οι οποίες μπορεί να εκτείνονται διαμέσου του υλικού.

Εκπομπή μπορεί να λάβει χώρα στο ίδιο άτομο ή κέντρο ως οφειλόμενη σε διέγερση ή ακόμα η ενέργεια μπορεί να μεταφερθεί πρώτα σε μια άλλη περιοχή . Στον θειούχο ψευδάργυρος, και σε άλλα παρόμοια υλικά, η ανώτερη ενεργειακή στάθμη είναι η ζώνη αγωγιμότητας. Έτσι από αυτήν τα διεγερμένα ηλεκτρόνια μπορούν να περάσουν από μια περιοχή στην πριν να πέσουν σε χαμηλότερη στάθμη με ταυτόχρονη ακτινοβολία: Τα υλικά αυτά συμπεριφέρονται συνεπώς σαν ένας τύπος ημιαγωγού. Οι παγίδες και άλλα ενεργά κέντρα παράγονται συχνά από προστιθέμενα άτομα προσμίξεων και συνεπώς παίζουν σοβαρό ρόλο στον προσδιορισμό των ιδιοτήτων του είδους αυτού του υλικού. Σε ιονικά υλικά, ενέργεια μπορεί να μεταφερθεί από το ένα κέντρο στο άλλο με μια κβαντική διαδικασία που λέγεται **μεταφορά συντονισμού** (δεν μεσολαβεί ακτινοβολία στη διεργασία αυτή) .

Έτσι στα halophosphates που χρησιμοποιούνται σε λαμπτήρες φθορισμού, η διέγερση λαβαίνει χώρα σε ιόντα αντιμονίου: ένα μέρος της ακτινοβολίας ακτινοβολείται από την ίδια θέση μετά από χαλάρωση, δίνοντας μπλε



Σχήμα 5.5 Απλοποιημένα διαγράμματα (α) Φωταύγεια, (β) Φωταύγεια με χαλάρωση.

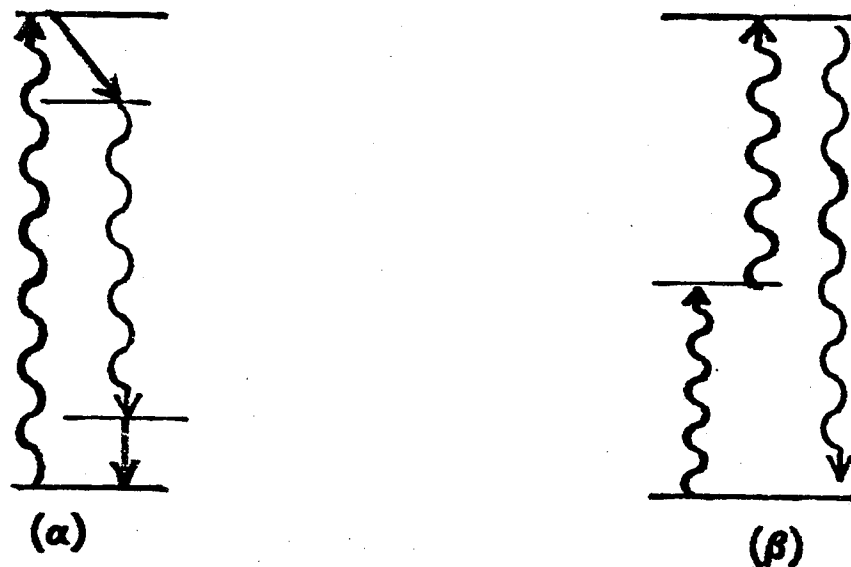
ακτινοβολία. Αλλά ένα ποσοστό της ακτινοβολίας μεταφέρεται με τη διεργασία αυτή σε ιόντα μαγγανίου σε κάποια μακρινή απόσταση, παράγοντας στη συνέχεια ακτινοβολία χρώματος πορτοκαλί. Στην περίπτωση αυτή το μαγγάνιο θεωρείται ότι είναι ο **ενεργοποιητής** ενώ το αντιμόνιο λέγεται αρχικός ενεργοποιητής ή ευαισθητοποιητής (sensitizer).

Η σημασία της φωταύγειας είναι τεράστια στην τεχνολογία αλλά και σε βιολογικές διεργασίες. Αναφέρουμε παρακάτω παραδείγματα μεθόδων με τις οποίες παρέχεται η ενέργεια που απαιτείται για φωταύγεια.

1) **Χημικές αντιδράσεις.** (πηγολαμπίδες, πλαγκτόν, οξειδωση φωσφόρου στον αέρα).

2) **Φορτισμένα σωματίδια υψηλών ενεργειών** (Απαριθμητές σπινθηριστών)

3) **Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία** Ίσως η σπουδαιότερη μέθοδος διέγερσης φωταύγειας. Περιλαμβάνει ραδιοφωνικά κύματα, υπέρυθρη ακτινοβολία, ορατό φως, υπεριώδες, ακτίνες X και ακτίνες γάμμα. Σχεδόν πάντοτε το μήκος κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερο από εκείνο της απορροφούμενης ακτινοβολίας. Αυτό είναι γνωστό σαν **Νόμος το Stokes**, και φαίνεται στο Σχήμα 5.6.α.β.



Σχήμα 5.6. Νόμος το Stokes
(α) Συμβατικός φάσφορος (β) Φάσφορος anti-Stokes.

(4) **Ηλεκτρικό πεδίο : electoluminescence.** Ορισμένα υλικά δίνουν φωταύγεια όταν εναποτίθενται υπό μορφή σκόνης μέσα σε διηλεκτρικά υλικά και υφίστανται εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο.

(5) **Junction electoluminescence.** Μερικοί ημιαγωγοί όπως γαλλιούχο αρσενικό και φωσφίδια εκπέμπουν ακτινοβολία όταν συμβαίνει ανασυνδυασμός ηλεκτρικών φωρέων (ηλεκτρονίων ή οπών) μετά από δίοδο από μια ζεύξη p-n. Πολύ μεγάλες εντάσεις μπορεί να προκύψουν, και έτσι έχουμε εφαρμογές σε λάμπες ημιαγωγών, LED κλπ.

5.6 ΚΥΜΑΤΟΠΑΚΕΤΑ & ΚΥΜΑΤΟΠΑΚΕΤΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ.

Απο τη σχέση De Broglie που ήδη είδαμε επιβεβαιώνεται με μεγάλη ακρίβεια πειραματικά, φαίνεται πως ένα σωματίδιο είτε είναι ηλεκτρόνιο, είτε νετρόνιο είτε ουδέτερο άτομο, μπορεί να συμπεριφέρεται σαν κύμα. Από τις γνώσεις μας όμως της κυματικής είναι γνωστό ότι ένα κύμα αν δε είναι εντοπισμένο στο χώρο θα αντιστοιχεί, λόγω του **θεωρήματος εύρους ζώνης σε ένα κυματοπακέτο**, θα υπάρχει δηλαδή μια σχέση ανάμεσα στη χωρική έκταση του κύματος Δx και της περιοχής κυματικών αριθμών Δk που θα καταλαμβάνει

το κύμα: Γνωρίζουμε τότε ότι ισχύει η σχέση:

$$\Delta x \Delta k = 1 \quad (5.13)$$

Με άλλα λόγια θεωρούμε πιο συνηθισμένη ίσως περίπτωση ένα κύμα να μην χαρακτηρίζεται από ένα καθορισμένο κυματικό αριθμό k η αλλιώς μήκος κύματος λ . Διότι ένα κύμα καθορισμένου μήκους κύματος θα πρέπει να καταλαμβάνει **άπειρη έκταση** στο χώρο. Ετσι σαν απλό παράδειγμα μη απόλυτα **μονοχρωματικού** υλικού κύματος μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου τα κύμα περιέχει δύο αρμονικές συνιστώσες, τότε το συνισταμένο κύμα θα κινείται με την λεγόμενη **ομαδική ταχύτητα** v_g , η οποία μπορεί να είναι αρκετά διαφορετική από την ταχύτητα της καθεμιάς από τις δύο συνιστώσες (φασικές ταχύτητες) (Βλ. και μαθήματα Φυσικής Berkeley, Τόμος III Κυματική). Για περισσότερη πληρότητα παρουσιάζουμε παρακάτω τον τρόπο προσδιορισμού της ομαδικής ταχύτητας όταν γνωρίζουμε τη μορφή των συνιστώντων κυμάτων. Εστω λοιπόν ότι έχουμε ένα ημιτονικό κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$Y = A \sin(kx - \omega t) \quad (5.12)$$

όπου k , ίσο με $2\pi/\lambda$, ο λεγόμενος κυματικός αριθμός και ω η λεγόμενη γωνιακή κυκλική συχνότητα. Εστω λοιπόν ότι το συνισταμένο κύμα αποτελείται από το κύμα (1) και από ένα άλλο μονοχρωματικό κύμα που διαφέρει από το (1) σε συχνότητα και κυματικό αριθμό κατά $d\omega$ και dk αντίστοιχα. Το δεύτερο κύμα (2) θα έχει τη περιγραφή:

$$y_2 = A \sin((k + dk)x - (\omega + d\omega)t) \quad (5.13)$$

ενώ το συνισταμένο κύμα θα προέκυπτε από την επαλληλία των (5.12) και (5.13) και δίνει:

$$Y_{\text{ολ}} = 2 \sin \left[\left(k + \frac{dk}{2} \right) x - \left(\omega + \frac{d\omega}{2} \right) t \right] \cos \left(\frac{dk}{2} x - \frac{d\omega}{2} t \right) \quad (5.14)$$

Από το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται η διάδοση του κύματος σαν ένα συνολικός παλμός. Ο τελευταίος παράγων περιγράφει την διαμόρφωση του πλάτους της συνισταμένης κυματομορφής. Η ταχύτητα με την οποία κινείται η περιβάλλουσα (διαμόρφωση) της συνολικής κυματομορφής είναι u_g . Η ταχύτητα αυτή δίνεται από τον συντελεστή του t αν διαιρεθεί με τον συντελεστή του x . Ετσι έχουμε

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (5.15)$$

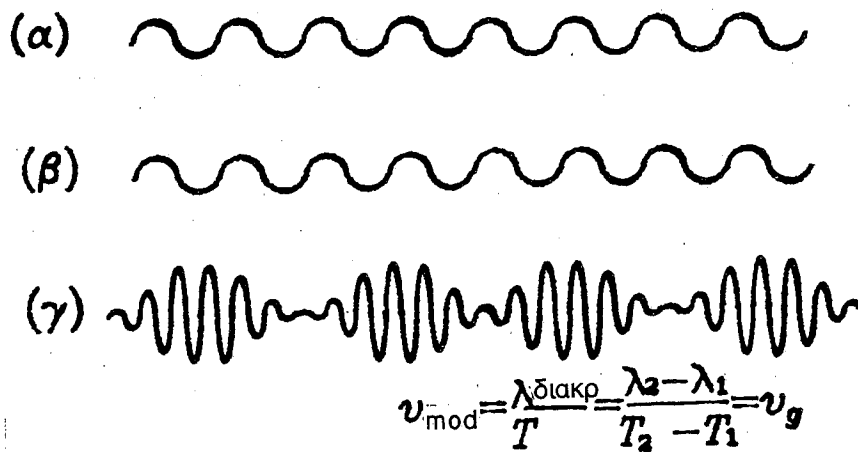
Στο όριο των απειροστών μικρών διαφορών στη συχνότητα και τον κυματαριθμό μεταξύ των συνιστώντων κυμάτων, έχουμε: v_ϕ (ταχύτητα φάσης)

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (5.16)$$

και (ταχύτητα ομάδας)

$$v_g = d\omega/dk \quad (5.17)$$

Τα αποτελέσματα για την ειδική περίπτωση διακροτημάτων φαίνονται γραφικά στο Σχήμα 5.7.



Σχήμα 5.7 Γραφική παράσταση δύο ταλαντώσεων ή κυμάτων με μικρή διαφορά συχνότητας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω που ισχύουν για κύματα γενικά στην περίπτωση υλικών κυμάτων, δηλαδή αυτών που θα συνηθίζουμε να ονομάζουμε κύματα de

Broglie. Τότε να δείξετε ότι τόσο στην κλασική όσο και στην σχετικιστική περίπτωση ισχύει για την ομαδική ταχύτητα ότι:

$$v_g = \beta c = v \quad (5.18)$$

όπου v η ταχύτητα του σωματιδίου. Τούτο έχει έννοια ότι το κύμα που σχετίζεται με το σωματίδιο δεν πρόκειται να αποχωρισθεί από το σωματίδιο κατά την διάρκεια της κίνησης του, και μας απαλλάσσει από κάποιον φιλοσοφικό προβληματισμό που είχε διατυπωθεί όταν είχε αρχικά προταθεί ο δυισμός σωματιδίου-κύματος.

5.7 Ασυνέπεια μεταξύ κυματικής θεωρίας και Σωματιδιακή θεωρίας, και η αντιμετώπιση της στη γενική περίπτωση σωματιδίων στο μικρόκοσμο.

Όπως έχουμε διαπιστώσει το φως παρουσιάζει άλλοτε κυματική, και άλλοτε σωματιδιακή συμπεριφορά. Από την άλλη πλευρά, τα σωματίδια της ύλης παρουσιάζουν άλλοτε σωματιδιακή και άλλοτε κυματική συμπεριφορά. Πως γίνεται συμφιλίωση των αντίθετων αυτών απόψεων στην γενικότερη περίπτωση αφού στην ειδική περίπτωση του ατόμου του υδρογόνου ο Bohr έδωσε μια ερμηνεία; Ο Schrodinger προσπάθησε να ερμηνεύσει τα σωματίδια, και ειδικότερα τα ηλεκτρόνια, σαν κυματοπακέτα.

Όμως τα κυματοπακέτα θα έπρεπε με την πάροδο του χρόνου κατά την διάδοση τους να "καταναλώνονται", δηλαδή να μειώνεται η έντασή τους. Επίσης από μαθηματική σκοπιά, η αλληλεπίδραση δύο ηλεκτρονίων στις μεταξύ τους συγκρούσεις σε συνηθισμένο 3-διάστατο χώρο θα οδηγούσε σε τρομερές δυσκολίες.

Η ερμηνεία που γενικά είναι παραδεκτή σήμερα δόθηκε από τον Born. Σύμφωνα με την άποψη αυτή, η όλη διαδοχή γεγονότων προσδιορίζεται από νόμους των πιθανοτήτων. Σε μια κατάσταση σωματιδίου στο χώρο αντιστοιχεί μια ορισμένη πιθανότητα, η οποία δίνεται από το κύμα De Broglie που συνοδεύει το σωματίδιο.

Στο πρόβλημα σκέδασης φωτός από μικρά σωματίδια ή από μόρια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των κβάντα. Τότε βλέπουμε ότι ο αριθμός των προσπιπτόντων κβάντων φωτός πρέπει να είναι ανάλογος προς την ένταση του φωτός στο σημείο που θεωρούμε ότι γίνεται η σκέδαση. Η σκεδαζόμενη ένταση υπολογίζεται από την κυματική θεωρία. Τούτο υποδεικνύει ότι θα πρέπει να προσπαθήσουμε (Born, 1926) να υπολογίσουμε τη σκέδαση

ηλεκτρονίων από άτομα, βασιζόμενοι σε κυματική μηχανική. Υπάρχει βάση στην πεποίθηση για την ορθότητα της αντιστοιχίας του πλάτους κύματος με τον αριθμό των σωματιδίων (ή την πιθανότητα). Με την έννοια σωματιδίου πάντα του αποδίδουμε κατ' ανάγκη μια απολύτως καθορισμένη ορμή και μια καθορισμένη σε συγκεκριμένο χρόνο, θέση. Όμως προκύπτει το ερώτημα: μπορούμε πράγματι να προσδιορίσουμε ακριβώς τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου σε δεδομένη χρονική στιγμή;

Αν το πείραμα δείχνει ότι μόνο την μια από τις δύο ποσότητες μπορούμε να ξέρουμε τέλεια, τότε τι μπορούμε να πούμε; Η αν το πείραμα λείπει ότι μπορούμε μόνον να μετρήσουμε και τις δύο ταυτόχρονα, αλλά καμία δεν μπορεί να προσδιορισθεί ακριβώς, τότε μπορούμε να πούμε ότι η σωματιδιακή εικόνα είναι ορθή;

Μπορεί κανείς να δείξει με τη βοήθεια παραδειγμάτων ότι ο ταυτόχρονος προσδιορισμός της θέσης και της ταχύτητας είναι στην πραγματικότητα αδύνατος. Είναι ασυμβίβαστος με τους κβαντικούς νόμους που είναι στέρεα βασισμένοι στο πείραμα.

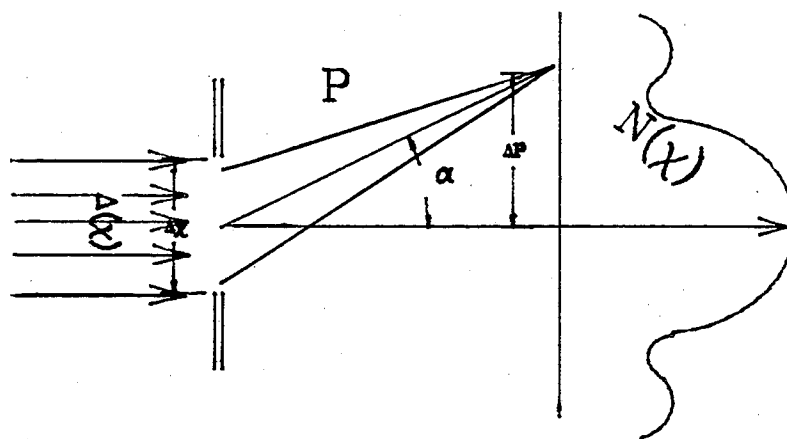
5.8 ΑΡΧΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ HEISENBERG

Τώρα θα δώσουμε την απόδειξη του ισχυρισμού ότι θέση και ορμή (π.χ. ενός ηλεκτρονίου) δεν μπορούν να προσδιορισθούν ταυτόχρονα. Αυτό το δείχνουμε με το παράδειγμα περίθλασης διαμέσου σχισμής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.8. Αν θεωρήσουμε ότι το πείραμα μέτρησης της θέσης ενός ηλεκτρονίου είναι ότι για να το εντοπίσουμε, το περνάμε μέσα από τη σχισμή εύρους Δx , τότε η παρατήρηση της εικόνας περίθλασης χρησιμεύει για την ταυτόχρονη μέτρηση θέσης και ορμής από την σκοπιά της σωματιδιακής έννοιας. Έτσι το εύρος της σχισμής Δx δίνει την "αβεβαιότητα" Δx , στον προσδιορισμό της θέσης κάθετα προς την κατεύθυνση που ταξιδεύει το κάθε σωματίδιο.

Το γεγονός ότι γίνεται κάποια περίθλαση, που την παρατηρούμε, μας επιτρέπει απλά να ισχυρισθούμε ότι το ηλεκτρόνιο πέρασε μέσα από τη σχισμή. Περισσότερη λεπτομερειακή πληροφορία για το από που ακριβώς μέσα στη σχισμή πέρασε το ηλεκτρόνιο δεν υπάρχει. Εξάλλου από τη σκοπιά της σωματιδιακής θεωρίας, η εικόνα περίθλασης υποδηλώνει ότι το κάθε μεμονωμένο ηλεκτρόνιο υφίσταται μια απόκλιση στην σχισμή, είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω. Έτσι αποκτά κάποια ορμή Δp κατά τον άξονα τον κάθετο προς την αρχική ορμή p . Είναι λοιπόν από το Σχήμα 5.8 κατά μέσον όρο $\Delta p = p \sin \alpha$, (όπου α ή μέση τιμή απόκλισης) αλλά από τις συνθήκες

περίθλασης ηλεκτρονίων.

$$\Delta p = p \sin \alpha \quad (5.19)$$



Σχήμα 5.8 Η καμπύλη $N(x)$ παριστάνει ένα ιστόγραμμα του αριθμού καταμετρήσεων θέσης του σωματιδίου πάνω στην επιφάνεια του ανιχνευτή A, που δίνει την θέση στην οποία παρατηρήθηκε το σωματίδιο.

Ξέρουμε όμως ότι τα πειραματικά αποτελέσματα εξηγούνται ικανοποιητικά βάσει της κυματικής αναπαράστασης. Σύμφωνα με αυτήν το α σχετίζεται με το εύρος της σχισμής Δx και το $\lambda = h/p$ με την εξίσωση

$$\Delta x \sin \alpha = \lambda \quad (5.20)$$

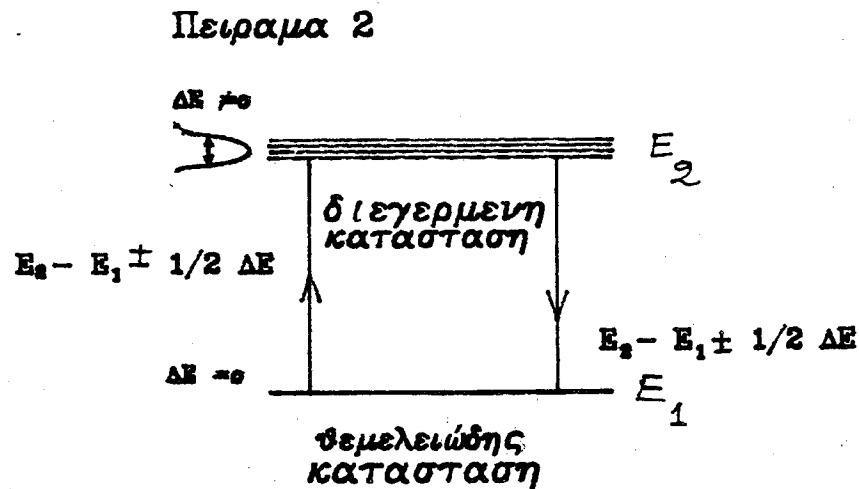
Από τις εξ. (5.19) και (5.20) προκύπτει

$$\Delta p \Delta x = (p \sin \alpha) \left(\frac{\lambda}{\sin \alpha} \right) = h \quad (5.21)$$

Η σχέση αυτή, για την οποία μπορεί να δοθεί πιο αυστηρή εξαγωγή, (σελ.349 Born: Atomic Physics) λέγεται Σχέση Αβεβαιότητας του Heisenberg. Για την κατανόηση της σχέσης αβεβαιότητας για το χρόνο και την ενέργεια ας θεωρήσουμε την εξής πειραματική διαδικασία:

Πείραμα 2 :**Μέτρηση ενεργειακών σταθμών σε ένα άτομο .**

Στο πείραμα αυτό μετράμε την ενέργεια E_2 μιας διεγερμένης κατάστασης σε ένα άτομο. Αυτή μετριέται από την ενέργεια των εκπεμπομένων φωτονίων κατά την μετάπτωση από τη διεγερμένη στάθμη E_2 στη θεμελιώδη στάθμη E_1 . Τα πειραματικά αποτελέσματα δίνουν μια αβεβαιότητα στην τιμή της E_2 . Αυτό σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας ερμηνεύεται ότι το ηλεκτρόνιο έχει



Σχήμα 5.9

και κάποια αβεβαιότητα δηλαδή κάποιον πεπερασμένο χρόνο παραμονής $\Delta t = \tau = h/\Delta E$ στη διεγερμένη κατάσταση. Έτσι αν $\Delta t = \infty$, τότε $\Delta E = 0$. Στην πράξη όμως το Δt είναι πεπερασμένο, όπως είπαμε, λόγω ακτινοβόλων μεταπτώσεων από την διεγερμένη στη θεμελιώδη κατάσταση. Το $\Delta t = \tau$ λέγεται χρόνος ζωής της ενεργειακής στάθμης. Βλέπουμε ότι ο χρόνος ζωής τ είναι αντιστρόφως ανάλογος προς την πιθανότητα μετάπτωσης στη μονάδα του χρόνου.

Πόσος είναι ο χρόνος ζωής της θεμελιώδους κατάστασης; Μπορούμε εδώ να πούμε (και τούτο επαληθεύεται πειραματικά) ότι είναι πρακτικά άπειρος διότι το σύστημα που βρίσκεται σε θεμελιώδη κατάσταση, δηλαδή ελάχιστης ενέργειας, δεν μπορεί να κάνει μετάπτωση σε στάσιμη κατάσταση μικρότερη ενέργειας, άρα έχουμε $\Delta t = \infty$. Τούτο δίνει $\Delta E = 0$, δηλαδή πειραματικά η

θεμελειώδης κατάσταση μπορεί να προσδιοριστεί με άπειρη ακρίβεια. Έτσι τα πειραματικά φάσματα εκπομπής, και απορρόφησης έχουν την μορφή του Σχήματος 5.9 .

Αρχή αβεβαιότητας & θεωρία μετρήσεων.

(1) θεωρούμε ένα πείραμα με σχεδόν μονοχρωματικό φως από μια λυχνία υδραργυτό και μήκος κύματος 5461Å, το οποίο περνάει μέσα από ένα κλείστρο. Αυτό ανοίγει και κλείνει εξαιρετικά γρήγορα με περιοδικό τρόπο ως εξής: μένει ανοιχτό για 10^{-10} sec και μετά κλείνει για 0.01 sec. στη διάρκεια της περιόδου . Τότε, το φως που περνάει μέσα από το κλείστρο θα έχει μικρότερη μονοχρωματικότητα. Υπολογίστε τη διασπορά αυτή σε μήκος κύματος.

Λύση : Είναι $\Delta\omega = 1/\Delta t$, λόγω του θεωρήματος εύρους ζώνης. Ταυτόχρονα $\lambda = 2\pi c/\omega \rightarrow \Delta\lambda = 2\pi c (\Delta\omega)/\omega^2$. Άρα:

$$\begin{aligned} \therefore \Delta\lambda &= \frac{2\pi c}{\omega^2} \frac{1}{\Delta t} = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t} \\ &= \frac{(5.461 \times 10^{-5})^2 \text{ cm}^2}{6.28 (3 \times 10^{10} \text{ cm}) (10^{-10} \text{ sec})} \\ &= 1.58 \times 10^{-10} \text{ cm} = 0.016 \text{ \AA} \end{aligned}$$

5.9 Μηχανική Πινάκων. Εναλλακτική περιγραφή κβαντικών φαινομένων.

Μια αιτία της αποτυχίας της θεωρίας Bohr: Ασχολείται με ποσότητες τις οποίες δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε καθόλου στην κβαντική θεωρία (με χρήση X-rays φαινόμενο Compton κλπ.) . Έτσι ο Bohr μιλάει για τροχιά, δίνει κίνηση στο ηλεκτρόνιο, ορμή ή ταχύτητα του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου , χωρίς όμως να λαβαίνει την όψη ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε την θέση του ηλεκτρονίου στο άτομο , χωρίς να το διαταράξουμε ή ακόμη και να το διασπάσουμε και έτσι δεν μπορούν να δοκιμασθούν οι θεμελιώδεις ιδέες του (τροχιά, ταχύτητα). Κατά τον Heisenberg πρέπει να περιλαμβάνει φυσικώς παρατηρήσιμα μεγέθη και μόνον αυτά , όπως συχνότητα, εντάσεις φωτός. Έτσι ο Heisenberg & αργότερα οι Born & Jordan αντικατέστησαν την ατομική μηχανική του Bohr με την μηχανική πινάκων. Για να δώσουμε σύντομα μερικά στοιχεία της μεθόδου των πέρνουμε κατ' αρχήν της συχνότητες.

$$V_{nm} = \frac{E_n}{h} - \frac{E_m}{h}$$

που παρατηρούμε πειραματικά στο άτομο του υδρογόνου σαν παρατηρήσιμες ποσότητες και τις ταξινομούμε σε τετραγωνική διάταξη

$$\begin{pmatrix} V_{11}=0 & V_{12} & V_{13} & \dots \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & \dots \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Γενικεύοντας λέμε ότι η τέταρτη στήλη & δεύτερη στήλη πάντα σχετίζεται με μετάπτωση από την τέταρτη στη δεύτερη κβαντική κατάσταση. Τότε μπορούμε να φτιάξουμε μια διδιάστατη διάταξη των πλατών a_{nm} των "οιωνί συντονιστών" που σχετίζονται με τις εκπεπομένες συχνότητες, όπου a_{nm}^2 δηλώνει την ένταση της συχνότητας που εκπέμπεται

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να βάλουμε άλλες ποσότητες σχετιζόμενες με τη μετάπτωση $n \rightarrow m$. Ο υπολογισμός των συστοιχιών γίνεται ως εξής. Εστω ότι θεωρούμε τους παράγοντες

$$a_{nk} = e^{i\omega_{nk}t}, \text{ και } a_{km} = e^{i\omega_{km}t}$$

Αν τους πολλαπλασιάσουμε, τότε με τον συνδυαστικό κανόνα του Ritz προκύπτει:

$$e^{i\omega_{nk}t} e^{i\omega_{km}t} = e^{2n(\nu_{nk} + \nu_{km})t} = e^{2n(\nu_{nm})t}$$

Ο προκύπτων ταλαντωτικός παράγοντας ανήκει στην ίδια συστοιχία. Έτσι με τη μέθοδο αυτή με το γινόμενο πάμε σε ένα άλλο μέρος της συστοιχίας. Μπορούμε να ορίσουμε γινόμενο, έτσι ώστε αυτό να είναι μια νέα τετραγωνική συστοιχία.

$$(a_{nm})(b_{nm}) = \left(\sum_n a_{nk} b_{km} \right)$$

Ο κανόνας του Heisenberg βασιζόταν αποκλειστικά σε πειραματικά αποτελέσματα. Συμπίπτει να είναι και κανόνας πολλαπλασιασμού πινάκων. Με την εισαγωγή της θεωρίας των πινάκων του Heisenberg, προκύπτει κατά ένα φυσικό τρόπο μια εξήγηση της αρχής της αβεβαιότητας. Μπορούμε να σχηματίσουμε έναν πίνακα συντεταγμένων, ένα πίνακα ορμών, κλπ, στην κλασική μηχανική.

Υπάρχει όμως μια σημαντική διαφορά στο ότι οι πίνακες που αντιστοιχούν στο γινόμενο των πινάκων θέσεων και ορμών δεν έχουν την ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας. Μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι για το γινόμενο των πινάκων ορμής και θέσεις προκύπτει η σχέση

$$p_k q_k - q_k p_k = \frac{\lambda}{2\pi i}$$

Οι σχέσεις αυτές αντιμεταθέσως, (Born και Jordan 1925) αντικαθιστούν τις κβαντικές συνθήκες της θεωρίας του Bohr. Στο κεφάλαιο 6 θα δούμε τον φυσικό τρόπο με τον οποίο οι ιδέες αυτές οδηγούν στα ορθά αποτελέσματα.

Ασκήσεις

(1) 1^ο (α) Δέσμη ηλεκτρονίων με κινητική ενέργεια E_k πέφτει στην επίπεδη επιφάνεια ενός κρυστάλλου υπό γωνία $\phi=30^\circ$. Οι αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών επιπέδων του κρυσταλλικού πλέγματος είναι $d=5 \times 10^{-7} \text{m}$. Μετά τη σκέδαση της από τον κρύσταλλο τα ηλεκτρόνια καταμετρούνται από τον απαριθμητή Α. Για ποιές τιμές της ενέργειας E παρουσιάζει μέγιστα ο αριθμός των ηλεκτρονίων που καταμετρά ο απαριθμητής στη μονάδα του χρόνου; (β) Μια δέσμη ηλεκτρονίων με κινητική ενέργεια 150eV πέφτει πάνω σε κρύσταλλο Νικελίου του οποίου η απόσταση μεταξύ διαδοχικών μορίων στο πλέγμα είναι $2.15 \times 10^{-10} \text{m}$. Να υπολογίσετε τη γωνία της περίθλασης πρώτης και δεύτερης τάξης των ηλεκτρονίων.

(2) Η ταχύτητα μιας σφαίρας ($m=40 \text{ gr}$) και η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου ($m=9.1 \times 10^{-28} \text{ gr}$) μετρώνται ότι είναι ίδιες, με αβεβαιότητα 0.01%. Με πόση θεμελειώδη ακρίβεια θα μπορούσατε να προσδιορίσετε την θέση κάθε μίας, αν η θέση και η ταχύτητα μετριώνται ταυτόχρονα στο πείραμα αυτό; (Υποδ. $\Delta p = m \Delta v$, $\Delta x > h/4\pi \Delta p$).

(3) Ο επιταχυντής ηλεκτρονίων των 50-60 GeV στο SLAC δίνει ηλεκτρονική δέσμη με πολύ μικρό μήκος κύματος κατάλληλο για ενδοσκοπική μικρών λεπτομερειών τη πυρηνικής δομής με πειράματα σκέδασης. Πόσο είναι το μήκος κύματος των ηλεκτρονίων της δέσμης; Βρείτε το κλάσμα $\lambda_{\text{δέσμη}}$ (διάμετρο πυρήνα), όπου για "διάμετρο πυρήνα", πάρτε μια μέση διάμετρο. (Σημ. για την εκτίμηση της ορμής στις ενέργειες αυτές. πάρτε $p=E/c$).
Απαντ. ($\lambda=2.5 \times 10^{-17}$ m).

(4) Ποιο επιταχυντικό δυναμικό θα απαιτείτο για ηλεκτρόνια ενός ηλεκτρονικού μικροσκοπίου ώστε αυτό να έχει την ίδια διακριτική ικανότητα που θα είχαμε από ένα μικροσκόπιο "ακτίνων γ" χρησιμοποιώντας ακτίνες γ ενέργειας 0.3 MeV;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6.1 ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΥΛΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ. ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟ SCHRODINGER.

Ως τώρα έχουμε δει αρκετά πειστικές πειραματικές ενδείξεις τόσο για την κυματική συμπεριφορά υλικών σωματιδίων όσο και για την σωματιδιακή συμπεριφορά της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Σε μερικές απλές περιπτώσεις, όπως είναι εκείνη μιας δέσμης σωματιδίων μη σχετικιστικών που έχουν όλα σταθερή ταχύτητα μπορεί να γίνει, όπως έχουμε δει στο εδάφιο 5, και ποσοτική σύγκριση ως κάποιο βαθμό της κυματικής συμπεριφοράς σωματιδίων με κάποιο συγκεκριμένο μήκος κύματος de Broglie λ , και της αντίστοιχης κυματικής εικόνας από δέσμη μονοχρωματικής ακτινοβολίας ίδιου μήκους κύματος από δέσμη μονοχρωματικής ακτινοβολίας ίδιου μήκους κύματος λ . Μολονότι οι πειραματικές συνθήκες είναι αρκετά διαφορετικές για τις δύο αυτές δέσμες δεδομένου ότι οι ακτίνες των φωτονίων είναι εν γένει πιο διευσδυτικές από τα ηλεκτρόνια ίδιου μήκους κύματος, τα αποτελέσματα δείχνουν όχι μόνο μια ποιοτική αλλά γενικά μια ποσοτική όχι εντελώς πλήρη λόγω διαφορετικών πειραματικών συνθηκών, συμφωνία.

Από την άλλη πλευρά θα ήταν αρκετά χρήσιμο αν μπορούσε να υπάρχει μια μαθηματική περιγραφή αυτών των υλικών κυμάτων με βάση την οποία να περιγράψουμε την κινηματική του κατάσταση και έτσι κατ' αρχήν να προσδιορίσουμε τις διάφορες παραμέτρους της κίνησης του όπως την θέση, την ορμή του κ.λ.π. στο βαθμό βέβαια που αυτό επιτρέπεται από την αρχή της αβεβαιότητας. Στην περίπτωση δέσμης σωματιδίων, μιας κατά προσέγγιση τιμής ορμής, που κινούνται σε περιοχή όπου δεν ασκούνται δυνάμεις πάνω του υπάρχει μια δυνατότητα περιγραφής της κατάστασης του καθενός σωματιδίου της δέσμης με την βοήθεια ενός κύματος μιας συχνότητας (ημιτονικού ή συνημιτονικού). Όμως όπως έχουμε δει στο μάθημα της

κυματικής (θεώρημα εύρους ζώνης) δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τον κυματικό αριθμό, $k=p/h$, του σχετιζόμενου με το σωματίδιο κύματος με απόλυτη ακρίβεια. Τούτο σημαίνει ότι το υλικό κύμα είναι αναγκαστικά επαλληλία συνιστωσών με διαφορετικό κυματικό αριθμό και διαφορετική συχνότητα, και άρα η κατάσταση του σωματιδίου μπορεί να περιγράφεται με την βοήθεια του αντίστοιχου **κυματοπακέτου**. Επίσης έπεται ότι η αβεβαιότητα γνώσης της θέσης του σωματιδίου δεν θα είναι άπειρη, αλλά πεπερασμένη.

Έχει η διατύπωση αυτή κανένα νόημα ή κάποια αντιστοιχία με έννοιες της κλασικής φυσικής; Η απάντηση είναι : **ναι**. Η αντιστοιχία προς το κυματοπακέτο έννοια στο Κεφάλαιο της κινηματικής του υλικού σημείου είναι: **η εξίσωση της τροχιάς, $y = y(t)$** , ενός σωματιδίου γνωστής μάζας m . Διότι από αυτήν μπορούμε να πάρουμε το μέγιστο των πληροφοριών για την κίνηση του υλικού σωματιδίου. Έτσι και με την γνώση του κυματοπακέτου μπορούμε όπως θα δούμε να πάρουμε την μέγιστη δυνατή πληροφορία για την κατάσταση του σωματιδίου.

Όμως όπως στην κλασική Μηχανική μας απασχολεί το πρόβλημα της συμπεριφοράς του σωματιδίου όταν τούτο επηρεάζεται από κάποιο πεδίο δυνάμεων, υπάρχει αντίστοιχα το πρόβλημα της περιγραφής της συμπεριφοράς του σωματιδίου όταν αυτό συμμετέχει σε κβαντικά φαινόμενα στα οποία όμως **κάποια δύναμη ασκείται στο σωματίδιο αυτό**. Το ερώτημα τότε είναι: υπάρχει κάποια μαθηματική εξίσωση που να διέπει την δυναμική της αλληλεπίδρασης του σωματιδίου με το πεδίο των δυνάμεων που ασκείται σε αυτό; Το ερώτημα αυτό μπορεί να φαίνεται από πρώτη σκοπιά ακατανόητο, είναι όμως δικαιολογημένο και αντιστοιχεί στο εξής ερώτημα της **Κλασικής Μηχανικής** : Υπάρχει κάποιος φυσικός νόμος διατυπωμένος μαθηματικά που να περιγράφει την συμπεριφορά ενός σωματιδίου υπό την επενέργεια δυνάμεως; Βέβαια εδώ και το ερώτημα είναι κατανοητό και η απάντηση είναι **εμπειρικά** γνωστή: Η εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης δηλαδή ο δεύτερος νόμος το Νεύτωνα που συνδέει την επιτάχυνση του σωματιδίου με τη δύναμη που ασκείται σε αυτό. Ο νόμος αυτός δεν αποδείχθηκε με βάση κάποιο θεωρητικό συλλογισμό αλλά η πεποίθησή μας ότι είναι σωστός οφείλεται στην συμφωνία το με τα πειραματικά αποτελέσματα τεραστίου αριθμού πειραμάτων. Έτσι και στην κβαντική φυσική αναζητήθηκε ένας φυσικός νόμος διατυπωμένος μαθηματικά που να περιγράφει την συμπεριφορά του υλικού σωματιδίου στον

μικρόκοσμο του ατόμου, των μορίων, πυρήνων και γενικά όπου ισχύει η συνθήκη για κβαντική συμπεριφορά σωματιδίων. Ο νόμος αυτός βρέθηκε και διατυπώθηκε το 1923 από τον Schrodinger και έτσι από τότε λέγεται **κυματική εξίσωση του Schrodinger** και πράγματι περιγράφει σωστά την κβαντική συμπεριφορά των υλικών σωματιδίων μέσα σε πεδίο δυνάμεων. Μολονότι η εξίσωση αυτή δεν αποδεικνύεται θεωρητικά και η ισχύς της στηρίζεται μόνο στη συμφωνία με το πείραμα, δηλαδή είναι ένα αξίωμα της φυσικής, εν τούτοις υπάρχει κάποια σειρά λογικών συλλογισμών με βάση τους οποίους η εξίσωση Schrodinger φαίνεται να είναι ευλογοφανής. Η σειρά αυτή των συλλογισμών θα παρουσιαστεί στη συνέχεια και πιστεύουμε ότι παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρόλο που, όπως συμβαίνει στην κλασική μηχανική με την δεύτερη εξίσωση του Νεύτωνα, δεν θα ήταν τυπικά λάθος μας να διατυπώσουμε μαθηματικά την εξίσωση αυτή του Schrodinger, να πούμε ότι **είναι αξίωμα που στηρίζεται στη συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα** και να προχωρήσουμε στις εφαρμογές.

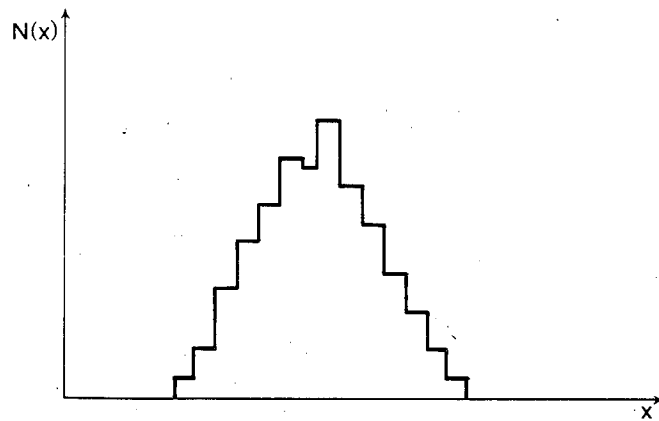
Επιφυλασσόμενοι λοιπόν να διατυπώσουμε άμεσα την εξίσωση του Schrodinger, θα ακολουθήσουμε με κάποια όμως τροποποίηση τα βήματα που ο Schrodinger έκανε για να καταλήξει στην εξίσωση του.

6.2 ΕΞΙΣΩΣΗ SCHRODINGER για ελεύθερο σωματίδιο.

Ψάχνουμε λοιπόν για μία διαφορική εξίσωση που να συνδέει κάποιο πλάτος Ψ που θα είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης και θα περιγράφει την κυματική συμπεριφορά του σωματιδίου όταν συμμετέχει σε κβαντικά φαινόμενα. Η Ψ είναι μια συνάρτηση από την οποία μπορούμε να αντλήσουμε τη μέγιστη δυνατή ποσότητα πληροφοριών για την κατάσταση του σωματιδίου και έτσι μπορούμε να πούμε ότι είναι συνάρτηση της θέσης x και του χρόνου t . Όπως όμως μαθαίνουμε από την αρχή της αβεβαιότητας και από τα πειράματα περίθλασης ηλεκτρονίων από κρυστάλλους, η θέση x του σωματιδίου δεν είναι γνωστή με τέλεια ακρίβεια, επομένως η γνώση της συνάρτησης $\Psi(x,t)$ μας επιτρέπει μόνο να ξέρουμε με στατιστική έννοια: την πιθανότητα το σωματίδιο να βρίσκεται στο διάστημα $(x, x+dx)$. Τούτο φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 6.1.

Η πιθανότητα αυτή προκύπτει αν κάνουμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό μετρήσεων σε πανομοιότυπα σωματίδια υπό τις ίδιες πειραματικές συνθήκες, οπότε σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας το μέγεθος x δεν θα έχει μονοσήμαντη τιμή αλλά εν γένει μια κατανομή, όπως π.χ. εκείνη του Σχήματος 6.1. Έτσι

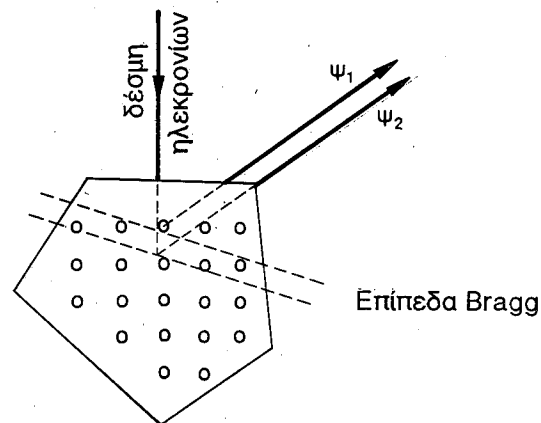
αν από την ζητούμενη εξίσωση η συνάρτηση Ψ έχει μεγάλη τιμή για μια τιμή της



Σχήμα 6.1 Μια τυπική κατανομή αποτελεσμάτων μέτρησης θέσεως ενός σωματιδίου. Το $N(x)$ παριστάνει τον αριθμό των μετρήσεων που έδωσαν θέση στο διάστημα $(x, x+\Delta x)$.

θέσης x , τούτο θα σημαίνει ότι το σωματίδιο έχει μεγάλη πιθανότητα να βρεθεί στο διάστημα $(x, x+dx)$ εάν γίνει κάποια μέτρηση θέσης.

Στο φυσικό νόημα της συνάρτησης $\psi(x,t)$ θα επανέλθουμε πιο συστηματικά σε επόμενο εδάφιο.



Σχήμα 6.2 Ένα κατά de Broglie υλικό κύμα στο σημείο Σ προκύπτει σαν επαλληλία κυμάτων ψ_1, ψ_2, \dots που οφείλονται σε "ανακλάσεις" σε διάφορα επίπεδα Bragg του κρυστάλλου.

Αναζητούμε λοιπόν μια εξίσωση της μορφής:

$$F(\psi, \psi', \psi'', \dots, V, M, h) = 0 \quad (6.1)$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι προφανώς η κυματική συνάρτηση πρέπει να εξαρτάται προφανώς από τις δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο, δηλαδή από τη δυναμική ενέργεια $V(x)$. Επίσης είναι φανερό ότι η κυματική συνάρτηση ψ θα εξαρτάται γενικά και από την τιμή της παραμέτρου της μάζας του σωματιδίου. Η παράμετρος h υπεισέρχεται ώστε η εξίσωση να έχει την σωστή οριακή συμπεριφορά όταν τείνουμε στο κλασικό όριο. Ας δούμε τώρα μήπως με φυσικά επιχειρήματα μπορούμε να περιορίσουμε και να κάνουμε πιο συγκεκριμένη τη μορφή της εξίσωσης (6.1). Πρώτον, όπως έχουμε δει από την ανάλυση του πειράματος των Davisson-Germer: Αν ψ_1 είναι ένα κύμα που σκεδάζεται από ένα άτομο του πλέγματος (βλέπε Σχήμα 6.2) και ψ_2 είναι το κύμα που σκεδάζεται από ένα άλλο επίπεδο του πλέγματος, τότε το συνιστάμενο κύμα είναι το $\psi_1 + \psi_2$, περίπου όπως στην αρχή του Huygens σθροίζουμε τα αποτελέσματα δευτερογενών πηγών για να βρούμε την απομάκρυνση λόγω συμβολής, και προφανώς αποτελεί μια δυνατή κατάσταση του σωματιδίου. Τούτο λοιπόν είναι συνέπεια της αρχής της επαλληλίας σε κυματικά φαινόμενα που ήδη έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο εδάφιο. Συνεπώς αν ψ_1, ψ_2 είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης (6.1) τότε και η $\psi_1 + \psi_2$ θα είναι λύση της ίδιας εξίσωσης και άρα αυτή θα έχει την ιδιότητα της γραμμικότητας, έτσι:

$$\text{αν } F(\psi_1) = 0 \text{ και } F(\psi_2) = 0, \text{ τότε και } F(\psi_1 + \psi_2) = 0$$

Από την άλλη πλευρά η εξίσωση (6.1) δεν πρέπει να περιέχει συντελεστές που να είναι συναρτήσεις παραμέτρων όπως ορμή, ενέργεια, κυματικό αριθμό σωματιδίου κ.λ.π.. Αυτό δεν πρέπει να συμβαίνει ώστε να μπορούμε να κάνουμε επαλληλία λύσεων που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές των παραμέτρων αυτών. Τούτο μας λέει ότι μια γενική συνάρτηση δεν μπορεί να είναι λύση μιας εξίσωσης που περιέχει τις παραμέτρους αυτές που αναφέραμε στη δομή της. Με βάση αυτούς τους περιορισμούς ας δοκιμάσουμε μήπως μια εξίσωση του τύπου της κλασικής κυματικής εξίσωσης αποτελεί αποδεκτή μορφή για την περιγραφή ενός υλικού σωματιδίου:

$$\partial^2 \psi / \partial t^2 = a (\partial^2 \psi / \partial x^2) \quad (6.2)$$

Αντικαθιστώντας τις πολύ απλοϊκές λύσεις των οδευόντων κυμάτων :

$$\cos(kx - \omega t) \quad , \quad \sin(kx - \omega t)$$

στην (6.2) και απαιτώντας να την ικανοποιούν παίρνουμε την αναγκαία συνθήκη:

$$a = \omega^2/k^2 = E^2/p^2 = p^2/(4m^2) \quad (6.3)$$

Βλέπουμε τότε ότι η (6.3) περιέχει **παραμέτρους κίνησης**, όπως π.χ. την ορμή p , πράγμα απαράδεκτο σύμφωνα με τον περιορισμό που προσαναφέραμε. Έτσι η εκλογή της μορφής της εξίσωσης (6.2) δεν οδηγεί σε αποδεκτή κυματική εξίσωση. Ας δοκιμάσουμε λοιπόν άλλη επιλογή στην οποία καταλήγουμε με τον εξής συλλογισμό: Εάν παραγωγίσουμε δύο φορές ως προς x την λύση για επίπεδο μονοχρωματικό κύμα:

$$\Psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (6.4)$$

τότε έχουμε εμφάνιση ενός συντελεστή $-k^2$, ενώ εάν παραγωγίσουμε την ίδια έκφραση ως προς t μια φορά τότε έχουμε την εμφάνιση ενός παράγοντα ω . Έτσι προκύπτει η σχέση:

$$(\partial^2 \Psi / \partial x^2) / (\partial \Psi / \partial t) = -(k^2 / i \omega) \quad (6.5)$$

Ομως κάνοντας χρήση των σχέσεων του Planck, $E = \hbar \omega$, και το de Broglie $p = \hbar k$, η Εξ. (6.5) δίνει :

$$(\partial \Psi / \partial t) / (\partial^2 \Psi / \partial x^2) = -i \hbar (E/p^2) \quad (6.6)$$

επειδή όμως είναι για ένα μη σχετικιστικά κινούμενο σωματίδιο $E = p^2/2m$, έπεται ότι η (6.5) μπορεί να γραφεί :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \quad (6.7)$$

που ονομάζεται εξίσωση του Schrodinger για ελεύθερο σωματίδιο. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία με την έκφραση $\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, δεν παίρνουμε κάποια εξίσωση όπου να απαλείφονται τελικά οι παράμετροι της κίνησης του σωματιδίου. Επομένως δεν οδηγεί σε μια αποδεκτή εξίσωση ως προς Ψ . Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού ας

δεχθούμε ότι το αρμονικό υλικό κύμα $A \cos(kx - \omega t)$ ικανοποιεί κάποια κυματική εξίσωση. Για να την βρούμε παραγωγίζουμε την συνάρτηση αυτή δύο φορές ως προς x και μια φορά ως προς t , οπότε παίρνουμε :

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 = -k^2 A \sin(kx - \omega t)$$

και

$$\partial \psi / \partial t = -\omega A \sin(kx - \omega t) \quad (6.8)$$

και λόγω των σχέσεων $E_{\text{κιν}} = \hbar \omega$, και $p = \hbar k$ που προκύπτουν από τις σχέσεις Planck και de Broglie αντίστοιχα, τότε αν λάβουμε υπόψη την $E_{\text{κιν}} = p^2 / 2m$ έχουμε :

$$k^2 / \omega = 2m / \hbar \quad (6.9)$$

Αν λοιπόν διαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (6.7) και λάβουμε υπόψη την (6.8) προκύπτει:

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 = \frac{2m}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} \tan(kx - \omega t) \quad (6.10)$$

Ετσι προκύπτει μια υποψήφια κυματική εξίσωση που περιέχει τον παράγοντα $\tan(kx - \omega t)$ που εξαρτάται από παραμέτρους κίνησης ενός σωματιδίου : $E = \hbar \omega$ και $p = \hbar k$, άρα δεν επιτρέπει λύσεις που να είναι επαλληλία δυο υλικών κυμάτων με ενέργειες π.χ E_1 και E_2 αντίστοιχα. Άρα αναγκαζόμαστε να αποδεχθούμε προς στιγμή σαν εξίσωση περιγραφής υλικού σωματιδίου την Εξ. (6.6), ενώ ταυτόχρονα έχουμε και μία μερική λύση της εξίσωσης αυτής, την :

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} = A e^{\left[\frac{i}{\hbar} (px - Et) \right]} \quad (6.11)$$

που όπως βλέπουμε αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο ορμής p και κινητικής ενέργειας E .

6.3 Κυματική εξίσωση για ένα σωματίδιο σε πεδίο δυνάμεων.

Τώρα από την έκφραση (6.11) για την κυματοσυνάρτηση ενός ελεύθερου σωματιδίου αν παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο και την συντεταγμένη θέσης

χ προκύπτουν αντίστοιχα οι δύο σχέσεις :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \Psi \quad , \quad -i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x \Psi \quad (6.12)$$

Οι σχέσεις αυτές ισχύουν προφανώς για σωματίδια που βρίσκονται εκτός πεδίου δυνάμεων. Μολονότι όμως η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου που βρίσκεται μέσα σε πεδίο δυνάμεων πιστεύουμε ότι θα πρέπει να είναι αρκετά διαφορετική από εκείνη που περιγράφεται από την έκφραση (6.9), δεχόμαστε **αξιωματικά** ότι οι σχέσεις (6.10) ισχύουν για την κυματοσυνάρτηση ακόμη και εντός πεδίου δυνάμεων. Στην περίπτωση αυτή την επίδραση της δύναμης είναι προτιμότερο να την περιγράψουμε με τη βοήθεια μιας συνάρτησης $V(x,t)$ δυναμικής ενέργειας ή δυναμικού όπως θα λέμε από εδώ και στο εξής συχνά. Με αυτή την παραδοχή αν κάνουμε χρήση της σχέσης

$$E = p^2 / 2m + V(x,t) \quad (6.12)$$

εφαρμόζοντας τη σχέση (6.12) παίρνουμε αφού την παραγωγίσουμε :

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi = p_x^2 \Psi = 2m(E-V) \Psi \quad (6.13a)$$

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t) \right] \Psi(x,t) \quad (6.13\beta)$$

Η σχέση (6.13β) αποτελεί τη περίφημη εξίσωση του Schrodinger για σωματίδιο μέσα σε πεδίο δυνάμεων και είναι τετριμμένη άσκηση να δείξετε ότι περιλαμβάνει και την περίπτωση του ελεύθερου σωματιδίου. Παρόλο που δώσαμε μια σειρά συλλογισμών με τους οποίους οδηγηθήκαμε στις σχέσεις (6.7) και (6.13), τούτο δεν αποτελεί καθόλου αυστηρή απόδειξη της Εξίσωσης του Schrodinger. Απλά ίσως με τα βήματα αυτά να φαίνεται η κατάληξη σε αυτές τις δύο σχέσεις κάπως πιο ευλογοφανής από ότι αν κανείς μας ισχυριζόταν εξ αρχής αξιωματικά ότι αυτές οι εξισώσεις περιγράφουν την συμπεριφορά των σωματιδίων στο μικρόκοσμο του ατόμου. Ο τελικός κριτής της ισχύος ή όχι της (6.13 β) είναι η σύγκριση των προβλέψεών της με πειραματικά αποτελέσματα. Αυτή η σύγκριση σε τεράστια σειρά πειραμάτων

έχει δώσει ικανοποιητικότερα αποτελέσματα και για τον λόγο αυτό ουσιαστικά η εξίσωση αυτή θεωρείται ότι έχει αξιωματική ισχύ, όπως αντίστοιχα πιστεύουμε στην ορθότητα της θεμελειώδους εξίσωσης της Μηχανικής του Νεύτωνα επειδή δηλαδή αυτή συμφωνεί με το πείραμα και όχι επειδή μας φαίνεται εύλογη.

Η συλλογιστική με την οποία καταλήξαμε στην Εξ. (6.13.β) στηρίζεται κύρια στην έμμεση υπόθεση που κάναμε ότι ένα σωματίδιο συμπεριφέρεται σαν κύμα. Την υπόθεση αυτή πράγματι την κάναμε αφού δοκιμάσαμε μια αρμονική συνάρτηση χώρου και χρόνου. Επίσης βάζοντας στο όρισμα της κυματοσυνάρτησης μας το E/\hbar στη θέση της κυκλικής συχνότητας και το p/\hbar στη θέση του κυματάρθμου του κύματος στην πραγματικότητα δώσαμε εκ των προτέρων την ιδιότητα του δεισιμού κύμα-ύλη όπως θα υποδεικνυε ο de Broglie, σύμφωνα δηλαδή με την ειδική σχέση κήκους κύματος και ορμή που μας χάρισε. Έτσι με τόσα σωστά συστατικά που περιέχει και τα οποία μεμονωμένα συμφωνούν με το πείραμα δεν πρέπει να μας εκπλήσσει πάρα πολύ ότι η εξίσωση του Schrodinger συμφωνεί τελικά με τα πειραματικά αποτελέσματα. Λόγω των σχέσεων (6.12), η εξίσωση Schrodinger μεταπίπτει στην

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V(x) \psi = E \psi \quad (6.14)$$

Η σχέση (6.14) λέγεται και χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση Schrodinger. Ας δούμε λίγο πιο φορμαλιστικά τη διατύπωση της εξίσωσης του Schrodinger. Αυτή γράφεται συχνά υπό την μορφή

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad (6.15)$$

όπου \hat{H} είναι ο λεγόμενος **τελεστής της χαμιλτονιανής**, οποίος ορίζεται με τον τρόπο που η παραπάνω έκφραση δρα πάνω σε μια συνάρτηση $\psi(x,t)$:

$$\hat{H} \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + V(x,t) \psi(x,t) \quad (6.16)$$

Υπενθυμίζουμε ότι στην κλασική Μηχανική ονομάζουμε Χαμιλτονιανή H , τη

συνάρτηση

$$H = H(p, x) = \frac{p_x^2}{2m} + V(x) \quad (6.17)$$

που για ένα σωματίδιο σε πεδίο δυνάμεων ισούται με την ολική ενέργεια του, δηλαδή την κινητική συν τη δυναμική ενέργεια.

6.4 Ιδιότητες της εξίσωσης του Schrodinger.

Ας δούμε τώρα ποιές είναι οι ιδιότητες της εξίσωσης του Schrodinger και ας ελέγξουμε κατά πόσο αυτές ικανοποιούν τις φυσικές απαιτήσεις που θα έπρεπε να ικανοποιεί μια φυσικά αποδεκτή κυματική εξίσωση.

Πρώτα μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι η εξίσωση (6.11) ικανοποιεί την απαίτηση της γραμμικότητας. Έτσι αν οι συναρτήσεις $\Psi_1(x,t)$ και $\Psi_2(x,t)$ είναι λύσεις της εξίσωσης του Schrodinger, τότε και οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός

$$\Psi(x,t) = \alpha\Psi_1(x,t) + \beta\Psi_2(x,t) \quad (6.18)$$

όπου α και β οποιοσδήποτε μιγαδικές ποσότητες ικανοποιεί την (6.13.β). Η Εξίσωση (6.13.β) είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με μερικές παραγώγους ως προς τον χρόνο και την συντεταγμένη της θέσης της οποίας μπορεί να αναζητήσει κανείς την μαθηματική λύση η οποία όμως από μόνη της δεν σημαίνει τίποτα αν δεν δοθεί μια φυσική ερμηνεία στην κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)$ λύση της (6.13.β). Η δεύτερη ιδιότητα των λύσεων της Εξίσωσης του Schrodinger είναι ότι αυτές έχουν μεγαλύτερο μέτρο (μέτρο μιγαδικής ποσότητας) στα διαστήματα εκείνα $(x, x+\Delta x)$ στα οποία είναι πιο πιθανόν να βρεθεί ένα σωματίδιο που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση- λύση $\Psi(x,t)$. Αυτή η δεύτερη ιδιότητα δεν μπορεί να αποδειχθεί μαθηματικά και έτσι αποτελεί στην πραγματικότητα υπόθεση, η οποία έγινε για πρώτη φορά από τον Born το 1926 και όπως θα δούμε είναι αυτή η υπόθεση που δίνει ουσιαστική προβλεπτική και υπολογιστική ισχύ στην Εξίσωση του Schrodinger. Αυτή η υπόθεση θα συζητηθεί σε επόμενο εδάφιο. Ένα τρίτο εξαιρετικά εκπληκτικό χαρακτηριστικό της Εξίσωσης του Schrodinger προκύπτει από την παρατήρηση ότι περιέχει τον μιγαδικό συντελεστή i που δεν συναντιέται πρακτικά σε καμία από τις γνωστές διαφορικές εξισώσεις κίνησης της Κλασικής Φυσικής. Τούτο βέβαια δεν πρέπει να μας εκπλήσει

πάρα πολύ ως προς την μαθηματική αυτή δομή δεδομένου ότι ήδη την Εξίσωση Schrodinger την κατασκευάσαμε έτσι ώστε να ικανοποιείται από μιγαδικές κυματοσυναρτήσεις όπως είναι η έκφραση (6.9) που είναι μιγαδική. Το πρακτικό ερώτημα το σχετικό με αυτή την ιδιότητα είναι αν οι μιγαδικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων με μιγαδικούς συντελεστές μπορούν να έχουν αποδεκτό φυσικό νοημα. Σε επόμενο εδάφιο θα δούμε ότι η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι καταφατική.

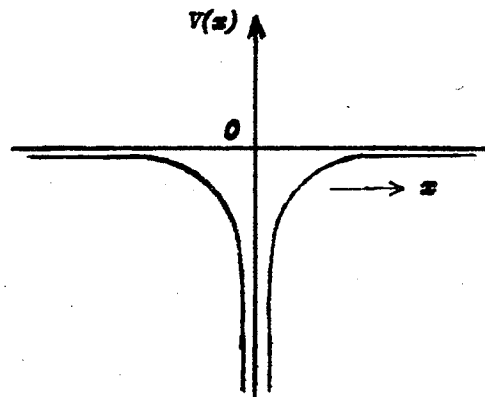
6.5 Επίλυση της εξίσωσης του Schrodinger σε τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού με τοιχώματα απείρου βάθους.

Προτού προχωρήσουμε στη μελέτη της εξίσωσης του Schrodinger και ερμηνεύσουμε τις δυνατές λύσεις της, είναι διδακτικό να αναζητήσουμε τον τρόπο επίλυσης της σε περιπτώσεις απλών πεδίων δυνάμεων. Αυτό θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε την φυσική ερμηνεία των λύσεων διότι σε πολύ απλές περιπτώσεις πεδίων δυνάμεων έχουμε κάποια διαίσθηση για τους περιορισμούς που θα πρέπει να ικανοποιούν οι κυματοσυναρτήσεις.

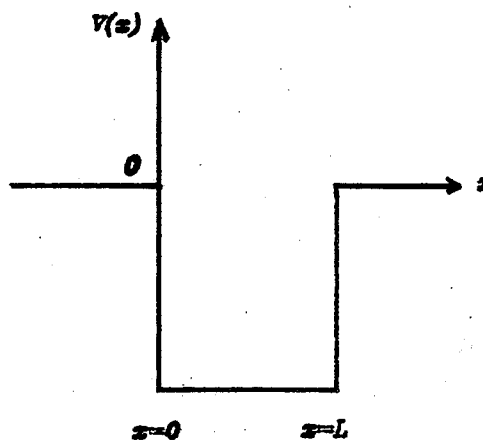
Ξεκινάμε λοιπόν με την μελέτη ενός σωματιδίου του οποίου η κατάσταση είναι δέσμια (ή φραγμένη) που αφ ενός έχει μεγάλη σπουδαιότητα αφ ετέρου παρουσιάζει μικρότερες εννοιολογικές και μαθηματικές δυσκολίες από την μελέτη της κατάστασης ενός σωματιδίου το οποίου η κίνηση δεν είναι φραγμένη ώστε τούτο να μην παραμένει δέσμιο σε μια ορισμένη περιοχή του χώρου. Μια δέσμια κατάσταση σωματιδίου, π.χ. ηλεκτρονίου, μπορεί να πραγματοποιηθεί όταν η κίνησή του περιορίζεται από δύο φραγμούς δυναμικής ενέργειας που οφείλονται π.χ στην ηλεκτροστατική έλξη Coulomb από τον θετικά φορτισμένο πυρήνα του ατόμου. Μια προσεγγιστική γραφική παρασάση της μορφής της δυναμικής ενέργεια του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο Υδρογόνου φαίνεται στο Σχήμα 6.3. Η αντιμετώπιση ενός τέτοιου πρακτικού προβλήματος θα γίνει αρκετά αργότερα όταν είμαστε βέβαιοι ότι έχουμε κατανοήσει τους φυσικούς περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιούν οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης του Schrodinger. Για τον λόγο αυτό αντί του προβλήματος επίλυσης του προβλήματος του Σχήματος 6.3, ας εξετάσουμε το πρόβλημα της μαθηματικά απλούστερης περίπτωσης που αντιστοιχεί στο Σχήμα 6.4.

Η περίπτωση αυτή βέβαια δεν παρουσιάζεται στη φύση, μπορεί όμως να θεωρηθεί σαν οριακή περίπτωση ενός πραγματικού δυναμικού, όπως π.χ. δυναμικού Coulomb πυρήνα ιονισμένου ατόμου μεγάλου ατομικά βάρους με ένα μόνο ηλεκτρόνιο όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.5. Παρακάμπτοντας προς στιγμή

τη μαθηματική δυσκολία που παρουσιάζει η επίλυση της εξίσωσης αυτής για $x=0$ και $x=L$, αναζητούμε την λύση πρώτα στο διάστημα $(0,L)$.



Σχήμα 6.3 Σχηματική παράσταση της εξάρτησης του δυναμικού Coulomb από την απόσταση x του ηλεκτρονίου από τον πυρήνα στο άτομο του υδρογόνου.



Σχήμα 6.4 Γραφική παράσταση της μορφής της δυναμικής ενέργειας σαν συνάρτηση της απόστασης σε τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού.

Στο πρόβλημα αυτό η δυναμική ενέργεια ισούται :

$$V(x) = \infty \quad \text{για } 0 \leq x, \quad x \geq L$$

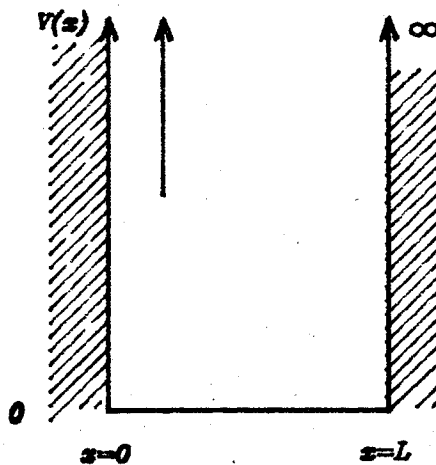
$$V(x) = 0 \quad \text{για } 0 < x < L$$

Επειδή το δυναμικό αυτό δεν εξαρτάται από το χρόνο, η εξίσωση Schrodinger χωρίζεται σε δύο ανεξάρτητες εξισώσεις. Η μια ως προς το χρόνο και η άλλη χωρική. Στην περιοχή αυτή η εξίσωση Schrodinger γράφεται :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) = E \psi(x) \quad (6.20)$$

δεδομένου ότι το δυναμικό μηδενίζεται στην υπό εξέταση περιοχή του x . Θέτοντας τώρα $k^2 = (2mE/\hbar^2)$ με $E > 0$, προκύπτει η διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0 \quad (6.21)$$



Σχήμα 6.5 Σχηματική παράσταση του πηγαδιού δυναμικού με τοίχματα απείρου βάθους.

Εδώ αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η μεταβλητή k έχει διαστάσεις αντιστρόφου μήκους όπως μπορείτε να επαληθεύσετε εύκολα βάσει του ορισμού του k , άρα

καλώς του δώσαμε τον συμβολισμό k που δίνεται συνήθως στον κυματαριθμό. Λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (6.21) είναι οι

$$\Psi(x) = A \exp(\pm ikx)$$

στο διάστημα όπως είπαμε $(0, L)$. Μια γενικότερη λύση θα είχε τη μορφή

$$\Psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} \quad (6.22)$$

Οι λύσεις αυτές επιτρέπουν κατ'αρχή οποιαδήποτε τιμή στην παράμετρο k , εφόσον δεν έχουμε ακόμη λάβει υπόψη τη συμπεριφορά της κυματοσυνάρτησης εκτός του διαστήματος $(0, L)$. Είναι φανερό ότι αν θέλουμε η κυματοσυνάρτηση να εκφράζει πιθανότητα να βρίσκεται κάπου το σωματίδιο, τότε αυτή θα πρέπει να μηδενίζεται εκτός του διαστήματος $(0, L)$ διότι αλλιώς το σωματίδιο θα έπρεπε να έχει άπειρη ενέργεια για να καταπολεμήσει το τεράστιο σε ύψος (άπειρο) φράγμα δυναμικού. Έτσι η λύση της κυματοσυνάρτησης πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες: $\Psi(x) = 0$ για $x \leq 0$ και $\Psi(x) = 0$ για $x \geq L$, ή αλλιώς:

$$\Psi(0) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} = c_1 + c_2 = 0 \quad \text{ή} \quad c_1 = -c_2 \equiv c$$

και

$$\Psi(L) = c(e^{ikL} - e^{-ikL})$$

ή $\Psi(L) = 2c \sin(kL) = 0$, και επειδή το c είναι διάφορο του μηδενός ώστε να μην έχουμε την απαράδεκτη λύση $\Psi(x) = 0$ παντού, άρα προκύπτει ότι πρέπει το γινόμενο kL να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του π . Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται για τις εξής τιμές k_n :

$$k_n = n\pi/L,$$

όπου $n = 1, 2, 3, \dots$ οπότε :

$$K_n^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2} \quad (6.23)$$

και άρα :

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 = \frac{h^2 n^2}{8mL^2} \quad (6.24)$$

όπου n ακέραιος και θετικός.

Έτσι μία λύση που ικανοποιεί και τις οριακές συνθήκες στα σημεία $x=0$ και

$x=L$ είναι η

$$\Psi_n(x) = 2c_1 \sin(k_n x) \quad (6.25)$$

ενώ εύκολα μπορείτε να επαληθεύσετε (βλ. Ασκήσεις) ότι μια λύση της χρονικά εξαρτημένης Εξίσωσης του Schrodinger είναι η

$$\Psi_n(x, t) = 2c_1 \sin k_n x e^{\left(\frac{-i E_n t}{\hbar}\right)} \quad (6.26)$$

Παρατηρείστε τώρα ότι η συνάρτηση (6.26) παρουσιάζει κάποια ομοιότητα με την λύση των στασίμων κυμάτων σε μια χορδή με ακλόνητα και τα δύο άκρα:

$$F(x, t) = A_n \sin k_n x e^{(-i \omega t)} \quad (6.27)$$

που αντιστοιχεί όχι απλώς σε ένα στάσιμο κύμα σε χορδή αλλά ακριβέστερα σε συγκεκριμένο τρόπο ταλάντωσης (n -οστή αρμονική).

Εδώ πρέπει να συγκεντρώσουμε την προσοχή μας στο γεγονός ότι η μαθηματική μορφή της λύσης (6.26) για το συγκεκριμένο πρόβλημα της εξίσωσης του Schrodinger δίνει στην πραγματικότητα μόνο ορισμένες διάκριτες επιτρεπόμενες τιμές ενέργειας του σωματιδίου μέσα στο πηγάδι δυναμικού. Δηλαδή εκτός από τις επιτρεπόμενες τιμές ενέργειας:

E_n , $n=1,2,3,\dots$ που προκύπτουν από τη σχέση (6.24) υπάρχει απειρία μη επιτρεπομένων τιμών ενέργειας, π.χ., όλες οι τιμές μέσα στο ανοικτό διάστημα που ορίζεται από τις ενέργειες E_5 και E_6 . Η λύσεις λοιπόν (6.27) παρουσιάζουν την ιδιότητα της **κβάντωσης** των επιτρεπομένων ενεργειακών τιμών σε ένα σωματίδιο που είναι δέσμιο σε ένα πηγάδι δυναμικού.

Από τον τρόπο με τον οποίο καταλήξαμε στην κβάντωση που ικανοποιούν οι κυματοσυναρτήσεις (6.26) φάνηκε ότι η κβάντωση προέκυψε κατά ένα αρκετά φυσικό τρόπο όταν βάλουμε τον περιορισμό στις κυματοσυναρτήσεις λύσεις να ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις συνοριακές συνθήκες για x μικρότερο ή ίσο του μηδέν και για x μεγαλύτερο ή ίσον του L , ότι δηλαδή η κίνηση του σωματιδίου είναι φραγμένη εντός του πηγαδιού δυναμικού. Αντίθετα κβάντωση ενέργειας δεν συνεπάγεται για την κυματοσυνάρτηση της έκφρασης (6.4) που παριστάνει ένα σωματίδιο ελεύθερο να κινείται σε όλο το χώρο. Βέβαια με την χρήση μόνο οριακών συνθηκών δεν θα προέκυπτε αυτή η κβάντωση αν

δεν χρησιμοποιούσαμε μια κυματική εξίσωση, όπως αυτή του Schrodinger. Ο τρόπος αυτός με τον οποίο προκύπτει η κβάντωση της ενέργειας είναι σχεδόν το ίδιο απλός και άμεσος, όσο ο τρόπος με τον οποίο η επιβολή των συνοριακών συνθηκών σε μια χορδή βιολιού με ακλόνητα τα δύο άκρα της οδηγεί στην σχέση $k_n = n\pi/L$, και η οποία με τη σειρά της οδηγεί στην σχέση $\omega_n = v n\pi/L$, όπου v η ταχύτητα οδεύοντων κυμάτων που είναι σταθερή ποσότητα χαρακτηριστική της χορδής, η οποία δείχνει την κβάντωση των κυκλικών συχνοτήτων (τρόποι) ταλάντωσης του κλασικού αυτού μηχανικού συστήματος.

Μολονότι η κβάντωση στην οποία οδηγηθήκαμε αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη μη ρεαλιστική μορφή δυναμικού, οι βασικές αιτίες της που είναι η ικανοποίηση της Εξίσωσης του Schrodinger και ο εξαναγκασμός ενός σωματιδίου να βρίσκεται μέσα σε ένα πηγάδι δυναμικού (γεγονός που μαθηματικά το επιβάλαμε με τις συνοριακές συνθήκες) δεν αναιρούνται και στις πιο πολύπλοκες καταστάσεις ρεαλιστικών μορφών δυναμικών ενεργειών όπως θα επιβεβαιώσουμε στις επόμενες εφαρμογές. Με άλλα λόγια η κβάντωση στην κβαντική μηχανική προκύπτει όταν βάζουμε σύνορα γύρω από σωματίδια στα οποία δεχόμαστε την ύπαρξη κυματικής συμπεριφοράς.

6.6 Μονοδιάστατο τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού.

Το πρόβλημα αυτό έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον διότι είναι λίγο περισσότερο ρεαλιστικό από εκείνο του πηγαδιού δυναμικού απείρου ύψους. Θα διερευνήσουμε τις λύσεις της εξίσωσης του Schrodinger και θα αναζητήσουμε τις ενεργειακές καταστάσεις στις οποίες είναι δυνατόν να βρίσκεται ένα σωματίδιο υπό την επίδραση ενός τέτοιου δυναμικού. Διατύπωση του προβλήματος :

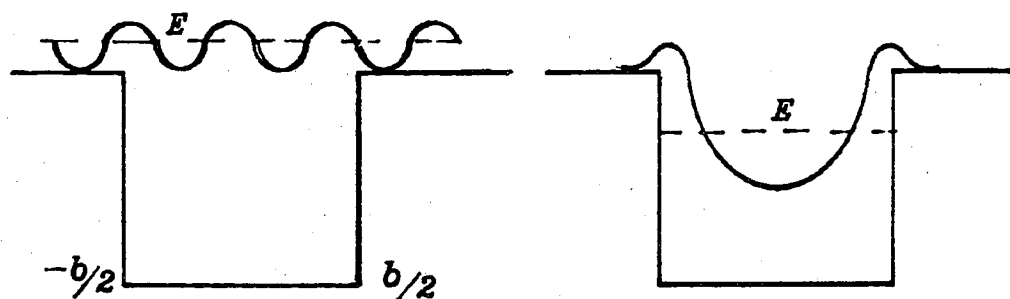
Να βρεθούν οι φυσικά παραδεκτές κυματοσυναρτήσεις και οι ιδιοτιμές της ενέργειας για ένα σωματίδιο ενέργειας E υπό την επίδραση δυναμικού της μορφής τετραγωνικού δυναμικού πεπερασμένου βάθους:

$$V(x)=0 \quad x < -b/2 \text{ \& } x > b/2 \text{ ή } |x| > b/2 \\ =-U \quad -b/2 \leq x \leq b/2$$

όπου το U είναι θετική ποσότητα.

Λύση :

Το δυναμικό αυτό δεν είναι και τόσο θεωρητικό. Είναι μια χονδροειδής προσέγγιση του πραγματικού δυναμικού που υφίσταται ένα ηλεκτρόνιο κοντά στον πυρήνα του ατόμου Υδρογόνου (δυναμικό Coulomb), όπως φαίνεται στο Σχήμα (6.6)



Σχήμα 6.6 α) Μορφή δυναμικού σε τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους.
β) Μορφή δυναμικής ενέργειας στην περιοχή ενός πυρήνα ατόμου Υδρογόνου.

Η χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση του Schrodinger γράφεται :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi, \quad |x| > b/2 \quad (6.28)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} - U\psi = E\psi, \quad |x| < \frac{b}{2} \quad (6.29)$$

Η λύση της πρώτης εξίσωσης στην περιοχή δηλαδή $|x| > b/2$ θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\exp(ikx)$ και $\exp(-ikx)$, όπου

$$E \equiv \hbar^2 k^2 / 2m \quad (6.30)$$

Είναι φανερό ότι αν το k είναι πραγματικό, δηλαδή το E είναι θετικό, δεν είναι δυνατόν να έχουμε φραγμένη κατάσταση διότι το ολοκλήρωμα της πυκνότητας πιθανότητας από $-\infty$ ως $+\infty$ απειρίζεται. Αυτή είναι μια επιτρεπτή κατάσταση του συστήματος που αντιστοιχεί π.χ. σε ένα ιονισμένο

άτομο Υδρογόνου. Αν όμως ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε δέσμιες καταστάσεις του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου, τότε θα πρέπει η πυκνότητα πιθανότητας που εκφράζεται από το $|\psi|^2$ να μηδενίζεται όταν το $|x|$ τείνει στο άπειρο. Αυτό προφανώς συμβαίνει, όπως φαίνεται από τις κυματοσυναρτήσεις για $|x| > b/2$, μόνο αν $E < 0$, οπότε ο κυματικός αριθμός γίνεται φανταστικός. Αν θέσουμε τότε:

$$E \equiv -\hbar^2 \alpha^2 / 2m < 0 \quad \text{και} \quad E + U \equiv \hbar^2 \beta^2 / 2m, \quad \alpha, \beta > 0: \quad (6.31)$$

προκύπτει η εξής μορφή των λύσεων για $E > 0$:

$$\psi(x) = A e^{-\alpha x}, \quad x > b/2 \quad (6.32)$$

$$\text{και} \quad \psi(x) = B e^{\alpha x}, \quad x < -b/2$$

Οι όροι $\exp(\alpha x)$ για $x > b/2$ και $\exp(-\alpha x)$ για $x < -b/2$ απορρίπτονται διότι τείνουν στο άπειρο για $|x| \rightarrow \infty$

Η λύση της δεύτερης εξίσωσης 6.29 είναι :

$$\psi(x) = C \sin \beta x + D \cos \beta x, \quad C \text{ και } D \text{ σταθερές.} \quad (6.33)$$

Για τον καθορισμό των τιμών των προδιοριστέων συντελεστών A, B, C , και D θα πρέπει να εφαρμόσουμε πρώτα τους περιορισμούς που συνεπάγονται για την κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου οι ασυνέχειες του δυναμικού στα σημεία $-b/2$ και $b/2$.

Παρατηρούμε ότι για να έχουν οι λύσεις αυτές της διαφορικής εξίσωσης του Schrodinger φυσική σημασία πυκνότητας πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιούνται ορισμένες συνθήκες συνέχειας τόσο της συνάρτησης ψ , όσο και τις παραγώγους της παντού και ειδικότερα στις θέσεις $x = -b/2$ και $x = b/2$, όπου υπάρχει ασυνέχεια του δυναμικού. Πως δικαιολογείται ο ισχυρισμός αυτός; Τούτο μπορεί να κατανοηθεί αν δούμε ότι το δεύτερο μέρος της σχέσης (6.13.a) είναι πεπερασμένο παντού. Άρα η δεύτερη παράγωγος της κυματοσυνάρτησης είναι παντού πεπερασμένη. Τούτο συνεπάγεται ότι η πρώτη παράγωγος αυτής παντού (άρα και για $x = -b/2$, $x = b/2$) είναι συνεχής. Άρα μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές A, B, C και D σαν συνάρτηση του συντελεστή C που παριστάνει το πλάτος του προσπίπτοντος υλικού κύματος. Από τις συνοριακές συνθήκες προκύπτουν οι τέσσερις σχέσεις :

$$(1) \quad Ae^{\frac{a}{2}b} = C \sin \beta \frac{b}{2} + D \cos \beta \frac{b}{2}$$

$$(2) \quad -a Ae^{-\frac{a}{2}b} = C \beta \cos \beta \frac{b}{2} - D \beta \sin \beta \frac{b}{2}$$

$$(3) \quad Be^{-\frac{a}{2}b} = -C \sin \beta \frac{b}{2} + D \cos \beta \frac{b}{2} \quad (6.34)$$

$$(4) \quad aBe^{-\frac{a}{2}b} = +C \beta \cos \beta \frac{b}{2} + D \beta \sin \beta \frac{b}{2}$$

Απαλείφοντας απ αυτές τις εξισώσεις τα A,B,C και D παίρνουμε μια σχέση ανάμεσα στα β και a . Αυτή η σχέση θα μας δώσει τις επιτρεπόμενες ενεργειακές τιμές στο σωματίδιο όταν αυτό βρίσκεται στο δοσμένο δυναμικό. Στην ίδια σχέση μπορούμε όμως να καταλήξουμε με αρκετά λιγότερες μαθηματικές πράξεις αν εκμεταλευτούμε την ιδιότητα συμμετρίας που έχει το δυναμικό αυτού του προβλήματος : Το δυναμικό είναι άρτια συνάρτηση του x : δηλαδή είναι $V(x) = V(-x)$.

Μπορούμε έτσι να οδηγηθούμε ευκολότερα στις εκφράσεις για τις ιδιοσυναρτήσεις του δυναμικού αυτού. Ας δούμε λοιπόν πως δικαιολογείται αυτό:

Λόγω της συμμετρίας αυτής, ο τελεστής της Χαμιλτονιανής παραμένει αναλλοίωτος όταν αντικαταστήσουμε το x με $-x$. Έτσι αν $u(x)$ είναι λύση της εξίσωσης:

$$\hat{H}(x) u(x) = E u(x) \quad (6.35)$$

τότε θα ισχύει και :

$$\hat{H}(x) u(-x) = E u(-x)$$

Συνεπώς, τόσο η $u(x)$ όσο και η $u(-x)$ είναι λύση της εξίσωσης των ιδιοτιμών (6.14), με την ίδια ιδιοτιμή ενεργείας E . Συνεπώς και κάθε γραμμικός συνδυασμός των λύσεων αυτών θα είναι επίσης λύση : ειδικότερα, λύσεις είναι οι συνδυασμοί που δίνουν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις. Έτσι λύσεις είναι οι $u(x)+u(-x)$ και $u(x)-u(-x)$:

$$H (u(x) + u(-x)) = E (u(x) + u(-x)) = \Psi_{\text{αρτ}} E \quad (6.36)$$

Όμοια , Έχουμε :

$$u(x) - u(-x) = \psi_{\text{περιτ}} \quad (6.37)$$

Χωρίς λοιπόν να περιορίσουμε την γενικότητα, μπορούμε να ξεκινήσουμε αναζητώντας από την αρχή τις περιττές ή τις άρτιες λύσεις των (6.28), (6.29) μια και οποιαδήποτε άλλη λύση, χρονικά εξαρτώμενη θα μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός αρτίων και περιττών ιδιοσυναρτήσεων. Οι άρτιες λύσεις στην περιοχή $(-a, a)$ θα ικανοποιούν τη σχέση

$$\psi(x) = \psi(-x)$$

όπως εύκολα προκύπτει με αντικατάσταση στην έκφραση $u(x) + u(-x)$.

Συνεπώς εύκολα προκύπτει

$$C=0 \quad \text{και} \quad A = B \quad (6.38)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις που προκύπτουν διαιρώντας τις εξισώσεις (1) και (4) του συστήματος των (6.34) προκύπτει, αφού $C=0$:

$$a = \beta \tan(\beta b/2) \quad (6.39.a)$$

Αντίστοιχα για τις κυματοσυναρτήσεις περιττής ομοτιμίας που είναι αντισυμμετρικές γύρω από την αρχή των συντεταγμένων:

$$\psi(x) = -\psi(-x)$$

προκύπτει :

$A = -B$ και $D=0$ και άρα:

$$a = -\beta \cot(\beta b/2) \quad (6.39\beta)$$

Αν συνδυάσουμε είτε την (6.39α) είτε την (6.39β) με τους ορισμούς των παραμέτρων a και β , προκύπτει (ότι στην πραγματικότητα οι συντελεστές a και β πρέπει να ικανοποιούν ταυτόχρονα το σύστημα των δύο εξισώσεων :

$$a^2 + \beta^2 = 2mU/\hbar^2 \quad \text{και} \quad a = \beta \tan(\beta b/2) \quad (6.40)$$

Η δεύτερη εξίσωση είναι υπερβατική και επομένως δεν μπορεί να λυθεί με αναλυτικό τρόπο. Η λύση λοιπόν του συστήματος μπορεί να γίνει είτε με αριθμητικό υπολογιστή είτε γραφικά. Θα παρουσιάσουμε εδώ τον δεύτερο τρόπο. Αν π.χ. απαλείψουμε μεταξύ αυτών των δύο εξισώσεων το a παίρνουμε:

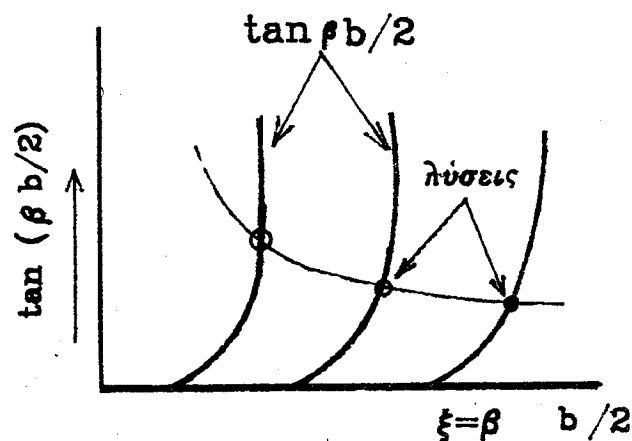
$$\tan^2(\beta b/2) = -1 + 2mU / (\hbar^2 \beta^2) \quad (\text{μονή ομοτιμία}) \quad (6.41)$$

ή

$$\cot^2(\beta b/2) = -1 + 2mU / (\hbar^2 \beta^2) \quad (\text{ζυγή ομοτιμία}) \quad (6.42)$$

για τις δύο εξισώσεις 6.39α και 6.39β αντίστοιχα. Στο Σχήμα 6.7 έχουμε σχεδιάσει τα δύο μέλη τις εξίσωσης 6.41. Οι δύο καμπύλες τέμνονται σε έναν ορισμένο αριθμό σημείων και συνεπώς έχουν πεπερασμένο αριθμό επιτρεπών τιμών του E . Ο αριθμός των επιτρεπόμενων τιμών του E εξαρτάται

από τον συσχετισμό των μεγεθών b και U . Αν $U > 0$, φαίνεται από το Σχήμα 6.2 ότι δεν υπάρχουν λύσεις φραγμένων καταστάσεων. Τούτο δεν πρέπει να μας εκπλήσσει: το δυναμικό σε αυτήν την περίπτωση είναι απωστικό και η σκέδαση μοιάζει με αυτήν δυο σφαιρών μπιλιάρδου!. (Σημ. ανάλογη διαδικασία ακολουθείται και για την εξίσωση 6.42).



Σχήμα 6.7 Γραφική παράσταση των δύο μελών της εξίσωσης 6.41 συναρτήσει του ορίσματος $\xi = \beta b/2$ για αναζήτηση των λύσεων της εξίσωσης.

Όσον αφορά την μορφή των κυματοσυναρτήσεων, η άρτια λύση μπορεί να πάρει την μορφή:

$$\begin{aligned} u_{\text{αρτ}}(x) &= D \cos \beta x & |x| < b/2 \\ u_{\text{αρτ}}(x) &= A \exp(-\alpha x) & |x| > b/2 \end{aligned} \quad (6.43)$$

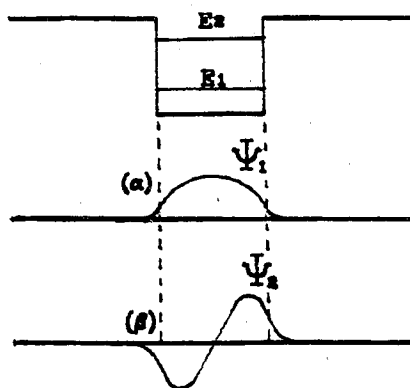
ενώ μια περιτή κυματοσυνάρτηση μπορεί να πάρει την μορφή:

$$u_{\text{περ}}(x) = -A \exp(\alpha x) \quad |x| > b/2 \quad (6.44)$$

Οι κυματοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις δύο χαμηλότερες δέσμιες ενεργειακές καταστάσεις φαίνονται στο Σχήμα 6.8

Περίπτωση $E > 0$

Ένα σωματίδιο μπορεί όταν πλησιάζει σε μια περιοχή δυναμικού, όπως αυτό το δυναμικό που μελετάμε, να έχει θετική αρχική ενέργεια ϵ . Τέτοιο παράδειγμα έχουμε όταν στέλνουμε σωματίδια κινητικής ενέργειας $E > 0$ πάνω σε ακίνητους στόχους σε στερεό σώμα, των οποίων η αλληλεπίδραση με τα βλήματα ενέργειας E περιγράφεται από τετραγωνικό δυναμικό πεπερασμένου



Σχήμα 6.8 Γραφική παράσταση ιδιοσυναρτήσεων της εξίσωσης που αντιστοιχεί στο πηγάδι δυναμικού πεπερασμένου βάθους.

βάθους . Τότε στην περίπτωση του δυναμικού του Σχήματος 6.4 έχουμε τις εξής λύσεις για τις τρεις περιοχές I, II, και III :

$$A \exp (ik_I x) + B \exp (-ik_I x)$$

$$C \exp (ik_{II} x) + D \exp (-ik_{II} x)$$

και

$$E \exp (ik_I x)$$

αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή οι οριακές συνθήκες συνέχειας στις δύο θέσεις ασυνέχειας του δυναμικού v γράφονται

a)

$$x = 0 :$$

$$A + B = C + D \quad (6.45)$$

$$K_I(A-B) = K_{II}(C-D) \quad (6.46)$$

b)

$$x = L :$$

$$C \exp (ik_{II} L) + D \exp (-ik_{II} L) = E \exp (ik_I L) \quad (6.47)$$

$$k_{II} C \exp (ik_{II} L) - k_{II} D \exp (-ik_{II} L) = E \exp (ik_I L) \quad (6.48)$$

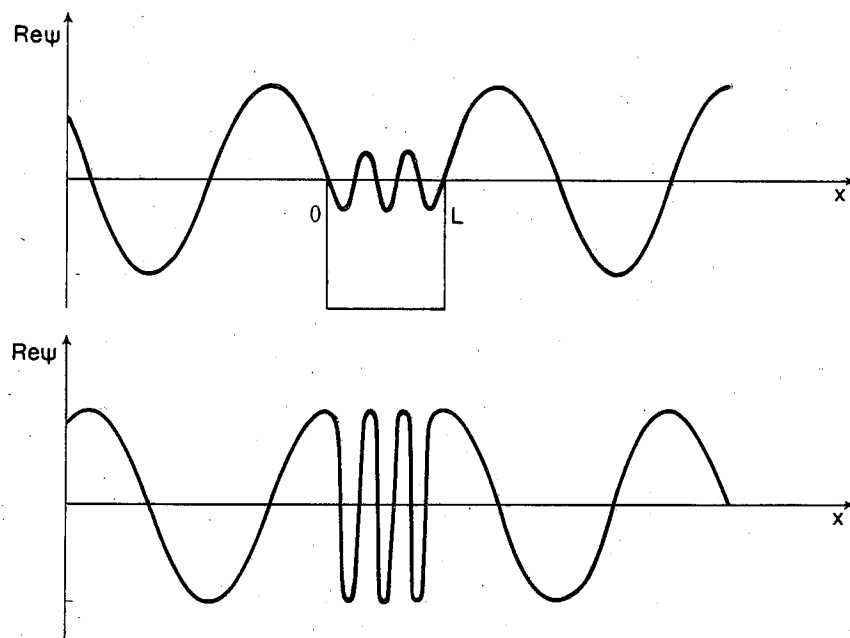
Μια τυπική λύση που δείχνει το πραγματικό μέρος της συνολικής κυματοσυνάρτησης η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες φαίνεται παραστατικά στο Σχήμα 6.6 . Ας εξετάσουμε τώρα την ειδική περίπτωση όπου το μήκος κύματος de Broglie του σωματιδίου έχει επιλεγεί έτσι ώστε: $L = \lambda_{II}/2$. Στην περίπτωση αυτή μπορείτε ευκολα να δείξετε ότι:

$$A = -E \exp (ik_I L) \quad (6.49)$$

Το γεγονός αυτό δείχνει ότι δεν υπάρχει ανακλωμένο κύμα, εφ' όσον $|A|^2 = |E|^2$, και συνεπώς έχουμε 100 τοις 100 διαδοση μέσα από το πηγάδι

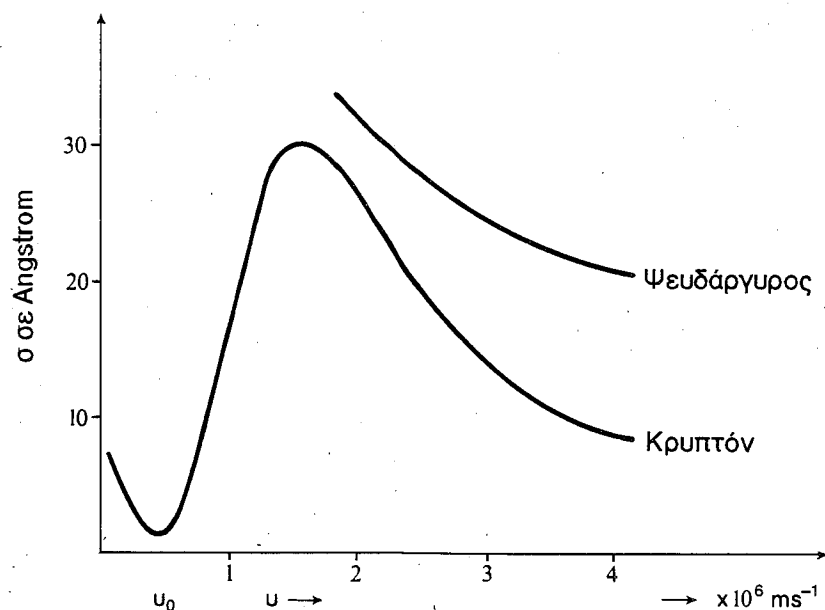
δυναμικού. Η γραφική πράσταση του πραγματικού μέρους της κυματοσυνάρτησης έχει τότε την μορφή του Σχήμα 6.9.

Αυτή η θεωρητική πρόβλεψη είναι αρκετά ενδιαφέρουσα και προβάλλει το ερώτημα αν πράγματι παρατηρείται πειραματικά. Φυσικά, για να παρατηρούσαμε ακριβώς αυτό το φαινόμενο θα απαιτείτο ένα τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού πράγμα που στη φύση δεν βρίσκεται εύκολα! Παρόλα αυτά οι ερευνητές της περιοχής του στερεού σώματος κατασκευάζουν τελευταία δομές που κατά πολύ καλή προσέγγιση μοιάζουν με τετραγωνικά πηγάδια δυναμικού. Αν όμως μας αρκεί μια ποιοτική επαλήθευση της πρόβλεψης αυτής μπορούμε να ανατρέξουμε στο φαινόμενο Ramsauer, που παρατηρήθηκε σε ένα από τα διάσημα πειράματα της ατομικής φυσικής. Στο φαινόμενο αυτό παρατηρείται μια πλήρη διαπερατότητα των ευγενών αερίων : αργό, κρυπτό, Ξένο κλπ για ηλεκτρόνια κάποιας συγκεκριμένης κινητικής ενέργειας (η μήκους κύματος de Broglie).



Σχήμα 6.9 Πραγματικό μέρος της κυματοσυνάρτησης σε περίπτωση πηγαδιού δυναμικού με τέτοιο συνδυασμό παραμέτρων ώστε την συγκεκριμένη κινητική ενέργεια του προσπίπτοντας σωματιδίου να έχουμε 100% διαπερατότητα.

Πειραματικά, η διαπερατότητα μετράται έμμεσα από την ενεργό διατομή σκέδασης των ηλεκτρονίων από τα άτομα ευγενών αερίων : Όσο πιο μεγάλη είναι η ενεργός διατομή σκέδασης τόσο μικρότερη είναι η διαπερατότητα. Πειραματικά δεδομένα τόσο από ευγενή αέρια όσο και από άτομα ψευδαργύρου φαίνονται στο Σχήμα 6.10. Παρατηρούμε για το αέριο κρυπτόν σχεδόν μηδενισμό της ενεργού διατομής (σχεδόν πλήρη διαπερατότητα) για συγκεκριμένη ταχύτητα ηλεκτρονίων v_0 . Τούτο δεν συμβαίνει σε όλα τα ευγενή αέρια. Στο He π.χ το βάθος του δυναμικού είναι τόσο μικρό ώστε είναι $K_{II}L < \pi$. Αντίθετα στο κρυπτόν π.χ είναι δυνατόν λόγω του μεγάλου σχετικά βάθους του πηγαδιού να ικανοποιείται η σχέση $K_{II}L = \pi$.



Σχήμα 6.10 Ενεργός διατομή σκέδασης ηλεκτρονίων σαν συνάρτηση της ταχύτητας. (Massey και Burhop. Clarendon Press.)

Άσκηση :

Από τα πειραματικά δεδομένα του Σχήμα 6.10, προσδιορίστε το βάθος του δυναμικού στο κρυπτόν.

6.6 Μελέτη του συντελεστή ανάκλασης και διάδοσης υλικών κυμάτων.

Να μελετηθεί η συμπεριφορά του συντελεστή διάδοσης πλάτους T :

$$T = \Psi_{\text{διαδ}} / \Psi_{\text{προσπ}}$$

στην περίπτωση του προβλήματος φραγμού δυναμικού που ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} U(x) &= U & 0 < x < a \\ U(x) &= 0 & x < 0, x > a \end{aligned} \quad (6.50)$$

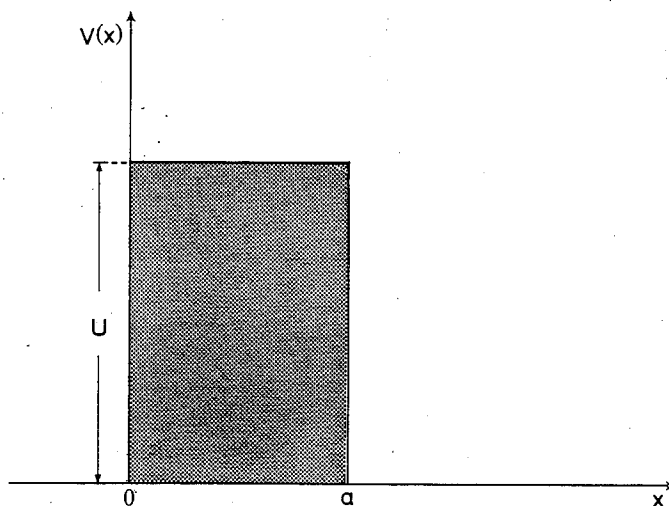
Η γραφική παράσταση του δυναμικού φαίνεται στο Σχήμα 6.11

Λύση :

Η Εξίσωση Schrodinger η ανεξάρτητη του χρόνου έχει την εξής λύση στις τρεις περιοχές που ορίζονται από τις ασυνέχειες του δυναμικού :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= B \exp(ux) + C \exp(-ux), & 0 < x < a \\ \Psi^{\text{διαδ}}(x) &= T \exp(ikx), & x > a \\ \Psi^{\text{ανακλ}}(x) &= R \exp(-ikx) & x < 0 \end{aligned} \quad (6.51)$$

όπου $\hbar^2 u^2 / 2m = U - E$ και $\hbar^2 k^2 / 2m = E$



Σχήμα 6.11 Γραφική παρασταση της δυναμικής ενέργειας σαν συνάρτηση της θέσης του σωματιδίου στο πρόβλημα του τετραγωνικού φραγμού δυναμικού.

Πρόβλημα: για οποιαδήποτε θετική τιμή της ενέργειας E του προσπίπτοντος σωματιδίου από το αποτέλεσμα στο πρόβλημα πηγαιδίου δυναμικού με απείρου ύψους τοιχώματα όπου είχαμε στάσιμη κατάσταση μόνο για ορισμένες διακεκριμένες τιμές της ενέργειας E του σωματιδίου.

Μπορείτε να λύσετε ως προς τον συντελεστή R και να δείξετε ότι

ικανοποιείται η σχέση :

$$|R|^2 + |T|^2 = |A|^2 \quad (6.53)$$

Επειδή τα τετράγωνα των απολύτων τιμών των συντελεστών των πλατών είναι ανάλογα με την πυκνότητα πιθανότητας, η παραπάνω συνθήκη μας λέει ότι η πιθανότητα να ανακλασθεί το σωματίδιο είναι ανάλογη του $|R|^2$ ενώ η πιθανότητα να διαδοθεί είναι ανάλογη του $|T|^2$. Αρα ουσιαστικά περιγράφει την φυσική απαίτηση ότι το σωματίδιο δεν χάνεται.

6.7 Στάσιμες καταστάσεις.

Στα παραδείγματα επίλυσης της εξίσωσης του Schrodinger που είδαμε ως τώρα, ασχοληθήκαμε με δυναμικά που δεν εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο. Στις περιπτώσεις αυτές και ο τελεστής της Χαμιλτονιανής H , που ήδη ορίσαμε αντιμετατίθεται με τον εαυτό του, δηλαδή ο μεταθέτης $[H, H]$ μηδενίζεται. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η **ενέργεια** του συστήματος διατηρείται. Αυτός είναι ο νόμος διατήρησης της ενέργειας, όπως διατυπώνεται στην κβαντική μηχανική. Τούτο σημαίνει ότι σε μία δεδομένη κατάσταση η ενέργεια έχει ορισμένη τιμή, η οποία παραμένει σταθερή με την πάροδο του χρόνου. Καταστάσεις στις οποίες η ενέργεια έχει ορισμένη τιμή λέγονται **στάσιμες** καταστάσεις του συστήματος. Περιγράφονται από τις κυματοσυναρτήσεις Ψ_n που είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της Χαμιλτονιανής, δηλαδή που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n \quad (6.54)$$

όπου E_n είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή του Χάμιλτον, δηλαδή οι ιδιοτιμές της εξίσωσης του Schrodinger. Η μορφή της λύσης της εξίσωσης αυτής που αντιστοιχεί σε μια στάσιμη κατάσταση είναι :

$$\Psi_n(x, t) = e^{-iE_n \frac{t}{\hbar}} \Psi_n(x) \quad (6.55)$$

Όπως εύκολα μπορείτε να παρατηρήσετε η πυκνότητα πιθανότητας που δίνεται από την συνάρτηση αυτή είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

Άσκηση :

Βρείτε ποια είναι η πιθανότητα μια μέτρηση της ενέργειας του συστήματος που περιγράφεται από την παραπάνω κυματοσυνάρτηση να δώσει την ενέργεια E_n .

Τώρα μια τυχούσα κυματοσυνάρτηση του συστήματος μπορεί από **μαθηματική σκοπιά** να αναπτυχθεί σε μορφή επαλληλίας στασίμων καταστάσεων, δηλαδή να πάρει την μορφή :

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n e^{-iE_n \frac{t}{\hbar}} \psi_n \quad (6.56)$$

Το ερώτημα που θα μπορούσε τώρα να προκύψει είναι ποια φυσική σημασία έχει ένα τέτοιο ανάπτυγμα; Για απάντηση μπορούμε να εξετάσουμε ποιά είναι η πιθανότητα μια μέτρηση τις ενέργειας του συστήματος που περιγράφεται από την Εξ. (6.56) να δώσει μια συγκεκριμένη τιμή. Σύμφωνα με αυτά που γνωρίζουμε από την ανάλυση Fourier περιοδικών συναρτήσεων, η πιθανότητα αυτή μπορεί να προκύψει αν πολλαπλασιάσουμε την Ψ επί την ιδιοσυνάρτηση ψ_n (μάλιστα για λόγους που θα εξηγήσουμε αργότερα πολλαπλασιάζουμε επί τη συζυγή της ψ_n) και ολοκληρώσουμε από $-\infty$ ως $+\infty$, όλοι πλην ενός οι προκύπτοντες όροι μηδενίζονται, ενώ λόγω της ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων προκύπτει :

$$c_n = \int \psi_n^* \Psi dx \quad (6.57)$$

Άσκηση:

Δείξτε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος του πηγαδιού δυναμικού απείρου βάθους είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Επίσης με αριθμητικές μεθόδους βρείτε πόσο απέχουν από την ορθογωνιότητα μεταξύ τους οι δύο πρώτες ιδιοσυναρτήσεις του παραδείγματος επίλυσης εξίσωσης Schrodinger με H/Y .

όπου το $|c_n|^2$ που προκύπτει από τους συντελεστές c_n του ανάπτυγματος προσδιορίζει τις πιθανότητες των διαφόρων τιμών ενεργειών του συστήματος. Συμπέρασμα τούτου είναι ότι ένα σύστημα περιγράφεται σαν επαλληλία των ιδιοκαταστάσεων του συστήματος.
Η κατάσταση που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση Ψ μπορεί να

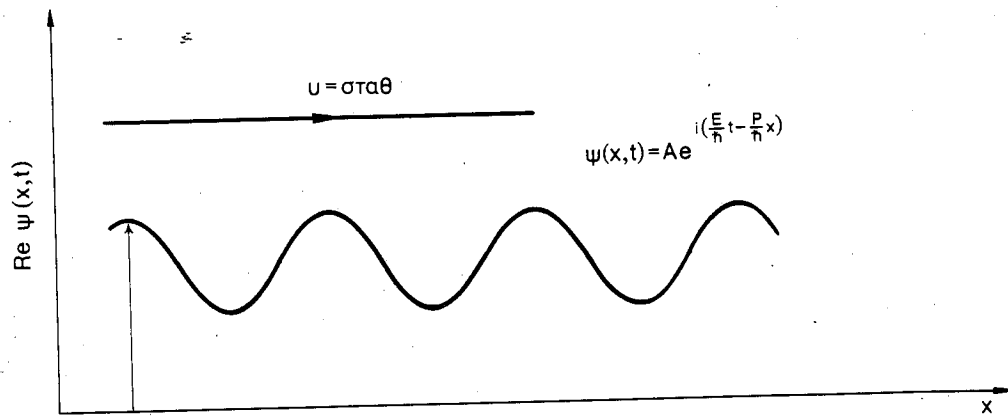
απαντάται στη φύση στην ειδική "φραγμένη" κίνηση όπως στην περίπτωση ενός ηλεκτρονίου σε ένα άτομο Υδρογόνου. Γιατί όμως δίνουμε τον χαρακτηρισμό στάσιμη κατάσταση ; Πρώτον, όπως μπορούμε να δείξουμε, όταν ένα σωματίδιο βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση, τότε η μέση τιμή των παρατηρησίμων μεγεθών που σχετίζονται με το σωματίδιο (π.χ θέση, ορμή κλπ) δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο. Η κατάσταση αυτή εξακολουθεί να παραμένει στάσιμη εφ' όσον δεν "πειράξουμε" με ένα εξωτερικό αίτιο το σωματίδιο. Ένα τέτοιο πείραγμα θα ήταν για παράδειγμα ο βομβαρδισμός του σωματιδίου μας με ένα κινούμενο πυρήνα Ηλίου (He^{++}), οπότε η κατάσταση Ψ του αρχικού ηλεκτρονίου θα πάψει να είναι στάσιμη για όσο χρόνο Δt διαρκεί κάποια αισθητή αλληλεπίδραση του με το κινούμενο He^{++} . Κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης η κατάσταση του σωματιδίου μπορεί να περιγραφεί σαν επαλληλία στασίμων καταστάσεων:

$$\Psi(t) = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \dots \quad (6.58)$$

όπου ψ_1, ψ_2 , κλπ είναι κυματοσυναρτήσεις στασίμων καταστάσεων του σωματιδίου.

Η έννοια της στάσιμης κατάστασης ενός σωματιδίου που παρουσιάζει κβαντική συμπεριφορά δεν είναι καθόλου εύκολο να γίνει κατανοητή από κάποιον φοιτητή που προφανώς έχει πολύ μικρή ή ανύπαρκτη εμπειρία με τα φαινόμενα της κυματικής συμπεριφοράς των υλικών σωματιδίων. Έτσι ένα ακόμα παράδειγμα στασίμης και ένα μη στάσιμης σωματιδίων από την κλασική μηχανική ίσως βοηθήσει να διευκρινισθεί η όχι και τόσο σαφής έννοια της στασιμότητας των καταστάσεων.

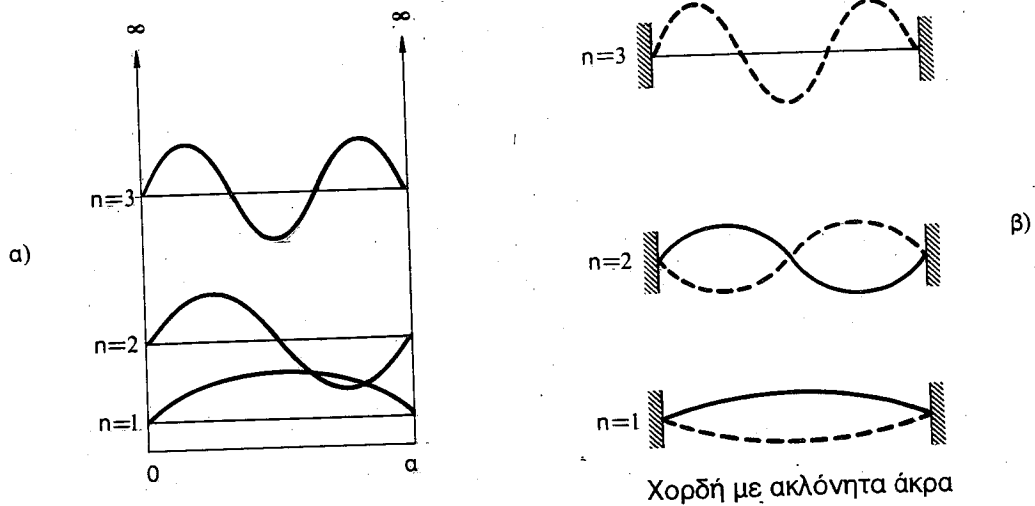
Ηδη με τα πειράματα των Davisson-Germer χρησιμοποιώντας δέσμες ηλεκτρονίων διαπιστώθηκε η κυματική συμπεριφορά υλικών σωματιδίων ή ακριβέστερα : συμπεριφορά κινουμένων σωματιδίων όμοια με εκείνη των οδευόντων κυμάτων. Το Σχ. (6.12) έχει επίσης κυματική συμπεριφορά σύμφωνα με την κβαντομηχανική. Όμως εδώ η κυματική συμπεριφορά είναι πιο εξειδικευμένη: το ηλεκτρόνιο εδώ συμπεριφέρεται σαν στάσιμο κύμα όπως φαίνεται παραστατικά στο Σχ. 6.13α. Δεν πρέπει να μας ξενίζει ιδιαίτερα η συμπεριφορά δεσμίου σωματιδίου σαν στάσιμο κύμα αφού πράγματι το ηλεκτρόνιο αυτό δεν μπορεί να απομακρυνθεί πολύ από το κέντρο του ατόμου, και συνεπώς δεν μπορεί να συμπεριφέρεται σαν οδεύον κύμα.



Σχήμα 6.12 Παραστατική απεικόνιση ενός σχετιζόμενου με το δέσμιο ηλεκτρόνιο κύματος de Broglie.

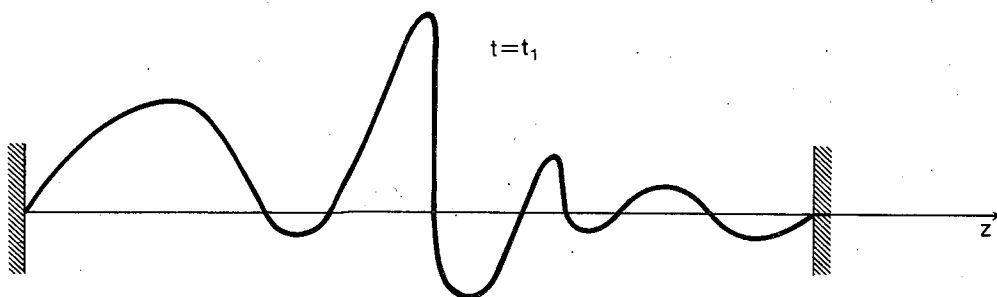
Μηχανικό φαινόμενο ανάλογο με τα στάσιμα κύματα de Broglie.

Μια στάσιμη κατάσταση κβαντομηχανικού σωματιδίου με ιδιοτιμή ενέργειας E_n έχει σαν αντίστοιχο μηχανικό παράδειγμα μια κατάσταση μιας χορδής ακλόνητης και στα δύο άκρα που ταλαντώνεται σύμφωνα με τον n-στό τρόπο ταλάντωσης όπως φαίνεται στο Σχ. 6.13β



Σχήμα 6.13 α,β Αντιστοιχία μιας στάσιμης κβαντομηχανικής κατάστασης με ένα μηχανικό παράδειγμα στάσιμης κατάστασης (τρόπος ταλάντωσης).

Παράδειγμα μη στάσιμης κατάστασης και αντίστοιχο κλασικό παράδειγμα. Λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης του Schrodinger και μια συνάρτηση που είναι γραμμικός συνδυασμός ιδιοσυναρτήσεων (γραμμικός συνδυασμός στασίμων καταστάσεων) ικανοποιεί επίσης τη εξίσωση του Schrodinger. Αξιοματικά, όπως θα δούμε στο επομένο κεφάλαιο, θα δεχθούμε ότι και αυτές οι κυματοσυναρτήσεις μπορούν να περιγράψουν μια υπαρκτή κατάσταση του συστήματος. Αυτό όμως δεν πρέπει να μας ξενίζει: Είναι αντίστοιχη σε μια επαλληλία της πρώτης και τετάρτης αρμονικής (πρώτος και τέταρτος τρόπος ταλάντωσης) με συντελεστές $a_1=1/3$ και $a_4=2/3$. Η κατάσταση της χορδής δεν είναι στάσιμη, δηλαδή τα πλάτη ταλάντωσης όχι μόνο μεταβάλλονται με τον χρόνο αλλά και η σχέση μεταξύ τους $A(z_1): A(z_2): \dots A(z_n)$ μεταβάλλεται με τον χρόνο. Θα δούμε ότι στην κβαντομηχανική σε μια μη στάσιμη κατάσταση, η πυκνότητα πιθανότητας $P(z)$ μεταβάλλεται με τον χρόνο σε αντίθεση με αυτό που συμβαίνει σε μια στάσιμη κατάσταση.



Σχήμα 6.14 Στιγμιότυπο από τις εγκάρσιες απομακρύνσεις μιας χορδής ακλόνητης στα δύο άκρα που η κατάσταση της είναι επαλληλία μερικών ιδιοκαταστάσεων.

6.8 Γενίκευση του προβλήματος φραγμού δυναμικού σε περίπτωση συνεχώς μεταβαλλόμενου δυναμικού.

Ένα τυχόν σχήμα φραγμού δυναμικού μπορεί να προσεγγισθεί με επαλληλία διαδοχικών τετραγωνικών δυναμικών (σταθερού δηλαδή ύψους), όπως φαίνεται στο σχήμα 6.15 που το καθένα έχει απειροστό εύρος. Στα διαχωριστικό όριο μεταξύ δύο τέτοιων διαδοχικών στοιχειωδών φραγμών υπάρχουν ανακλάσεις των κυματοπακέτων οι οποίες όμως σε ένα παρόμοιο φυσικό πρόβλημα δεν

συμβαίνουν μια και στη φύση δεν υπάρχουν ασυνεχή δυναμικά . Στην περίπτωση αυτή αυτό που υπάρχει είναι μια εκθετική πτώση της κυματοσυνάρτησης ψ . Αυτή την προσδιορίζουμε ως εξής:

Κατά μήκος του στοιχειώδους παραλληλογράμμου εύρους Δx θα είναι :

$$d^2\psi/dx^2 = (2m/\hbar^2) (V(x) - E)\psi = (a(x))^2\psi \quad (6.59)$$

Λόγω της Εξ. (6.59) έχουμε

$$\psi(x + \Delta x) = \psi(x) e^{-a(x)\Delta x} \quad (6.60)$$

Με ανάπτυγμα της έκφρασης κατά Taylor και κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης έχουμε :

$$\psi(x) + (d\psi/dx)\Delta x = \psi(x)(1 - a(x)\Delta x)$$

Άρα

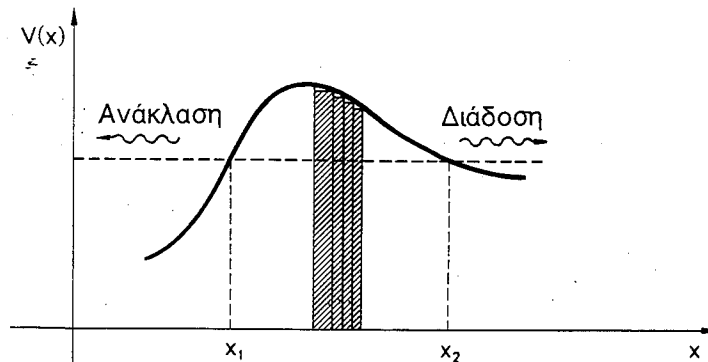
$$d\psi/dx = -a(x)\psi \quad \text{ή} \quad (1/\psi)(d\psi/dx) = -a(x)$$

Ολοκληρώνοντας σε όλο το εύρος του φράγματος, παίρνουμε :

$$\psi(x_2) = \psi(x_1) e^{-\int_{x_1}^{x_2} a(x) dx}$$

Η διαπερατότητα T του φράγματος είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του συντελεστή ανάκλασης πλάτους , άρα :

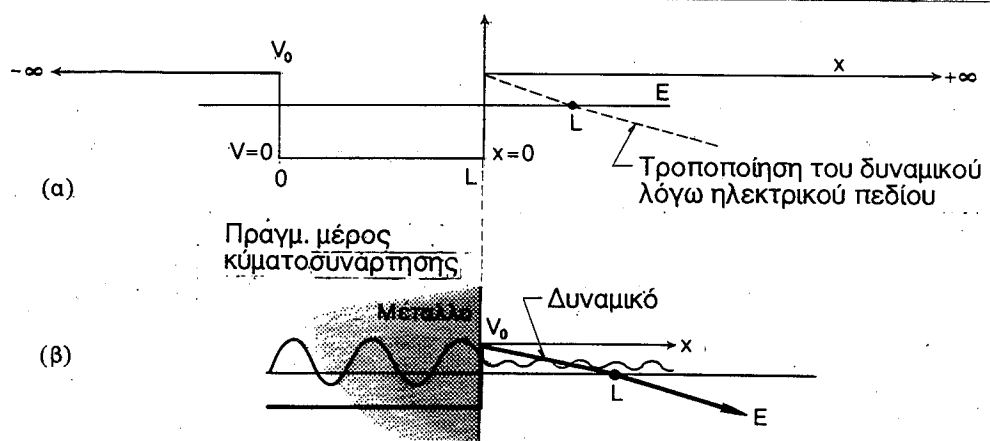
$$T \propto \left| \frac{\psi(x_2)}{\psi(x_1)} \right|^2 \sim e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} a(x) dx} \quad (6.61)$$



Σχήμα 6.15 Προσέγγιση του δυναμικού πολύπλοκης εξάρτησης με σειρά φραγμών δυναμικού πεπερασμένου ύψους για τον υπολογισμό του συντελεστή διέλευσης.

Εφαρμογή στην πεδιακή (ψυχρή) εκπομπή ηλεκτρονίων από μέταλλο:

Υποθέτουμε ότι τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας σε ένα μέταλλο περιορίζονται σε ένα "κουτί" δυναμικού (μονοδιάστατο) όπου ο άξων των x είναι κάθετος προς την διαχωριστική επιφάνεια μετάλλου-αέρα. Έτσι στα όρια του κουτιού αυτού το δυναμικό είναι πεπερασμένου ύψους. Στο Σχ.6.16α φαίνεται η αντιστοιχία της συνάρτησης δυναμικού και των πραγματικών γεωμετρικών διαστάσεων ενός τέτοιου κουτιού. Στο επόμενο Σχήμα φαίνεται η τροποποίηση της μορφής της δυναμικής ενέργειας σαν αποτέλεσμα ενός εξωτερικού πεδίου.



Σχήμα 6.16 Σχηματική εξήγηση της διαφυγής ηλεκτρονίου από στερεά λόγω πεδιακής εκπομπής.

Βλέπουμε ότι το απωστικό δυναμικό που αισθάνονται τα ηλεκτρόνια όταν τείνουν να βρεθούν εκτός του μετάλλου "μετριαζεται" όταν υπάρχει και εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Συνεπώς αναμένουμε ότι στην περίπτωση αυτή ένα ηλεκτρόνιο μπορεί ευκολότερα να αποσπασθεί από ένα μέταλλο.

Για ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο E , το δυναμικό που θα αισθάνονται τα ηλεκτρόνια σε θέσεις έξω από την μεταλλική επιφάνεια φαίνεται από την εστιγμένη γραμμή στο Σχ. 3.16. Παίρνοντας σαν κατεύθυνση του άξονα των x την κάθετο προς την διαχωριστική επιφάνεια μετάλλου-αέρα, έχουμε :

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 & , & \quad x < 0 \\ V(x) &= V_0 - Eex & , & \quad x > 0 \end{aligned} \quad (6.62)$$

όπου $V(x) = E \Rightarrow$ ενέργεια ηλεκτρονίου,

Παρατηρούμε ότι για $x = L$ είναι : $E = V_0 - e |E| L$,

άρα

$$L = (V_0 - E) / e |E|$$

Με βάση την συζήτηση του προηγούμενου εδαφίου έχουμε δει ότι ένα ηλεκτρόνιο έχει πεπερασμένη πιθανότητα να διαπεράσει τον φραγμό δυναμικού. Στην οπτική την πιθανότητα της διάδοσης κυμάτων μέσα από εμπόδια (όπως π.χ μία επίπεδη πλάκα διηλεκτρικού πεπερασμένου πάχους) την εκφράζουμε με τον γνωστό συντελεστή διάδοσης. Στην κβαντική φυσική την πιθανότητα διάδοσης σωματιδίου μέσα από φραγμό δυναμικού προσδιορίζουμε επίσης με το τετράγωνο της απόλυτης τιμής του λόγου του ανακλώμενου πλάτους προς το προσπίπτον πλάτος του υλικού κύματος. Σύμφωνα με την προηγούμενη συζήτηση, τούτο οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} T &= e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{2m[V(x) - E]}}{\hbar} dx} \\ &= e^{-\frac{2\sqrt{m}}{\hbar} \int_0^L (V_0 - eEx - E)^{1/2} dx} \end{aligned}$$

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου ένα ηλεκτρόνιο έχει την μικρότερη δυνατή ενέργεια μέσα στο μέταλλο. Τότε η διαφορά $V_0 - E$ ισούται με το έργο

εξαγωγής W , έτσι :

$$\begin{aligned}
 T &= e \left(\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^L (W - e\mathcal{E}x)^{1/2} dx \right) = e \left(\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^L (Le\mathcal{E} - e\mathcal{E}x)^{1/2} dx \right) \\
 &= e \left(\frac{2\sqrt{2me\mathcal{E}}}{\hbar} \int_0^L (L-x)^{1/2} dx \right) = e \left(\frac{2\sqrt{2me\mathcal{E}}}{\hbar} \frac{2L^{3/2}}{3} \right) \\
 \therefore T &\approx e \left(\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2me\mathcal{E}}}{\hbar} \left(\frac{W}{e\mathcal{E}} \right)^{3/2} \right) \\
 \delta \eta \lambda . \quad T &\approx e \left(\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{W^{3/2}}{e\mathcal{E}} \right) \quad (6.64)
 \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό συνεπάγεται ότι ο συντελεστής πεδιακής εκπομπής T αρχίζει να γίνεται σημαντικός μόνο για πεδία μεγαλύτερα του 10^9 V/m. Τέτοιου μεγέθους πεδία πετυχαίνονται διαμορφώνοντας το σχήμα μετάλλου σε μορφή μύτης καρφίτσας με ακτίνα καμπυλότητας μερικών χιλιάδων Angstroms και εφαρμόζοντας πάνω της μερικές εκατοντάδες Volts αρνητικά σε σχέση με το έδαφος. Το πεδίο στη μύτη της καρφίτσας είναι ίσο προς το δυναμικό διαιρούμενο δια της ακτίνας και για $V=500$ Volts, $r=4000$ Angstroms ισούται με $\approx 10^9$ V/m.

Το 1937 ο Mueller αξιοποίησε το φαινόμενο αυτό σαν μια νέα μορφή μικροσκοπίας με βάση το φαινόμενο της πεδιακής εκπομπής. Στην πειραματική του διάταξη τα ηλεκτρόνια ταξιδεύοντας μετά την εξαγωγή τους σε ευθείες τροχιές σχηματίζουν μεγεθυμένη κατά $10^5 - 10^6$ φορές την εικόνα της ακτίδας. Η εικόνα αυτή αποκαλύπτει την επιφανειακή δομή συναρτήσει της σχετικής έντασης των εκπεμπομένων ηλεκτρονίων από θέση σε θέση πάνω στην επιφάνεια.

Με βελτίωση της μεθόδου χρησιμοποιώντας ιόντα ηλίου, πολύ μικρότερου μήκους κύματος, πέτυχε διακριτική ικανότητα πολύ καλύτερη έτσι ώστε η εικόνα αποκαλύπτει τις διατάξεις σε κανονικές πλεγματικές σειρές μεμονωμένων ατόμικων θέσεων πάνω στην επιφάνεια. (Στην εφαρμογή αυτή συμβαίνει στην πραγματικότητα καθαρό φαινόμενο πεδιακής εκπομπής).

6.9 Πρόβλημα του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή στην κβαντομηχανική (μονοδιάστατη περίπτωση)

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα στην κβαντική φυσική είναι η περίπτωση όπου ένα

σωματίδιο που έχει ένα βαθμό ελευθερίας (ευθύγραμμη κίνηση) βρίσκεται σε πεδίο δυνάμεων της μορφής :

$$V(x) = K x^2/2 \quad (6.65)$$

Στην περίπτωση αυτή πάλι η συμπεριφορά του σωματιδίου εν γένει θα διέπεται από την χρονικά εξαρτημένη εξίσωση του Schrodinger. Όπως όμως έχουμε δει, αν θέλουμε να προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές των στασιμών καταστάσεων, αρκεί να αναζητήσουμε τις φυσικά παραδεκτές λύσεις της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης του Schrodinger:

$$-(\hbar^2/2m)(d^2u(x)/dx^2) + (Kx^2/2)u(x) = Eu(x) \quad (6.66)$$

Για να λύσουμε την διαφορική αυτή εξίσωση είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε αδιάστατες μεταβλητές και για τον λόγο αυτό κάνουμε τους μετασχηματισμούς:

$$\xi = ax \quad \text{και} \quad \lambda = (2E/\hbar) (m/K)^{1/2} = 2E/h\omega_c \quad (6.67)$$

Οποτε εύκολα προκύπτει η εξίσωση:

$$u''(\xi) + (\lambda - \xi^2)u(\xi) = 0 \quad (6.68)$$

Πράγματι η Εξ. (6.68) προκύπτει αν δούμε ότι:

$$\frac{d^2}{dx^2} = a^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \quad (6.69)$$

οπότε η Εξ. (1) δίνει :

$$-(\hbar a^2/2m)(d^2u(\xi)/d\xi^2) + (K\xi^2/a^2) \frac{u(\xi)}{2} = Eu(\xi) \quad (6.70)$$

Από την Εξ. (6.70) προκύπτει η Εξ. (6.68) αν θέσουμε :

$$a^4 = \frac{mK}{\hbar^2}$$

και λ όπως ορίζεται από την (6.67) .

Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό ω_c , δηλαδή την κυκλική συχνότητα επειδή το $h\omega_c$ έχει διαστάσεις ενέργειας, ώστε το λ να είναι αδιάστατο. Έτσι το λ

είναι η νέα αδιάστατη ιδιοτιμή όπου $\omega_c = k/m$ είναι η κυκλική συχνότητα του αντίστοιχου αρμονικού ταλαντωτή.

Ψάχνοντας για φυσικά αποδεκτές φραγμένες λύσεις στην εξίσωση, ως θεωρήσουμε πρώτα την ασυμπτωτική περίπτωση που αντιστοιχεί σε απομάκρυνση από το κέντρο δυνάμεως να τείνει στο άπειρο δηλαδή $\xi \rightarrow \infty$. Τότε είναι φανερό ότι το λ γίνεται αμελητέο σε σύγκριση με το ξ^2 . Συνεπώς η προκύπτουσα διαφορική εξίσωση λύνεται εύκολα και δίνει:

$$u(\xi) \sim e^{(\pm \xi^2/2)} \quad (6.71)$$

Επίσης είναι φανερό ότι λόγω της πολύ ταχείας ελάττωσης της Gaussian συνάρτησης, καθώς το ξ τείνει προς το άπειρο, η συνάρτηση $u(\xi)$ θα έχει την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά αν πολλαπλασιαστεί επί οποιοδήποτε πολυώνυμο του ξ πεπερασμένου βαθμού:

$$u(\xi) = H(\xi) e^{(-\xi^2/2)} \quad (6.72)$$

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα για $H(\xi) = \xi^n$, όπου n οποιαδήποτε πεπερασμένη ακέραια τιμή. Πράγματι είναι:

$$u(\xi) \sim \left[\xi^{n+2} + O(\xi^n) \right] e^{\pm \xi^2/2}$$

Τότε ασυμπτωτικά η Εξ.6.72 ικανοποιείται :

$$\xi^{n+2} e^{\pm \xi^2/2} - \xi^2 \xi^n e^{\pm \xi^2/2} = 0$$

Οι οριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί μια φυσικά αποδεκτή κυματική συνάρτηση μας επιβάλλουν να θεωρήσουμε μόνο λύσεις με το πρόσημο μείον στον εκθέτη. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά (6.71) των λύσεων μας οδηγεί να απαιτήσουμε η συνάρτηση (10.5) να ικανοποιεί την Εξ.(6.72), όπου η συνάρτηση $H(\xi)$ μεταβάλλεται βραδύτερα από την $\exp(-\xi^2/2)$, για ξ τείνον στο άπειρο. Αν εισάγουμε την έκφραση (6.7) στην Εξ.(6.72), βρίσκουμε την διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $H(\xi)$ είναι:

$$H''(\xi) - 2\xi H'(\xi) + (\lambda - 1)H(\xi) = 0 \quad (6.73)$$

για τον προσδιορισμό των συντελεστών των όρων του πολυωνύμου $H(\xi)$ ως δεχθούμε ότι εκ ταυτότητας ισχύει:

$$H(\xi) = \xi^s (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots) \quad (6.74)$$

όπου a_1 και s είναι προσδιοριστέες σταθερές. Υποθέτουμε χωρίς να βλάπτουμε την γενικότητα ότι a_0 είναι διάφορον του μηδέν (αφού στην αντίθετη περίπτωση αντικαθιστούμε απλά το s με $s+1$ και a_1 με a_1-1), $s \geq 0$, ώστε η συνάρτηση $H(\xi)$ είναι πεπερασμένη για $\xi=0$.

Αν η Εξ. (6.74) αντικατασταθεί στην Εξ. (6.73) θα πρέπει να την ικανοποιεί ταυτοτικά, οπότε αν απαιτήσουμε την ισότητα των συντελεστών των ίσων δυνάμεων του ξ , παίρνουμε τις συνθήκες:

$$s(s-1)a_0=0, \text{ από όπου } s=0 \text{ ή } s=1$$

και μία σειρά σχέσεων που περιλαμβάνουν του προσδιοριστέους συντελεστές του πολυωνύμου $H(\xi)$. Οι όροι a_n του πολυωνύμου αυτού αποδεικνύεται ότι ικανοποιούν οριακά την συνθήκη:

$$\frac{|a_{n+2}|}{|a_n|} \rightarrow \frac{2}{n}$$

Συνεπώς η δυναμοσειρά αυτή έχει την ίδια συμπεριφορά με εκείνη που αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα σε σειρά της συνάρτησης

$$e^{\xi^2}$$

διότι ως γνωστόν έχουμε:

$$e^{\xi^2} = 1 + \xi^2 + \dots + \frac{(\xi^2)^\mu}{\mu!} + \frac{(\xi^2)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + \dots$$

οπότε το ηλίκον δύο διαδοχικών όρων προκύπτει εύκολα ότι ισούται με $2/(2\mu)$. Αυτή όμως η συνάρτηση δεν δίνει μια φυσικά αποδεκτή λύση της εξίσωσης του Schrodinger αφού δεν δίνει πυκνότητα πιθανότητας που να τείνει στο μηδέν για $\xi \rightarrow \infty$. Ο μόνος τρόπος να αποφευχθεί τούτο είναι αν η δυναμοσειρά τερματίζεται, δηλαδή κάποιος από τους όρους αν (για n άρτιο) μηδενίζεται, οπότε θα μηδενίζονται και οι επόμενοι άρτιου δείκτη n όροι. Η συνθήκη προς τούτο είναι: $\lambda = 2s + 2v_0 + 1$ για κάποιο άρτιο v_0 , οπότε οι άρτιοι συντελεστές a_{v+2}, a_{v+4}, \dots μηδενίζονται. Ταυτόχρονα πρέπει όλοι οι περιττης τάξης n συντελεστές να μηδενίζονται.

Για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών της ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή πρέπει να εκφράσουμε πάλι την παράμετρο λ με τη βοήθεια της σταθεράς του ελατηρίου που σχετίζεται με το ω_c , οπότε από την προηγούμενη σχέση προκύπτει : (αν βάλουμε $s+v_0=n$)

$$\lambda = 2n+1 \quad \eta$$

$$E = (n+1/2) \hbar \omega_c, \quad \text{όπου } n=1,2,\dots$$

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη παραπάνω εξίσωση είναι ότι πρώτον η ενέργεια του ταλαντωτή είναι κβαντισμένη και δεύτερον ότι στο απόλυτο μηδέν η ενέργεια δεν είναι μηδέν, όπως προκύπτει από τον τύπο (6.75) για $n=0$, αλλά έχει κάποια πεπερασμένη τιμή. Το αποτέλεσμα είναι σύμφωνο με την αρχή της αβεβαιότητας.

Ασκήσεις

Πηγάδι δυναμικού μεσες-τιμές.

1) θεωρήστε σωματίδιο μάζας m που βρίσκεται στην κατάσταση της χαμηλότερης δυνατής ενέργειας E_1 , όταν το δυναμικό είναι της μορφής:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{για } x < -a/2, \quad x > a/2 \\ 0 & \text{για } -a/2 < x < a/2 \end{cases}$$

όπου m, V_0 , και a έχουν εκλεγεί έτσι ώστε $E_1 = 0.5V_0$. Να κάνετε μια ποιοτική σχεδίαση της ιδιοσυνάρτησης $\psi^1(x)$, του σωματιδίου αυτού. Στη συνέχεια υποθέστε ότι το V_0 αυξάνεται κατά έναν παράγοντα 5. Τι επίδραση θα έχει αυτή η μεταβολή στην μορφή της $\psi_1(x)$ στην περιοχή όπου $V(x) > E_1$; Ποιά είναι η επίδραση στην τιμή της E_1 ; Τα ερωτήματα αυτά να προπαθήσετε να τα απαντήσετε ποιοτικά με θεώρηση της συμπεριφοράς της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης του Schrodinger για το δρασμένο δυναμικό.

2) Όταν υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή του γινομένου θέσης επί ορμή εμφανίζεται μια ασάφεια διότι δεν είναι προφανές ποιά από τις δύο εκφράσεις: θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί .

$$\langle xp \rangle = \int \psi^*(x) x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) dx$$

$$\langle xp \rangle = \int \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) x \psi dx$$

Να δείξετε ότι καμιά από αυτές τις εκφράσεις δεν είναι αποδεκτή διότι αυτές παραβιάζουν την προφανή συνθήκη ότι το $\langle xp \rangle$ πρέπει να είναι πραγματικό. Στην συνέχεια να δείξετε ότι η έκφραση

$$\langle xp \rangle = \int \psi^* \frac{x(i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) + (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})x}{2} \psi dx$$

είναι αποδεκτή διότι πράγματι ικανοποιεί τη συνθήκη αυτή.

Αρχή αβεβαιότητας

3) Η θέση ενός ηλεκτρονίου που κινείται με ταχύτητα 10^6 m/sec. μπορεί να προσδιορισθεί με ακρίβεια 10^{-4} cm. Να βρείτε την αβεβαιότητα στην ορμή του σωματιδίου καθώς και την κλασματική αβεβαιότητα $\Delta p/p$.

4) Ποία είναι η χαμηλότερη δυνατή ενέργεια ενός ηλεκτρονίου που θα πρέπει να έχει όταν είναι παγιδευμένο σε κάποιο διάκενο μέσα σε κρυσταλλικό πλέγμα έτσι ώστε η κίνηση του σωματιδίου να περιορίζεται σε σφαιρικό όγκο ακτίνας 2.5 Angstroms;

Δέσμιες καταστάσεις

5) Υποθέστε ότι ένα σωματίδιο περιορίζεται σε ένα ηχητικό δυναμικό απείρου ύψους. Υπολογίστε τις μέσες τιμές των ποσοτήτων χ και χ^2 αν το σωματίδιο βρίσκεται στη θεμελειώδη κατάσταση.

6) θεωρείστε σωματίδιο στη θεμελειώδη κατάσταση σε ένα τετραγωνικό ηχητικό δυναμικό απείρου ύψους. Υπολογίστε την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο:

a) μεταξύ $\chi=0$. a και $\chi=0.01a$

- β) μεταξύ $x=0.25a$ και $0.50a$
 γ) μεταξύ $x=0.5a$ και $0.51a$
 δ) μεταξύ $x=0.75$ και $0.76a$

7) θεωρείστε ένα σωματίδιο σε ένα διδιάστατο κουτί μήκους a και πλάτους b . Δείξτε λύνοντας την Κ.Εξ. του Schrodinger, ότι οι επιτρεπόμενες κυματοσυνάρτησεις και ενέργειες είναι :

$$\psi = A \sin\left(\frac{n_x \pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_y \pi y}{b}\right)$$

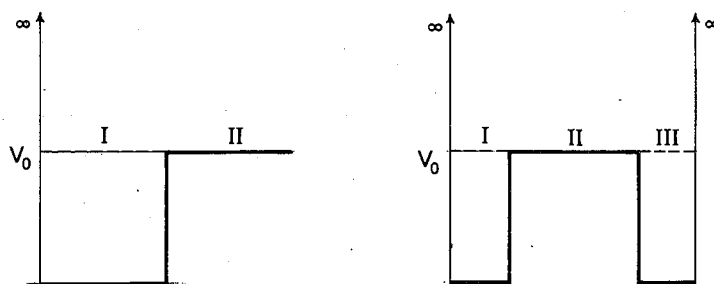
και

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right)$$

όπου A είναι σταθερά και n_x και n_y είναι κβαντικοί αριθμοί .
 (Σημ. το δυναμικό απειρίζεται εκτός των ορίων του κουτιού)

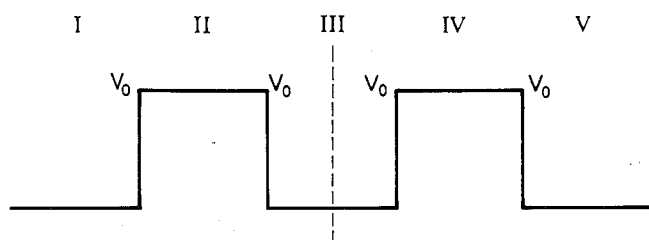
8) θεωρείστε πηγάδια δυναμικού του τύπου που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Γραψτε τη Κ.Εξ. του Schrodinger για τις διάφορες περιοχές για ένα σωματίδιο ενέργειας.

(α) E μεγαλύτερη του V_0 , (β) E μικρότερη του V_0 . Σχεδιάστε ποιοτικά τις κυματοσυναρτήσεις στις διάφορες περιοχές.



9) θεωρείστε φραγμό δυναμικού της μορφής που φαίνεται στο σχήμα πιο κάτω. Γράψτε την Κ. Εξ. του Schrodinger και τις κυματοσυναρτήσεις για διάφορες περιοχές για ένα σωματίδιο ενέργειας:

(I) E μεγαλύτερο του V_0 , (II) V_0 μικρότερο του E , (III) μικρότερο V_0 . Επίσης σχεδιάστε τις κυματοσυναρτήσεις.



10) Από τα δεδομένα του περάματος του Σχ. (6.10) προσδιορίστε προσεγγιστικά το βάθος δυναμικού στο κρυπτόν.

11) Δείξτε ότι οι αναμενόμενες τιμές των τελεστών της ενέργειας και ορμής:

$$\langle E \rangle = i\hbar \int \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi d^3x$$

$$\langle p \rangle = -i\hbar \int \psi^* \nabla \psi d^3x$$

είναι πραγματικές.

12) Δείξτε ότι οι αναμενόμενες τιμές θέσης και ορμής σωματιδίου με μάζα m , που κινείται σε δυναμικό $V(x)$, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \langle p \rangle \frac{1}{m}, \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle = -\langle \nabla V \rangle$$

όπου $V(x)$ είναι δυναμικό. Οι σχέσεις αυτές αποτελούν το θεώρημα του Ehrenfest και δείχνουν ότι οι αναμενόμενες τιμές των κβαντομηχανικών τελεστών ικανοποιούν τις εξισώσεις κίνησης της κλασικής μηχανικής.

13) Υπολογίστε τους συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης στο μονοδιάστατο

φραγμό δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0, \quad x > a \\ V_0 & , \quad 0 < x < a \end{cases}$$

Ορίσετε

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

αν $E < 0$. αν $aa \gg 1$

δείξετε ότι ο συντελεστής διείσδυσης δίνεται από την προσεγγιστική έκφραση:

$$T = 16(E/V_0) (1 - E/V_0) \exp(-2\alpha a)$$

14) Χωρισμός μεταβλητών στη χρονικά εξαρτημένη εξίσωση του Schrodinger.

a) Υπόθεστε ότι η συνάρτηση του δυναμικού V δεν εξαρτάται από το χρόνο.

Γράψτε την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)$ ενός σωματιδίου σαν γινομένο

$\Psi(x,t) \equiv \psi(x) \cdot g(t)$. Δείξτε τότε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}) + V(\vec{x}) \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x})$$

και

$$i\hbar \frac{dg(t)}{dt} = E g(t)$$

b) Βρείτε την μορφή της λύσης της εξίσωσης που εκφράζει τον χρονικό παράγοντα $g(t)$. Ποια η φυσική σημασία του $g(t)$;

15) (α) Ένα σωματίδιο με δυναμική ενέργεια

$$U(x) = -U_1, \quad x < 0$$

$$U(x) = -U_2, \quad x > 0$$

και θετική ολική ενέργεια προσπίπτει από $x = -\infty$ πάνω στην ασυνέχεια του δυναμικού στο $x=0$. (βλ. Σχήμα) Με ποιά πιθανότητα θα ανακλασθεί ;

(β) Τη χρονική στιγμή η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου που περιορίζεται από ένα απείρως υψηλό, ορθογώνιο πηγάδι δυναμικού είναι

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{2}(u_1^e(x) + u_2^e(x))$$

όπου $u_1^e(x)$ και $u_2^e(x)$ είναι η πρώτη και δεύτερη, ζυγής αρτιότητας, λύσεις της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης του Schrodinger. Να βρείτε την πιθανότητα της ανεύρεσης του σωματιδίου στο απειροστό διάστημα x ως $x+dx$ τη χρονική στιγμή t .

16) (α) Στο φάσμα του ατόμου το Υδρογόνου η σειρά Lyman αντιστοιχεί σε μεταπτώσεις στην κατώτατη δυνατή ενεργειακή στάθμη ενώ η σειρά Balmer αντιστοιχεί σε μεταπτώσεις στην αμέσως επόμενη στάθμη. Το όριο (λόγω ιονισμού) των μηκών κύματος της σειράς Balmer είναι 3645 Angstrom ενώ το πρώτο των μηκών κύματος της σειράς Lyman είναι 1215.7 Angstroms. Από τις τιμές αυτές να βρείτε το δυναμικό ιονισμού.

(β) Η κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης για το άτομο του Υδρογόνου ($n=1, l=0, m_l=0$) δίνεται από την έκφραση (ακτινικό μέρος)

$$u(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

Να βρείτε τη μέση τιμή της απόστασης r του ηλεκτρονίου και την απόσταση ρ που αντιστοιχεί στην πιο πιθανή τιμή του r . Βρείτε δηλαδή σε ποιόν φλοιό r ως $r+dr$ έχουμε την μεγαλύτερη πιθανότητα να βρούμε το ηλεκτρόνιο.

17) (α) βρείτε μια έκφραση για την δεύτερη διεγερμένης στάθμης κυματοσυνάρτηση ενός αρμονικού ταλαντωτή.

(β) Δώστε τη μορφή της κυματοσυνάρτησης του αρμονικού ταλαντωτή και επαληθεύσατε ότι 1ον ικανοποιεί την εξίσωση του Schrodinger και 2ον έχει ικανοποιητική οριακή συμπεριφορά.

(γ) Βρείτε τη συνολική πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο ενός αρμονικού ταλαντωτή εκτός της κλασικά επιτρεπόμενης περιοχής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Προσεγγιστικές μέθοδοι στην κβαντική μηχανική.

Οι περιπτώσεις όπου η εξίσωση του Schrödinger έχει λύσεις που δίνονται υπο αναλυτική μορφή είναι λίγες. Υπάρχουν όμως στη φύση πολλά δυναμικά για οποία δεν υπάρχει αναλυτική λύση της εξίσωσης του Schrödinger. Μπορεί μάλιστα να υποστηριχθεί ότι οι περιπτώσεις αυτές της μη ύπαρξης δηλαδή αναλυτικής λύσης είναι και οι πιο συνηθισμένες. Έτσι στις περιπτώσεις αυτές είμαστε υποχρεωμένοι να ακολουθήσουμε είτε αριθμητικές μεθόδους επίλυσης του κβαντομηχανικού προβλήματος είτε ορισμένες προσεγγιστικές υπολογιστικές μεθόδους για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων του υπο θεώρηση κβαντικού συστήματος. Θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα πρώτον η μέθοδος της θεωρίας των χρονικά ανεξάρτητων διαταραχών και δεύτερον η μέθοδος της θεωρίας της προσέγγισης Born για πειράματα σκέδασης.

7.1 θεωρία Χρονικά Ανεξάρτητων διαταραχών.

Είδαμε ως τώρα παραδείγματα της ακριβούς επίλυσης της Εξίσωσης του Schrödinger, όπως εκείνο του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή ή εκείνο του ατόμου του υδρογόνου αν υποθέσουμε ότι το δυναμικό περιγράφεται ακριβώς από το δυναμικό Coulomb. Εστω ότι ένα πρόβλημα με αναλυτική λύση περιγράφεται από την Χαμιλτονιακή H_0 Παραδείγμα : $H_x H_y$ αρμονικός ταλαντωτής χαμιλτονιανή $H_0 = p^2/2m + kx^2/2$.

Το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει είναι να λύσουμε την Εξίσωση του Schrödinger όταν η Χαμιλτονιανή H του συστήματος μπορεί να γραφεί σαν

άθροισμα της επιλύσιμης Χαμιλτονιανής H_0 και ενός όρου H_1 , ο οποίος δίνει συνεισφορά στην ολική ενέργεια πολύ μικρότερη από την διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών που προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης ιδιοτιμών του τελεστή H_0 . Έτσι γράφουμε:

$$H = H_0 + H_1 \quad (7.1)$$

Ο τελεστής H_1 ονομάζεται σε αυτήν την περίπτωση τελεστής της διαταραχής. Εστω τώρα ότι $u_0^{(n)}$, $n=1,2,\dots$ είναι ένα πλήρες σύνολο ορθοκανονικών ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή H_0 , δηλαδή με την ιδιότητα:

$$H_0 u_0^{(n)} = E_0^{(n)} u_0^{(n)} \quad (7.2)$$

όπου $E_0^{(n)}$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του αδιατάραχτου συστήματος. Τότε το πρόβλημα στην περίπτωση όπου έχουμε την παρουσία της H_1 διατυπώνεται ως:

$$(H_0 + H_1) u^{(n)} = E^{(n)} u^{(n)} \quad (7.3)$$

όπου $u^{(n)}$ είναι η ιδιοσυνάρτηση του ολικού τελεστή H . Στη μέθοδο της θεωρίας των διαταραχών υποθέτουμε ότι η κυματοσυνάρτηση αυτή είναι γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων της αδιατάραχτης Χαμιλτονιανής H_0 :

$$u^{(n)} = \sum_m c_m u_0^{(m)} \quad (7.4)$$

όπου ο μέτρο των συντελεστών c_m είναι περίπου ίσο με το μηδέν για m διάφορον του n , ενώ είναι περίπου ίσο με 1 για $m=n$. Τούτο δικαιολογείται από το ότι η παρουσία ενός διαταρακτικού όρου H_1 στο δυναμικό "παραμορφώνει" την ιδιοσυνάρτηση $u^{(n)}$ ώστε να υπάρχει ανάμιξη και με όρους που οφείλονται σε ιδιοσυναρτήσεις διαφορετικών ιδιοτιμών ενέργειας. Εισάγοντας στην Εξίσωση (7.3) την έκφραση (7.4) παίρνουμε:

$$\sum c_m E_0^{(m)} u_0^{(m)} + \sum c_m H_1 u_0^{(m)} = \sum c_m E^{(n)} u_0^{(m)} \quad (7.5)$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (7.5) με $u_0^{*(k)}$ και ολοκληρώσουμε σε λο τον χώρο προκύπτει:

$$c_k E_0^{(k)} + \sum_m c_m H_{km} = c_k E^{(k)}$$

άρα:

$$\sum_m c_m H_{km} = c_k (E^{(n)} - E_0^{(k)}) \quad (7.6)$$

όπου

$$H_{km} = \int u_0^{*(k)} (H u_0^{(m)}) dx \quad (7.7)$$

Τώρα, αν όπως αναφέραμε πιο πάνω $c_n \approx 1$, και $\psi_m \approx 0$, για $m = n$ τότε ο μόνος όρος που είναι σημαντικός στο πρώτο μέλος της εξίσωσης (7.6) είναι ο $c_n H_{kn}$. Συνεπώς :

$$c_k = \frac{H_{kn}}{E^{(n)} - E^{(k)}} \quad (7.8)$$

Η σχέση (7.8) ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι για $k=n$ είναι E_k διαφορόν του E_n , δηλαδή όταν δεν υπάρχει εκφυλισμός. Την περίπτωση του εκφυλισμού θα την εξετάσουμε αργότερα. Με την βοήθεια της Εξ. (7.8) η Εξ. (7.4) δίνει :

$$u^{(n)} = \sum_m \frac{H_{kn}}{E^{(n)} - E_0^{(k)}} u_0^{(m)} \quad \text{με } m \neq n \quad (7.9)$$

Από την Εξ. 7.9 φαίνεται και η συνθήκη για την ισχύ της προσέγγισης:

$$H_{kn} \ll |E_0^{(n)} - E_0^{(k)}|$$

7.2 Η προσέγγιση Born.

Είδαν πως αντιμετωπίζονται περιπτώσεις θεωρίας διαταραχών για ιδιοτιές, για τις οποίες οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις σχηματίζουν ένα διάκριτο σύνολο. Εδώ ασχολούμαστε με την διαταραχή που μπορεί να υφίσταται ένα συνεχές σύνολο ιδιοσυναρτήσεων. Τέτοιες ιδιοσυναρτήσεις εμφανίζονται σε

περαματα συγκρούσεων. Ας θεωρήσουμε την απλούστερη περίπτωση ότι το δυναμικό αλληλεπίδρασης κατά την κρούση θεωρείται σαν διαταραχή, και ας κάνουμε τον υπολογισμό μόνο σε πρώτη τάξη προσέγγισης. Αυτή η διαδικασία λέγεται προσέγγιση Βορν¹.

Στην εξίσωση Σηροδινγκερ για την σχετική κίνηση

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 u + \nabla(\vec{r})u = Eu$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

θεωρούμε την ασυμπτωτική λύση

$$u(r, \theta, \phi) \rightarrow A \left[e^{ikz} + r^{-1} f(\theta, \phi) e^{ikr} \right]$$

$$k = \frac{\mu v}{\hbar}$$

μια δικαιολόγηση της μορφής αυτής της λύσης προκύπτει αν θεωρήσουμε ότι σε μεγάλη απόσταση από τον στόχο το συνολικό υλικό κυματοπακέτο θα είναι επαλληλία του αδιατάρακτου επιπέδου κύματος (προσπίπτον κύμα) e^{ikz} και ενός διαταραγμένου κύματος που είναι ο δεύτερος όρος της προσεγγιστικής λύσης. Οι τρεις παράγοντες του όρου αυτού δικαιολογούνται ως εξής: Ο r^{-1} εκφράζει το ότι το ρεύμα πιθανότητας ελαττώνεται με την απόσταση από το στόχο σαν r^{-2} , το e^{ikr} εκφράζει σφαιρικό κύμα με σημείο εκπομπής τον στόχο, ενώ ο παράγων $f(\theta, \phi)$ εκφράζει την γωνιακή εξάρτηση της πιθανότητας σκέδασης του σωματιδίου προς συγκεκριμένη κατεύθυνση. Δηλαδή δεν δεχόμαστε εκ των προτέρων ισότροπη σκέδαση.

Δεχόμενοι την μέθοδο των διαταραχών, θέτουμε

$$u(r) = e^{ikz} + u(r) \quad (7.13)$$

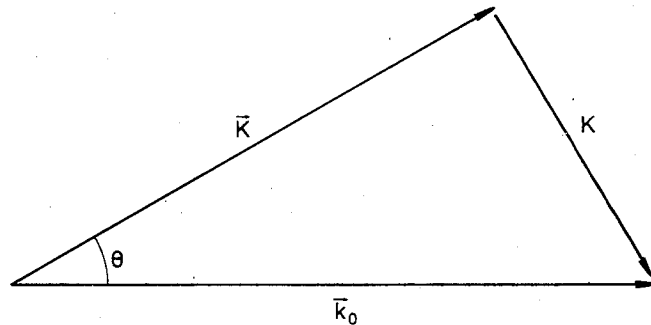
όπου το κύμα $u(r)$ είναι πολύ μικρό σε σχέση με τη λύση επιπέδου κύματος. Αντικατάσταση στην Εξ. 7.11 δίνει.

¹ M. Born Zeits., f. Physik, 38, 803(1926)

$$(-\nabla^2 + k^2)u = -u(\vec{r})e^{ikz} - u(\vec{r})v \quad (7.14)$$

όπου

$$U(\vec{r}) \equiv \frac{2v}{\hbar^2} V(\vec{r})$$



Σχήμα 7.1 Σχέση μεταξύ των διανυσματων, k_0 προσπιποντας K σκεδαζομένου σωματιδίου, και K διανύσματος μεταφοράς ορμής $\hbar K$, κατά την σύγκρουση.

Επειδή το $u(r)$ είναι μικρό σε σύγκριση με το e^{ikz} , μας επιτρέπει να αμελήσουμε τον δεύτερο όρο του δευτέρου σκέλους της εξίσωσης 7.14. Άρα έχουμε να λύσουμε την μη ομογενή κυματική εξίσωση

$$(-\nabla^2 k^2)u(r) = -U(\vec{r})e^{ikz} \quad (7.15)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται με τη βοήθεια των συναρτήσεων Green². Έτσι αποδεικνύεται³ ότι για εξίσωση της μορφής $(\Omega - \omega_0) u(r) = F(r)$, υπάρχει η λύση

$$u(\vec{r}) = \int G\omega_0(\vec{r}, \vec{r}') F(\vec{r}') dz' \quad (7.16)$$

² Morse & Feshbach : "Methods of theoretical Physics", Chap.7 (Mc Graw-Hill New York, 1953)

³ Schiff : Quantum Mechanics, P.163, δεύτερη έκδοση

όπου η συνάρτηση

$$G_{\omega_0}(r, r') = \int \frac{u_{\omega}(r) u_{\omega}^*(r')}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (7.17)$$

καλείται συνάρτηση του Green για τον τελεστή Ω και τον αριθμό ω_0 .
Ειδικότερα οι υπολογισμοί βάσει της συνάρτησης Green για ένα ελεύθερο σωματίδιο που προσεγγίζει σε σφαιρικό δυναμικό $U(r) = u(r)$, αποδεικνύεται ότι ο παράγων δομής $f(\theta, \varphi)$ παίρνει την έκφραση

$$f(\theta) = -k^{-1} \int_0^{\infty} r' \text{sinkr}' U(r') dr' \quad (7.18)$$

όπου k το διάνυσμα $k_0 - k$, φαίνεται στο σχήμα 7.1.

Η $f(\theta)$ συνδέεται με την διαφορική ενεργό διατομή μέσω της σχέσης

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (7.19)$$

που έχει τεράστια σημασία για την θεωρητική κατανόηση πειραμάτων σκέδασης, στην ατομική, μοριακή πυρηνική φυσική, αλλά και στη φυσική της συμπυκνωμένης ύλης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

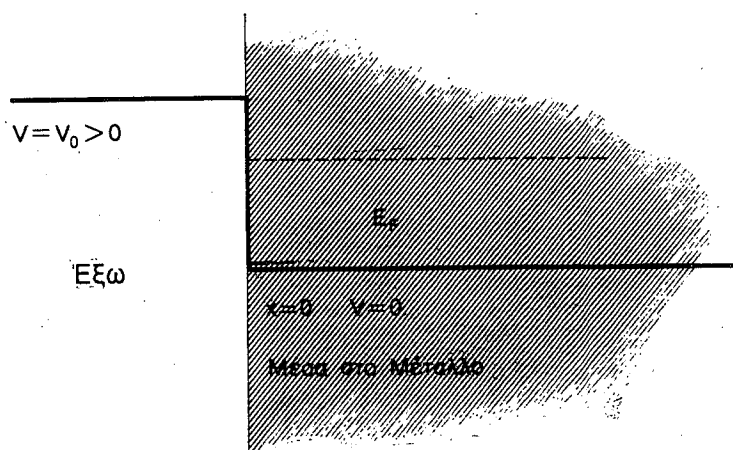
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ:

Σε ένα στερεό έχουμε έναν τεράστιο αριθμό από σωματιδία τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, και συνεπώς από πρώτη άποψη το πρόβλημα του υπολογισμού των κυματοσυναρτήσεων και ενεργειακών σταθμών σταθμών (ιδιοτιμές ενέργειας) των ηλεκτρονίων των ατόμων του σταθμών (ιδιοτιμές ενέργειας) των ηλεκτρονίων των ατόμων του στερεού φαίνεται εξαιρετικά πολύπλοκο. Είναι φανερό ότι πρέπει, αν θέλουμε να μάθουμε κάτι από τα μυστικά των στερεών σωμάτων, να κάνουμε ορισμένους συμβιβασμούς, δηλαδή ορισμένες υποθέσεις οι οποίες απλοποιούν την εικόνα ενός στερεού και επιτρέπουν έτσι την διατύπωση του φυσικού προβλήματος με ένα απλούστερο σύνολο εξισώσεων για τις κυματοσυναρτήσεις των ηλεκτρονίων των στερεών. Έτσι οι εξισώσεις αυτές μπορούν να δώσουν προσεγγιστικές τιμές για τις ενεργειακές στάθμες των ηλεκτρονίων μέσα στο στερεό. Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα μπορεί να μας πει πόσο καλές ήταν οι απλουστευτικές αυτές υποθέσεις και ίσως να μας υποδείξει νέες υποθέσεις που δίνουν ακόμα καλύτερη συμφωνία μεταξύ θεωρητικών προβλέψεων και θεωρίας. Η συνεργασία αυτή μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών προσπαθειών έχει αποδώσει στις τελευταίες δεκαετίες εξαιρετικά εντυπωσιακά αποτελέσματα. Η πειραματική έρευνα ανέδειξε "τεχνολογικές συσκευές" όπως αυτής του ηλεκτρονικού μικροσκοπίου σύραγγας με την βοήθεια του οποίου μπορούμε να εντοπίζουμε (να "βλεπούμε ή να αισθανόμαστε σαν μεταβολή κάποιου ηλεκτρικού ρεύματος") μεμονωμένα άτομα πάνω στην επιφάνεια ενός κρυστάλλου. Ο ερευνητής όμως που δεν έχει ακόμη εμβαθύνει στα προβλήματα του στερεού μπορεί να θέσει πιο βασικά ερωτήματα, όπως ποιά είναι η κίνηση των πυρήνων (η κβαντικά: ποιά είναι η κυματοσυνάρτηση κάθε μεμονωμένου πυρήνα;) Αν πάλι τούτο δεν έχει νοημα, μπορεί να διερωτηθεί κανείς ποιά είναι η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει ένα μεγάλο σύνολο

πυρήνων κρυσταλλικού πλέγματος που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους). Προς το παρόν θα παρακάμψουμε αυτά τα ερωτήματα με την απλουστευτική υπόθεση ότι θεωρούμε τους πυρήνες ακίνητους μέσα στο κρυσταλλικό πλέγμα. Αργότερα θα επανέλθουμε όμως και θα θεωρήσουμε και την κίνηση των πυρήνων διότι αποδεικνύεται ότι αυτή είναι βασικής σημασίας για την κατανόηση τεχνολογικά ενδιαφερόντων θεμάτων, όπως είναι η ηλεκτρική αντίσταση και άλλα φαινόμενα μεταφοράς.

Ακόμη και με αυτές τις απλουστεύσεις έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα ενός συστήματος πολλών ηλεκτρονίων που μπορεί να επιλυθεί μόνο με προσεγγιστικές μεθόδους. Ακόμα πιο ριζική απλούστευση είναι εκείνη που λέγεται προσέγγιση **ενός ηλεκτρονίου**. Στην προσέγγιση αυτή θεωρείται ότι η συνολική κυματοσυνάρτηση του συστήματος αποτελείται από συνδυασμό κυματοσυναρτήσεων καθενός ηλεκτρονίου. Με άλλα λόγια, το πεδίο που αισθάνεται κάθε ηλεκτρόνιο είναι εκείνο ενός ακλόνητου πυρήνα συν ένα μέσο πεδίο που παράγεται από την κατανομή φορτίου των υπολοίπων ηλεκτρονίων. Η κατανομή αυτή δίνεται εν γένει με βάση κάποιο θεωρητικό μοντέλο. Μια ακραία περίπτωση της προσέγγισης ενός-ηλεκτρονίου είναι εκείνη της θεωρίας του Sommerfeld για τα μέταλλα, όπως φαίνεται στο Σχ. 8.1, όπου υποτίθεται πως το δυναμικό που αισθάνεται κάθε ηλεκτρόνιο είναι σταθερό μέσα στο μέταλλο. Η υπόθεση αυτή δεν θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα.

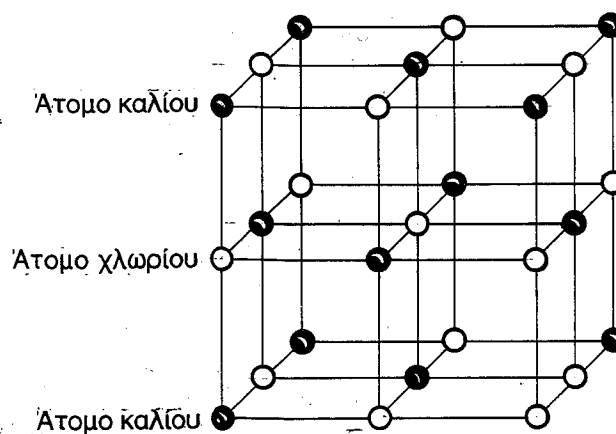


Σχήμα 8.1 Μορφή δυναμικής ενέργειας ηλεκτρονίου μέσα στο μέταλλο σύμφωνα με του πρότυπο του Sommerfeld.

Μέσα στο πλαίσιο του μοντέλου του ενός-ηλεκτρονίου θα ακολουθήσουμε την υπόθεση του Bloch. Η μέθοδος του στηρίζεται στην θεώρηση ότι το καθένα ηλεκτρόνιο ανήκει περισσότερο στον κρύσταλλο σαν σύνολο παρά σε ένα συγκεκριμένο άτομο. Το μοντέλο αυτό θα μας απασχολήσει αρκετά μολονότι πρέπει να τονίσουμε ότι υπό ορισμένες συνθήκες (π.χ. όταν τα άτομα βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις μεταξύ τους) , άλλα μοντέλα όπως του Heitler-London περιγράφουν καλύτερα την συμπεριφορά του στερεού.

8.1 ΙΟΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΠΟΛΙΚΟΙ ΚΡΥΣΤΑΛΛΟΙ.

Η δυναμική του ιονικού δεσμού είναι σχεδόν ίδια με εκείνη του δεσμού των μορίων. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την κρυσταλλική δομή του KCl. Η δομή του φαίνεται παραστατικά στο Σχ.8.2. Είναι η ίδια δομή με εκείνη του κρυστάλλου του NaCl. Τα άτομα του Καλίου αποτελούν μέλη μιας περιοδικής διάταξης κύβων. Μια τέτοια διάταξη ονομάζεται **Κυβική εδροκεντρωμένη διάταξη** . Τα άτομα του χλωρίου επίσης είναι τοποθετημένα σε μία κυβική εδροκεντρωμένη διάταξη. Τα ανωτέρω έχουν διαπιστωθεί πειραματικά με πειράματα περίθλασης ακτίνων X, παρόμοια με εκείνα που είδαμε όταν μελετήσαμε το φαινόμενο Compton. Τα πειράματα αυτά προσδιόρισαν την κοντινότερη απόσταση μεταξύ των κέντρων των ιόντων διαφορετικού προσήμου. Έτσι για NaCl έχουμε 2.81 Angstrom, ενώ για KCl 3.14 Angstrom.



Σχήμα 8.2 Μοντέλο κρυστάλλου KCl. Απλός κυβικός Κρυστάλλος.

Ασκηση.

Υπολογίστε την ενέργεια σύνδεσης του στερεού KCl. Μεγάλη ενέργεια σύνδεσης σημαίνει ότι πρέπει να δωθεί μεγάλη ενέργεια στον κρύσταλλο για να διασπάσει το στερεό στα συνιστώσα αυτόν άτομα. Επίσης μεγάλη ενέργεια σύνδεσης συνεπάγεται μεγάλες θερμοκρασίες τήξης διότι τα άτομα θα παραμένουν στο στερεό έως ότου οι διακυμάνσεις που προκαλούνται από θερμική κίνηση είναι αρκετά μεγάλες ώστε να υπερπηδήσουν τις δυνάμεις που προκαλούν την σύνδεση σε ιοντικό κρύσταλλο.

Υπενθυμίζουμε με ποιούς τρόπους μπορούμε να αντλούμε τις πιο πάνω πληροφορίες για τη δομή των κρυστάλλων: Κάνουμε πειράματα περίθλασης. Είτε με ακτίνες X της τάξης λ περίπου μερικών Angstroms, είτε με περίθλαση ατόμων, ηλεκτρονίων ή και νετρονίων, από κρυστάλλους όπως είδαμε στο κεφάλαιο 5. Για περισσότερες πιο λεπτομερειακές μεθόδους μπορεί κανείς να καταφύγει σε φασματοσκοπία Raman ή Brillouin.

8.2 ΚΥΜΑΤΑ BLOCH .

Ας δούμε μια χρήσιμη ιδιότητα που μπορούμε να μάθουμε αν θεωρήσουμε ότι σε κρύσταλλο υπάρχει περιοδικότητα στο δυναμικό που αισθάνεται ένα ηλεκτρόνιο. Έτσι η Χαμιλτονιανή που περιγράφει τον τελεστή της ενέργειας ενός ηλεκτρονίου σε ένα μονοδιάστατο μοντέλο ενός-ηλεκτρονίου είναι αναλλοίωτη σε μετατόπιση της συντεταγμένης του ηλεκτρονίου κατά μια απόσταση L ίση με τη σταθερά του πλέγματος:

$$H(x+L) = H(x) \quad (8.1)$$

Ορίζουμε τώρα τον τελεστή της μετατόπισης D_{op} έτσι ώστε :

$$D_{op}f(x) = f(x+L) \quad (8.2)$$

Τότε μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι

$$D_{op}Hf(x) = H(x+L)f(x+L) = H(x)D_{op}f(x) \quad (8.3)$$

Έτσι για κάθε συνάρτηση $f(x)$ ισχύει :

$$[D_{op}, H(x)] = (D_{op}H(x)D_{op})f(x) = 0 \quad (8.4)$$

Αν ο τελεστής του πρώτου μέλους της Εξ.8.4 ισούται με μηδέν όταν

εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$, άρα ο αντιμεταθέτης του D_{op} και του τελεστή του Hamilton μηδενίζεται.

$$[D_{op}, H] = 0 \quad (8.5)$$

Μπορεί όμως τότε να αποδειχθεί ότι οι τελεστές D και H έχουν ένα πλήρες σύνολο κοινών ιδιοκαταστάσεων, δηλαδή οι στάσιμες καταστάσεις μπορούν να επιλέγουν να είναι ιδιοκαταστάσεις (ιδιοσυναρτήσεις) του D_{op} . Εστω λοιπόν ψ είναι μια από αυτές, έτσι ώστε:

$$D_{op}\psi(x) = a\psi(x) \quad (8.6)$$

όπου a είναι η ιδιοτιμή του D_{op} και είναι σταθερή ποσότητα. Επειδή ο τελεστής D δεν αντιστοιχεί σε παρατηρήσιμο μέγεθος, δεν απαιτείται να είναι Χερμιτιανός, και συνεπώς το a μπορεί να είναι και μιγαδικό. Λόγω του ορισμού του τελεστή της μετατόπισης προκύπτει ότι:

$$\psi(x+L) = a\psi(x) \quad (8.7)$$

Οι ιδιότητες (8.1) και (8.7) ισχύουν για όλα τα ζεύγη σημείων $(x, x+L)$ που βρίσκονται μέσα στον κρύσταλλο. Αν υποθέσουμε ότι ο κρύσταλλος έχει τόσο μεγάλο μήκος ώστε να εκτείνεται από $-\infty$ ως $+\infty$ συνεπάγεται ότι:

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x)|^2 = \frac{1}{|a|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x+L)|^2 \quad (8.8)$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $x+L$, έχουμε επίσης την

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x+L)|^2 \quad (8.9)$$

Οι Εξ.(8.8) και (8.9) δίνουν αν συνδυαστούν:

$|a|^2 = 1$, έτσι ώστε $a = \exp(i\beta)$, με β πραγματικό. Χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε να βάλουμε $\beta = kL$:

$$a = e^{ikL} \quad (8.10)$$

όπου το k είναι πραγματικό. Σύμφωνα με τις Εξ. 8.7 και 8.8, κάθε φορά που μετατοπίζουμε την συντεταγμένη θέσης x κατά μια απόσταση L , η κυματοσυνάρτηση πολλαπλασιάζεται επί $\exp(ikL)$. Έτσι για οποιοδήποτε θετικό ή αρνητικό ακέραιο m ισχύει

$$\psi(x+mL) = e^{ikmL}\psi(x) \quad (8.11)$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή σαν συνθήκη του Bloch. Αν εκλέξουμε να γράψουμε την κυματοσυνάρτηση υπό μορφή

$$\psi(x) = e^{ikx} u_k(x) \quad (8.12)$$

Τότε αποδεικνύεται ότι η συνθήκη του Bloch απαιτεί:

$$u_k(x+mL) = u_k(x) \quad (8.13)$$

Πράγματι, η Εξ. 8.11 δίνει:

$$\psi(x+mL) = e^{ikmL} e^{ikx} u_k(x)$$

Το πρώτο σκέλος της τελευταίας, λόγω της 8.12, γίνεται ίσο με

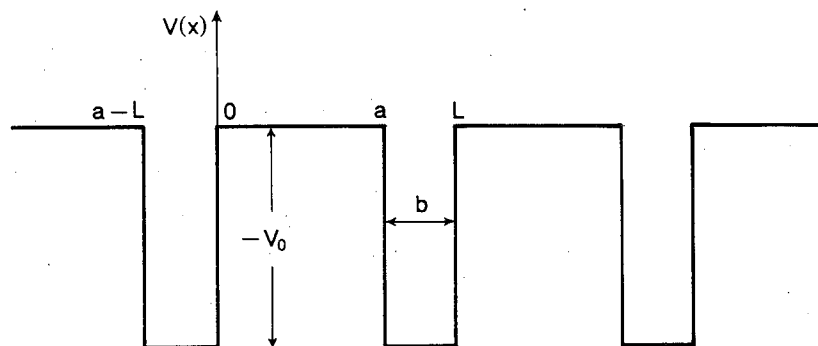
$$e^{ikx} e^{ikmL} u_k(x+mL)$$

Αρα προκύπτει η σχέση 8.13.

Οι συναρτήσεις $u(x)$ λέγονται συναρτήσεις Bloch. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση Bloch έχει την ιδιότητα της περιοδικότητας του πλέγματος. Για να εξαγάγουμε την ιδιότητα ότι το k είναι πραγματικό, χρειαστήκαμε το ότι η (8.7) ισχύει για όλες τις τιμές της θέσης x , πράγμα που δεν ισχύει για έναν κρύσταλλο πεπερασμένου μήκους. Τότε υπάρχουν και λύσεις με k μιγαδικό. Αν λοιπόν γράψουμε $k=k_1 + ik_2$, με k_1 και k_2 πραγματικά, τότε η κυματοσυνάρτηση 8.12 περιέχει έναν παράγοντα της μορφής $\exp(-k_2x)$. Ανάλογα με το πρόσημο του k_2 , αυτός είναι μεγαλύτερος του ένα είτε στο ένα είτε στο άλλο άκρο του κρυστάλλου, και αντίστοιχα ελαττώνεται εκθετικά με την απόσταση από το άκρο όπου είναι μικρότερος του ένα. Καταστάσεις με συμπεριφορά αυτού του είδους έχουν αμελητέα συνειφορά εκτός από περιπτώσεις πάρα πολύ μικρών μικροκρυστάλλων και δεν θα τις μελετήσουμε περισσότερο.

8.3 ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΡΥΣΤΑΛΛΟΥ KRONIG-PENNEY.

Το θεώρημα του Bloch δηλώνει ότι λύσεις της εξίσωσης του Schrodinger της μορφής 8.12 αποτελούν ένα πλήρες σύνολο, τουλάχιστον στην οριακή περίπτωση όπου το ολικό μήκος του κρυστάλλου θεωρείται άπειρο. Τη σημασία του θεωρήματος αυτού μπορούμε να την δούμε αν προσπαθήσουμε να λύσουμε την εξίσωση του Schrodinger για το δυναμικό του τύπου Kronig-Penney που σχηματιιά φαίνεται στο Σχ.8.2.



Σχήμα 8.3 Δυναμικό Kronig-Penney.

Έτσι ένα ηλεκτρόνιο ενός κρυστάλλου κινείται σε δυναμικό:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 < 0 & \text{αν } a - L < x < 0 \\ 0 & \text{αν } 0 < x < a \end{cases}$$

με $V(x+a+b) = V(x)$

Υποθέτουμε ότι ο καθένας τετραγωνικός φραγμός δυναμικού ύψους V_0 του Σχ.8.3 εκφράζει, σε πολύ χονδρική προσέγγιση, το δυναμικό που αισθάνεται ένα ηλεκτρόνιο στη γειτονιά του κάθε ατόμου του πλέγματος. Υποθέτουμε επίσης ότι η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι $E < 0$. Μολονότι η προσέγγιση είναι πολύ χονδροειδής τα ποιοτικά αποτελέσματα στα οποία θα οδηγηθούμε δεν αλλάζουν ακόμα και αν χρησιμοποιήσουμε πιο εκλεπτυσμένα και ρεαλιστικά μοντέλα.

Με βάση το δυναμικό που θεωρούμε ας δούμε τι μορφή παίρνει η εξίσωση του

Schrodinger: =

$$\begin{aligned} (-\hbar^2/2m)\psi'' - V_0\psi &= E\psi && \text{μέσα στα πηγιάδια} \\ (-\hbar^2/2m)\psi'' &= E\psi && \text{ανάμεσα στα πηγιάδια} \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \psi'' &= \alpha^2 \psi && \text{ανάμεσα στα πηγιάδια} \\ \psi' &= -\beta^2 \psi && \text{μέσα στα πηγιάδια} \end{aligned}$$

όπου

$$\alpha^2 = -2mE/\hbar^2 \quad \text{και} \quad \beta^2 = (2m/\hbar^2)(E+V_0) \quad (8.16)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bloch αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$\psi(x) = e^{ikx} u_k(x) \quad (8.17)$$

όπου $H\psi = E\psi$ και $u_k(x) = u_k(x+a+b)$

Είναι φανερό ότι στην έκφραση (8.17) το k παριστάνει τον κυματικό αριθμό ενός κύματος, του οποίου το πλάτος u_k μεταβάλλεται όσο μέσα στην περιοχή του κάθε ατόμου, αλλά η συνάρτησή του πλάτους έχει την ίδια μορφή από το ένα άτομο στο επόμενο. Το ηλεκτρόνιο δεν ανήκει σε ένα άτομο, αλλά την ίδια πιθανότητα να βρεθεί στην γειτονιά οποιουδήποτε από αυτά.

Η λύση καθεμιάς από τις δύο διαφορικές εξισώσεις του Schrodinger έχει την μορφή δύο απλών εκθετικών:

$$\begin{aligned} \psi &= A \exp(i\beta x) + B \exp(-i\beta x) && \text{για } a-L < x < 0 \\ \psi &= C \exp(ax) + D \exp(-ax) && 0 < x < a \end{aligned} \quad (8.18)$$

Τότε από την Εξ. (8.17) προκύπτει:

$$\begin{aligned} u_k &= A \exp[i(\beta-k)x] + B \exp-[i(\beta+k)x] && a-L < x < 0 \\ u_k &= C \exp[(a-ik)x] + D \exp-[(a+ik)x] && 0 < x < a \end{aligned} \quad (8.19)$$

Η σχέσεις 8.19 προσδιορίζουν την συνάρτηση u_k παντού, άρα και την $\psi(x)$. Ειδικά για $a < x < L$ θέτοντας όπου x το $x-L$ στην σχέση 8.19α παίρνουμε:

$$u_k = A \exp[i(\beta-k)(x-L)] + B \exp-[i(\beta+k)(x-L)] \quad (8.20)$$

Ετσι παίρνουμε την έκφραση για θετικά x , άλλα μέσα στο πηγιάδι. Τώρα και στα δύο άκρα κάθε πηγαδιού απαιτούμε οι ψ και ψ' να είναι συνεχείς η ισοδύναμα οι u_k να είναι συνεχείς. Αν τούτο ισχύει για ένα πηγιάδι τότε, λόγω της περιοδικότητας της u , θα ισχύει για κάθε πηγιάδι! Εισάγοντας τις συνθήκες συνέχειας για $x=0$ στις 8.19 έχουμε τις σχέσεις 8.21 και 8.22

αντίστοιχα :

$$A + B = C + D$$

$$i(a-k)A - i(a+k)B = (\beta-ik)C - (\beta+ik)D$$

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες ότι η $u(x)$ και παράγωγος της είναι συνεχής στο $x=a$, έχουμε:

$$\begin{aligned} Ae^{i(\beta-k)(a-L)} + Be^{-i(\beta-k)(a-L)} &= Ce^{(a-ik)a} + De^{-(a+ik)a} \\ i(\beta-k)Ae^{-i(\beta-k)b} - i(\beta+k)Be^{+i(\beta-k)b} &= (a-ik)Ce^{a-ik)a} - (a+ik)De^{-a+ik)a} \end{aligned}$$

(8.21) & (8.22)

όπου $b=L-a$

Οι εξισώσεις 8.21 και 8.22 αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων ομογενών ως προς τους αγνώστους A, B, C, D , εξισώσεων. Για να έχει μη μηδενική λύση πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να μηδενίζεται. Έτσι παίρνουμε την συνθήκη:

$$\text{ορίζουσα } (a, k, a, \beta, b) = 0 \quad (8.23)$$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτής δίνει την εξίσωση:

$$[(a^2-\beta^2)/2a\beta] \sinh aa \sin \beta b + \cosh aa \cos \beta b = \cos kL \quad (8.24)$$

Η σχέση αυτή προέκυψε με την προϋπόθεση $-V_0 < E < 0$.

Σύμφωνα με την Εξ. 8.24 όταν τα a, L, V_0 είναι σταθερά, οι ποσότητες a και β είναι συναρτήσεις του E , και έτσι ουσιαστικά η Εξ. 8.24 αντιστοιχεί στην συνθήκη :

$$f(E) = \cos kL \quad (8.25)$$

όπου $f(E)$ είναι μια πολύπλοκη αλλά γνωστή συνάρτηση της ενέργειας.

Αξιζει να προσέξει κανείς στη συνθήκη αυτή τον προφανή περιορισμό ότι το πρώτο μέλος της ισότητας αυτής πρέπει να έχει απόλυτη τιμή μικρότερη η ίση του 1 αφού ισούται με μια συνημιτονική έκφραση. Αυτό φαίνεται αν κάνουμε μια γραφική παράσταση του πρώτου μέλους αφού βέβαια διαλέξουμε συγκεκριμένες τιμές για τα a, L και V_0 . Παρατηρούμε ότι για ορισμένες περιοχές τιμών της ενέργειας (θα ονομάζουμε στο εξής τις περιοχές αυτές χάσματα) η συνάρτηση $f(E)$ παίρνει απαράδεκτες τιμές διότι υπερβαίνει κατ' απόλυτη τιμή το 1. Στις περιοχές αυτές δεν μπορεί συνεπώς να έχουμε επιτρεπτές ενεργειακές καταστάσεις, ενώ αντίθετα οι περιοχές των ενεργειακών ζωνών, ανάμεσα δηλαδή από τα χάσματα έχουμε επιτρεπτές ενεργειακές καταστάσεις. Το ενδιαφέρον είναι ότι τέτοιου είδους θεωρητικά

συμπεράσματα επιβεβαιώνονται από το πείραμα!. Αναρίθμητα πειράματα φασματοσκοπίας στην περιοχή στερεού σώματος επιβεβαιώνουν την ύπαρξη των επιτρεπομένων ζωνών ενέργειας και την ανυπαρξία στασίμων καταστάσεων με ενέργειες που να αντιστοιχούν στα ενεργειακά χάσματα. Το μοντέλο του περιοδικού πηγαδιού δυναμικού που θεωρήσαμε είναι πολύ χονδρικό και δεν μπορεί να έχει ποσοτική συμφωνία με πειραματικά αποτελέσματα. Αυτό όμως που θέλουμε να τονίσουμε είναι ότι ένα πρακτικά οποιασδήποτε μορφής περιοδικό ελκτικό δυναμικό σε κρύσταλλο προβλέπει ποιοτικά τα ίδια συμπεράσματα: Υπαρξη ζωνών και χασμάτων. Παρατηρούμε επίσης από το Σχ.8.4 ότι οι ζώνες που αντιστοιχούν σε χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες είναι στενότερες. Η φυσική σημασία του αποτελέσματος τούτου σχετίζεται με ότι οι στάθμες αυτές αντιστοιχούν σε ηλεκτρονία πιο ισχυρως προσδεδεμένα σε άτομα και έτσι επηρεάζονται ασθενέστατα από γειτονικά άτομα.

Ασκηση 2:

Εξετάστε την περίπτωση όπου η ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Δείξτε τότε ότι στην περίπτωση αυτή τα ενεργειακά χάσματα ελλοτάνονται σε εύρος όσο το E αυξάνει, αλλά είναι σημαντικά σε εύρος ακόμα και όταν η ενέργεια E είναι τόσο μεγάλη ώστε τούτο να διαφύγει από τον κρύσταλλο και να βγει στον περιβάλλοντα χώρο.

Πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων σε ένα μονοδιάστατο κρυσταλλικό πλέγμα. Είδαμε ότι ο αριθμός των ενεργειακών σταθμών σε κάθε ζώνη είναι N, όσος δηλαδή ο αριθμός των ατόμων στο κρυσταλλικό πλέγμα. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι ο κρυστάλλος είναι μονοδιάστατος άλλα ταυτόχρονα τα δύο άκρα του συμπίπτουν σε μορφή κυκλικού δακτυλίου, όπως στο σχήμα 8.5. Τώρα για την κυματοσυνάρτηση ψ ενός ηλεκτρονίου στον κρύσταλλο μπορούμε να υποθέσουμε ότι ικανοποιεί την συνθήκη

$$\psi(NL) = \exp(iknL) u(NL) = \psi(0) = u(0) \quad (8.26)$$

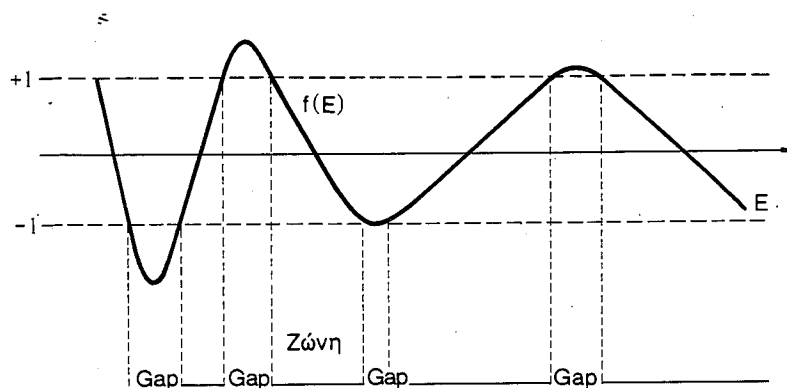
Η συνθήκη αυτή λέει ότι η κυματοσυνάρτηση ψ είναι μονοσήμαντα ορισμένη, πράγμα επιθυμητό αν δεν θέλουμε στο σημείο $x=0$.

Ειδική περίπτωση της παραπάνω εξίσωσης (8.24) προκύπτει αν $V \rightarrow \infty$ και $b \rightarrow 0$. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι

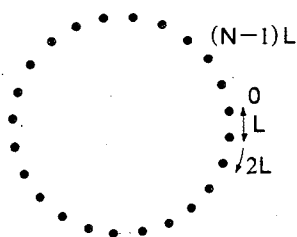
$$[(\beta^2 - a^2)/2\alpha\beta] \sinh \alpha a \rightarrow mV_0 b / \hbar^2 a$$

και $\cosh \alpha a \rightarrow 1$, οπότε η σχέση (8.25) γίνεται

$$P \sin \beta b + \cos \beta b = \cos kL \quad (8.26)$$



Σχήμα 8.4 εξάρτηση της εκφράσης $f(E)$ από την ενέργεια E για συγκεκριμένες τιμές των a, L και V



Σχήμα 8.5 Μονοδιάστατο κυκλικό κρυσταλλικό πλέγμα.

όπου Εξ. ορισμού

$$p \equiv \frac{mV_0 b}{\hbar^2 a}$$

Ετσι προκύπτει η απλούστερη εξίσωση .

$$p \frac{\sin \beta b}{\beta b} + \cos \beta b = \cos kL \quad (8.27)$$

Οι πραγματικές λύσεις ως προς β της εξίσωσης αυτής αντιστοιχούν στις περιοχές εκείνες του kL όπου η γραφική παράσταση του πρώτου σκέλους της εξίσωσης (8.27) έχουν απολυτές τιμές μικρότερες ή ίσες του 1, όπως φαίνεται στο σχήματα 8.5αβ βλέπουμε ότι οι πραγματικές λύσεις της

εξίσωσης (8.25) καθώς και της εξίσωσης (8.27) είναι μια ειδική περίπτωση εξάρτησης $E = f(k)$ να έχουμε "ανακλάσεις" κυμάτων de Broglie. Η παραπάνω, σε συνδυασμό με την περιοδικότητα της συνάρτησης Bloch, δίνει:

$$\exp(ikNL) = 1 \quad (8.27)$$

Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται μόνο αν

$$NL = 2n\pi, \quad \text{αρά} \quad k = 2n\pi/NL \quad (8.28)$$

όπου $n = 0, +1, +2, \dots, +N$

Οι δυνατές τιμές λοιπόν του k είναι διακριτές. Τώρα για n μεταξύ N και $2N$ έχουμε πάλι επανάληψη της μορφής της συνάρτησης που έχει στο διάστημα $0, \dots, N$. Αρα προκύπει ένα διάστημα ουσιαστικής μεταβολής του k από 0 ως $2\pi/L$. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εκτός του διαστήματος αυτού των κυματαριθμών k έχουμε την ίδια ζώνη, έτσι θα χρησιμοποιούμε στο εξής την ζώνη, $-\pi/L < k < \pi/L$. Τώρα από την 8.28 μπορείτε εύκολα να δείξετε για την πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων την σχέση $dN/dp = NL/\hbar$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(4) (α) βρείτε την ενέργεια Fermi απολύτου μηδενός του Καισίου.

(β) Υπολογίστε τη μέση κινητική ενέργεια $E(0)$ του ηλεκτρονίου σε ένα μέταλλο σε 0°K αν είναι γνωστή η πυκνότητα των καταστάσεων

$$g(E) = \left(\frac{\pi}{2} \frac{8m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}$$

και δείξετε ότι

$$E(0) = (3/2) E_f(0)$$

Ενεργός Μάζα.

Σύμφωνα με όσα έχουμε πεί η ομαδική ταχύτητα ενός κυματοπακέτου ισούται με την παράγωγο της κυκλικής συχνότητας ως προς του κυματικό αριθμό. Εφαρμόζοντας την έκφραση αυτή σε ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο έχουμε βρει ότι η ταχύτητα ομάδας ισούται με την ταχύτητα του σωματιδίου

$$v_g = \frac{dv}{du} = \frac{d\omega}{dk}$$

$$v_g = v$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σωματίδιο σε κρυσταλλικό πλέγμα, στο οποίο η ενέργεια έχει την εξάρτηση $E(k)$ από τον κυματικό αριθμό που φαίνεται στο Σχ.8.6 (13-10) Eisberg). Εστω ότι σε ένα τέτοιο σύστημα εφαρμόζεται ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Τότε η μεταβολή της ενέργειας dE θα ισούται με το έργο που παράγεται από το ηλεκτρικό πεδίο κατά την μετακίνηση κατά dx τον ηλεκτρονίου:

$$d\mathcal{E} = (qE)dx = qE \frac{dx}{dt} dt = qE v dt = qE v_g dt$$

Αλλά επίσης έχουμε $E = \hbar\omega$, άρα

$$dE = \hbar d\omega = \hbar \frac{d\omega}{dk} dk = \hbar v_g dk$$

Συγκρινοῦται τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} qE dt &= \hbar dk \\ \text{ή} \quad qE &= \hbar \frac{dk}{dt} \end{aligned} \quad (a)$$

Αν πάρουμε την χρονική παράγωγο του v_g έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dv_g}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\omega}{dk} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\hbar} \frac{d\mathcal{E}}{dk} \right) \\ &= \frac{1}{\hbar} \frac{d^2 \mathcal{E}}{dk dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2 \mathcal{E} dk}{dk^2 dt} \end{aligned}$$

ή λόγω της (a)

$$\frac{dv_g}{dt} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 \mathcal{E}}{dk^2} qE$$

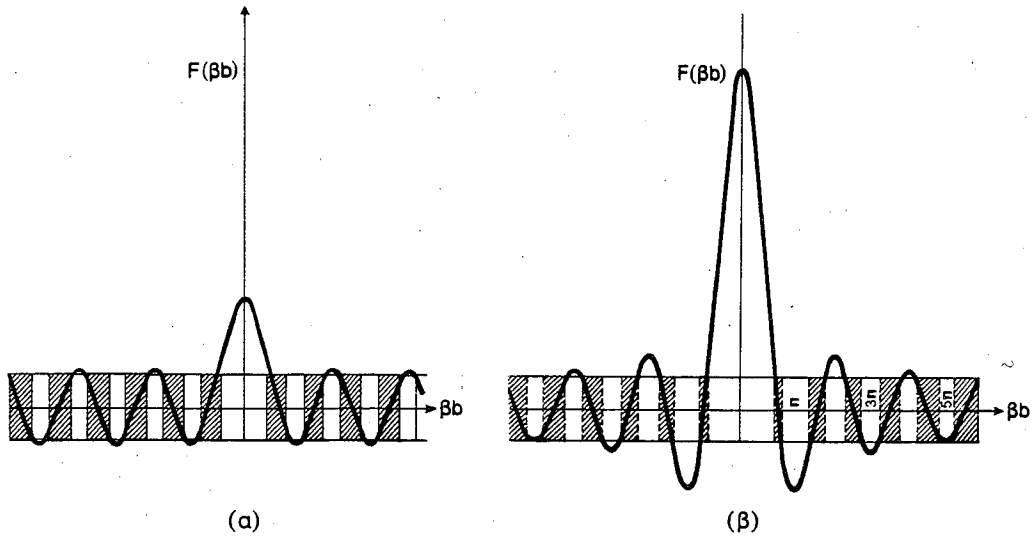
Τέλος αφού $v_g = v$

Επιταχυνση = $dv/dt = qE/m^*$, όπου

$$m^* \equiv \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 \mathcal{E}}{dk^2}$$

Η παραπάνω ποσότητα καλείται ενεργός μάζα .

Εξαρτάται από τη δυναμική του πλέγματος και μπορεί να είναι και αρνητική. Στο Σχ. 8.6 φαίνεται η πρώτη ξωνή Brillouin και μέρος της δεύτερης σε ένα μονοδιάστατο πλέγμα.



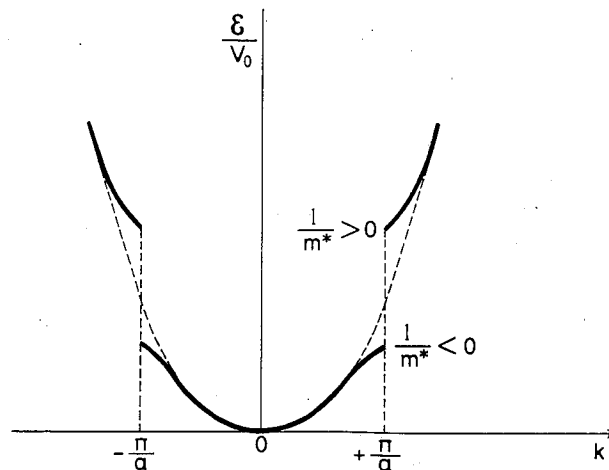
Σχήμα 8.6 αβ . Γραφική παράσταση του πρώτου ακελοειδούς της εξίσωσης 8.26 σαν συνάρτηση διαφορών τιμών του βαθούς του δυναμικό Kronig - Penney. Από τα διαγράμματα αυτά προκύπτουν οι επιτρεπόμενες ενεργειακές ζώνες.

Κοντά στο κέντρο της πρώτης ζώνης, όπου

$$\mathcal{E}(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

είναι

$$\frac{1}{m^*} = \left(\frac{d\mathcal{E}}{dk^2} \right) \hbar^2 = \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{1}{\hbar^2} = \frac{1}{m}$$



Σχήμα 8.6

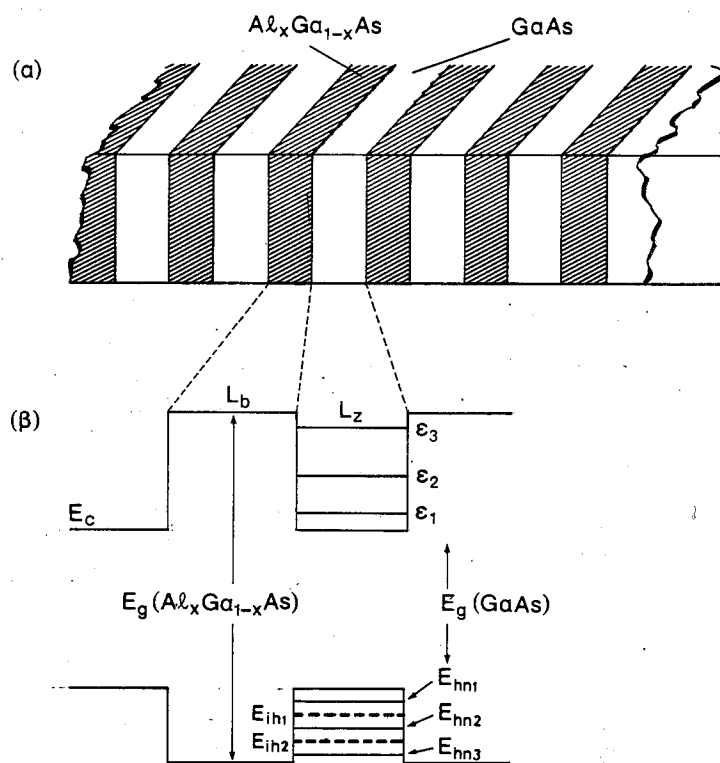
Έτσι στο κέντρο της ζώνης, το κρυσταλλικό πλέγμα έχει μικρή επίδραση στο ηλεκτρόνιο, διότι η αντίστροφη ενεργός μάζα ισούται περίπου με το αντίστροφο της πραγματικής του μάζας, και άρα το ηλεκτρόνιο θεωρείται ότι βρίσκεται σε χώρο ελεύθερο πεδίου. Η καμπυλότητα της συνάρτησης $E(k)$ αποκλίνει σημαντικά καθώς απομακρυνόμαστε από οποιαδήποτε κατεύθυνση από το κέντρο της ζώνης. Επειδή το dE^2/dk^2 περνάει πρώτα από το μηδέν και μετά γίνεται αρνητικό, το ίδιο συμβαίνει και με το μέγεθος $1/m^*$ καθώς πλησιάζουμε προς οποιοδήποτε όριο της ζώνης.

8.4 Τεχνικές υπερδομές ημιαγωγών και Δομές Κβαντικών πηγαδιών.

Οι σύγχρονες μέθοδοι ανάπτυξης λεπτών επιστρώσεων επιτρέπουν τη δημιουργία μορφών δυναμικών ενεργειών που παρουσιάζουν περιοδικότητα, ενώ οι αποστάσεις των τοιχωμάτων των δυναμικών είναι εξαιρετικά μικρές, όπως φαίνεται στο Σχ. 8.6 α,β, το πάχος των συνιστώντων στρωμάτων L_b & L_z είναι της τάξης των 100 nm, δηλαδή είναι της τάξης των ατομικών μονοστρώσεων. Το ιδιαίτερο ενδιαφέρον των κβαντομηχανικών αυτών τεχνητών δομών, αφού βρισκόμαστε ήδη σε ατομική κλίμακα είναι ότι παρουσιάζουν αρκετά διαφορετικές ιδιότητες από τα εναία υλικά, αφού παρουσιάζονται κβαντισμένες ενεργειακές στάθμες που ονομάζονται υπό ή μικροζώνες (subbands).

Η μικρή πρόσμιξη Al στον ημιαγωγό διευρύνει το ενεργειακό χάσμα του

$\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$, αλλά παράγει μικρή πρόσθετη παραμόρφωση λόγω της αρκετά ανάλογης χημικής φύσης του Ga & Al. Η διεύρυνση αυτή ανυψώνει το άνω όριο της ζώνης αγωγιμότητας και καταβιβάζει το άνω όριο της ζώνης σθένους, και έτσι δημιουργούνται φραγμοί δυναμικού τόσο για ηλεκτρόνια όσο και για οπές. Προσεγγιστικά η δομή υποζωνών στο σύστημα αυτό μπορεί να προσδιορισθεί με προσαρμογή κυματοσυναρτήσεων στο όριο της διαδοχικών στρώσεων, κάνοντας χρήση του μοντέλου Kronig - Penney. Οι υπολογισμοί



Σχήμα 8.7 α,β Σχηματική παράσταση τεχνικών υπερδομών και των αντιστοιχών ενεργειακών σταθμών.

οδηγούν στην επιλογή παραμέτρων τέτοιων υπερδομών με επιθυμητές ιδιότητες. Π.χ. επιτρέπουν δημιουργία Lasers με εξαιρετικά μεγάλο μήκος

συμφωνίας (λεπτές φασματικές γραμμές).

Μια άλλη ενδιαφέρουσα εφαρμογή είναι το επιλεκτικό η διαμορφωμένο ντοπάριασμα (οδηγεί σε κβαντικό φαινόμενο Hall "quantized Hall effect"), και την διατεταγμένη τοποθέτηση των ηλεκτρονίων και οπών σε διδιάστατο πλέγμα σε μια νέα κατάσταση , δηλαδή ένα ασυμπιεστο υγρό ηλεκτρονίων (ή οπών). Οι διεγέρσεις της νέας αυτής κατάστασης είναι φαινομενικώς κλασματικά φορτισμένα , οιωνί-ηλεκτρόνια (quasi - electrons) και οιωνι-οπές . Επιπλέον από αυτές της ετεροδομές έχει προκύψει μια νέα ιδέα συσκευής, που λέγεται High Electron Mobility Transistor (HEMT).

υψηλής ηλεκτρονικής ευκινησίας, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές υψηλής ταχύτητας λογικών πράξεων.

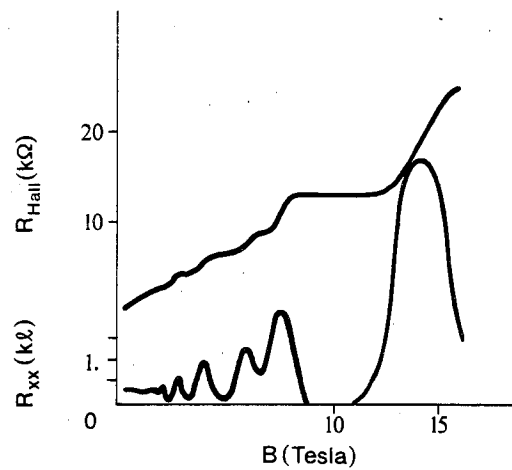
Σε χαμηλά μαγνητικά πεδία είναι συνηθισμένη εφαρμογή η χρησιμοποίηση του φαινομένου Hall για την μέτρηση της συγκέντρωσης φορέων και της ευκινησίας σε ένα στερεό, όπως σε λεπτά στρώματα ημιαγωγών που γίνονται με επιταξία. Όμως σε χαμηλές θερμοκρασίες, αν εφαρμοσθούν υψηλά μαγνητικά πεδία κάθετα προς το λεγόμενο διαδιάστατο αέριο ηλεκτρονίων η οπών, σε δομές $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ με επιλεκτική προσμιξη , τότε παρουσιάζονται εξαιρετικά περιέργα νέα χαρακτηριστικά στην απόκριση του φαινομένου Hall και στην αγωγιμότητα. Παρουσιάζεται όπως φαίνεται στο Σχ.8.8.

παρουσιάζεται ένα ευρύ "οροπεδιο" (Plateau) στην αντίσταση Hall και ευρείες περιοχές μηδενικής αντίστασης παράλληλα προς την ροή φορτίου, καθώς μεταβάλλεται το μαγνητικό πεδίο κάθετα προς το διδιάστατο αέριο ηλεκτρονίων".

Ετσι σε κάθε οροπέδιο, η αντίσταση Hall, δηλαδή το πηλίκον: τάση Hall δια του ρευμάτος είναι κβαντισμένο , όπως δείχνουν τα πειραματικά αποτελέσματα, σε υποπολλαπλάσια του h/e^2 , όπου e το ηλεκτρικό φορτίο του ηλεκτρονίου και h η σταθερά του Planck.

Είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον το ακόλουθο: Στην περιοχή μαγνητικών πεδίων άνω του 1kgauss, η αντίσταση Hall είναι σταθερά και αναπαραγωγίσιμη πειραματικά με σφάλμα 1 μέρος στα 10^8 . ανεξάρτητα από την γεωμετρία της συσκευής. Η ακρίβεια αυτής της κβάντωσης καθιστά αυτές τις δομές επιλεκτικών προσμιξεων πολύ καλές υποψήφιες για πρότυπα ηλεκτρικής αντίστασεων . Επιτρέπουν επίσης τον πειραματικό προσδιορισμό της σταθεράς λεπτής υφής α , με εξαιρετικά μεγάλη ακρίβεια, αφού αυτό είναι ανάλογο του e^2/h . Η ερμηνεία των φαινομένων, επιγραμματικά, σχετίζεται

καταρχήν με το ότι το ενεργειακό φάσμα των ηλεκτρονίων (και οπών) είναι διάκριτο (σχηματισμός σταθμών Landau) λόγω της κβάντωσης της τροχιακής κυκλοτρονικής κίνησης σε μαγνητικό πεδίο, Όμως η σημερινή ερμηνεία ως



Σχήμα 8.8 Μεταβολή αντίσταση Hall με μαγνητικό πεδίο και της παραλλήλης αντίστασης σε δομή κβαντιού πηγαδιού GaAs/Al_xGa_{1-x}As επιλεκτική προαμιξη.

κβαντικού φαινομένου Hall είναι πιο πολύ πλοκή,^[Ref] και δεν θα επεκταθούμε μολονότι παρουσιάζει εξαιρετικά ενδιαφέρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΑΤΟΜΙΚΗ, ΚΑΙ ΜΟΡΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ.

9.1 Ερμηνεία μακροσκοπικών ιδιοτήτων σωμάτων.

Φαινόμενο Zeeman

Ας θεωρήσουμε ένα άτομο μέσα σε ομοιογενές μαγνητικό πεδίο. Ο τελεστής της Χαμιλτονιανής τότε παίρνει την μορφή

$$H = (1/2\mu) (\mathbf{p} - q \mathbf{A} / c)^2 + V \quad (9.1)$$

(βλ. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley, 1953, σελ. 222) όπου \mathbf{A} το διανυσματικό δυναμικό του μαγνητικού πεδίου. Έτσι για ένα άτομο, αν θεωρήσουμε και τα εσωτερικά σπιν s_a των ηλεκτρονίων του η έκφραση της Χαμιλτονιανής γίνεται

$$H = (1/2\mu) \sum_a (P_a + eA_a/c)^2 + V(r) + (e\hbar/mc) \cdot \mathbf{H} \left(\sum_a \mathbf{S}_a \right) \quad (9.2)$$

Αν συμβολήσουμε με H_0 την Χαμιλτονιανή όταν λείπει το μαγνητικό πεδίο, τότε αυτή, παρουσία πεδίου μπορεί να γραφεί, αφού $\mathbf{A} = 1/2 \mathbf{H} \times \mathbf{r}$,

$$H = H_0 + (e/mc) \mathbf{H} \left(\sum_a \mathbf{r}_a \right) \times \mathbf{p}_a + (e^2/8\mu c^2) \sum_a (\mathbf{H} \times \mathbf{r}_a)^2 + (e\hbar \mathbf{H} \mathbf{S}) / \mu \quad (9.3)$$

Αλλά ο τελεστής $\mathbf{r} \times \mathbf{p}_a$ ισούται με τον τελεστή της τροχιακής στροφορμής L_a , και έτσι αν θέσουμε : $\sum L_a = L$, προκύπτει:

$$H = H_0 + \mu_0 (L + 2S) \mathbf{H} + (e^2/8\mu c^2) \left[\sum_a (\mathbf{H} \times \mathbf{r}_a)^2 \right] \quad (9.4)$$

όπου μ_0 , η μαγνητόνη του Bohr. Ο τελεστής $\mu = -\mu_0(L + 2S)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ο τελεστής της "εσωτερικής" μαγνητικής ροπής του ατόμου, την οποία έχει όταν δεν υπάρχει πεδίο. Αν τώρα θεωρηθεί ότι το πεδίο είναι

αρκετά ασθενές ώστε το $H_x r_a$ να είναι μικρό σε σύγκριση με τις αποστάσεις αρκετά ασθενές ώστε το $\mu_0 H r_a$ να είναι μικρό σε σύγκριση με τις αποστάσεις μεταξύ των ενεργειακών σταθμών του ατόμου, συμπεριλαμβανομένων και των αποστάσεων των σταθμών λεπτής υφής. Στην περίπτωση αυτή, ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (9.4) μπορεί να θεωρηθεί σαν διαταραχή, ενώ ο τρίτος επειδή είναι ανάλογος προς το τετράγωνο του (ασθενικού) πεδίου μπορεί να αμεληθεί.

Έτσι, αν θεωρήσουμε μόνο περιπτώσεις όπου αμελούμε το σπιν προκύπτει:

$$\left((p^2/2\mu) - (q/2\mu c) \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} + V(r) \right) \psi(r) = E \psi(r) \quad (9.5)$$

Αν τώρα διαλέξουμε τον άξονα των z ώστε να είναι παράλληλος προς το μαγνητικό πεδίο, τότε η μαγνητική διαταραχή περιέχει τον τελεστή L_z . Όμως ο τελεστής αυτός αντιμετωπίζεται με τον τελεστή l , και έτσι θα υπάρχει, όπως έχουμε δει στο κεφάλαιο 6, ένα πλήρες σύνολο κοινών ιδιοσυναρτήσεων: $\Phi = \exp(im\phi)$. Προφανώς, οι ιδιοτιμές της ενέργειας E_m μεταβάλλονται μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Ευκολα αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές E_m δίνονται από την έκφραση.

$$E_m = E - (q/2\mu c) B m \hbar, \quad \text{όπου } m \text{ ακέραιος} \quad (9.6)$$

Τα παραπάνω αποτελούν μια απλοϊκή θεωρία για το φαινόμενο Zeeman, και για τις περισσότερες εφαρμογές πρέπει κάπως να προσαρμόζεται ώστε να περιγράφει σωστά τα πειραματικά δεδομένα. Πρέπει να επισημάνουμε ότι το σπιν, που εμείς παραλείψαμε για απλούστευση παίζει συνήθως σπουδαίο ρόλο. Επίσης όταν το πεδίο αυξάνει, τότε δεν μπορούμε να αμελήσουμε τον τρίτο όρο της Εξ. (9.4).

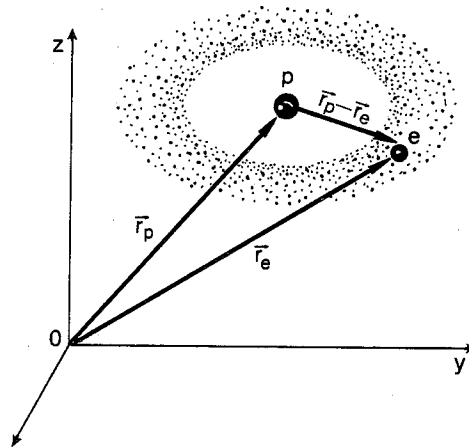
Πρόβλημα. Υπολογίστε την τάξη μεγέθους των μεταβολών στις ιδιοτιμές της ενέργειας στο άτομο του Ag, όταν αυτό βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο ενός Tesla. είδους πηγή ακτινοβολίας θα χρησιμοποιούσατε για να κάνετε πειράματα απορρόφησης φωτονίων από άτομα αργύρου;

Το Ατομο του Υδρογόνου.

9.2 Καλοί κβαντικοί Αριθμοί.

Το Ατομο του Υδρογόνου είναι ένα κβαντικό σύστημα το οποίο έχει

χαρακτηριστικά πολύ πλουσιότερα από τα απλά μονοδιάστατα συστήματα που έχουμε θεωρήσει ως τώρα. Το ηλεκτρόνιο του ατόμου του Υδρογόνου συνδέεται με τον πυρήνα μέσω ηλεκτρικής δύναμης Κουλόμπ η οποία είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $r_p - r_e$, όπως στο Σχ. 9.1 και άρα η δυναμική ενέργεια που πρέπει να μπει στην εξίσωση του Schrodinger για το πρόβλημα αυτό θα είναι της μορφής $V(r)$, όπου $|r| = |r_p - r_e|$. Μια πρόσθετη παράμετρος που υπεισέρχεται στο πρόβλημα αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το ηλεκτρόνιο ευρισκόμενο στο κεντρικό δυναμικό του πυρήνα παρουσιάζει, κλασσικά τουλάχιστον, μη μηδενική στροφορμή. Συνεπώς στην κβαντική μελέτη του συστήματος αυτού θα πρέπει να αναζητήσουμε το φάσμα των ιδιοτιμών του αντίστοιχου τελεστή της στροφορμής σύμφωνα με το δεύτερο αξίωμα της κβαντομηχανικής που αναφέραμε στο Κεφ.6.



Σχήμα 9.1 Σχηματική απεικόνιση των διανυσμάτων που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίου πρωτονίου στο άτομο του Υδρογόνου.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι σε ένα σύστημα, όπως είναι το άτομο του Υδρογόνου μπορούμε να μιλάμε για περισσότερα από ένα παρατηρήσιμα μεγέθη: θέση, ορμή, ενέργεια, στροφορμή κλπ. Ας δούμε τώρα από τα μεγέθη αυτά ποιά είναι εκείνα που χαρακτηρίζονται σαν καλοί κβαντικοί αριθμοί.

Εν γένει, αν μετρήσουμε ένα παρατηρήσιμο μέγεθος Q σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, θα πάρουμε διαφορετικές ιδιοτιμές. Αυτό συμβαίνει διότι το σύστημα έχει υποστεί μια κανονική χρονική εξέλιξη, η οποία

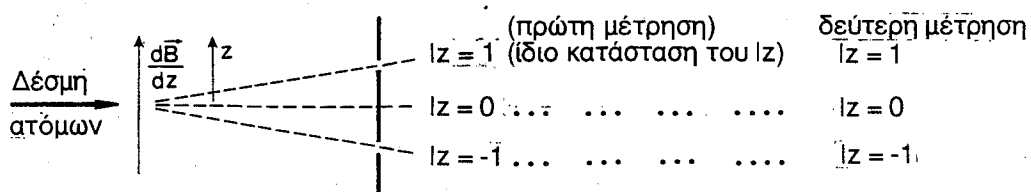
διέπεται από την χρονικά εξαρτώμενη εξίσωση του Schrodinger . Η κανονική (εσωτερική) αυτή χρονική εξέλιξη είναι διαφορετική από την εξέλιξη που μπορεί να προκληθεί από μια εξωτερική διαταραχή , όπως συμβαίνει π.χ. με την μέτρηση κάποιου άλλου παρατηρήσιμου μεγέθους.

Οι μόνες καταστάσεις των οποίων η χρονική εξέλιξη είναι τετριμμένη, χωρίς δηλαδή μετρήσεις σε διαφορετικές χρονικές στιγμές να δίνουν διαφορετικές ιδιοτιμές στο παρατηρήσιμο μέγεθος Q , είναι οι στάσιμες καταστάσεις :

$$\Psi(r,t) = \psi(r) \cdot \exp(-iEt/\hbar) \quad (9.7)$$

Σε αυτές , η πυκνότητα πιθανότητας $|\Psi|^2$ είναι σταθερή με τον χρόνο σε κάθε σημείο r . Οι στάσιμες καταστάσεις, όπως έχουμε δει, είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή του Χάμιλτον H .

Αν μετρήσουμε ένα παρατηρήσιμο μέγεθος Q , τότε (σαν αποτέλεσμα της διαταραχής που προκαλεί η διαδικασία της μέτρησης) ρίχνουμε το σύστημα σε μια ιδιοκατάσταση q του αντίστοιχου τελεστή Q . Εστω τώρα ότι η ιδιοκατάσταση q είναι επίσης ιδιοκατάσταση του τελεστή του Χάμιλτον H . Σε αυτή την περίπτωση, η χρονική εξέλιξη θα είναι τετριμμένη, δηλ. δεν θα είναι επαλληλία πολλών ιδιοσυναρτήσεων, αλλά θα έχει την μορφή (9.7) . Συνεπώς μια επόμενη μέτρηση του παρατηρήσιμου μεγέθους Q θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα όπως η πρώτη μέτρηση. Παραστατικά ο παραπάνω ισχυρισμός φαίνεται στο Σχ.9.2.



Σχήμα 9.2 Ο τελεστής Q έχει ιδιοκαταστάσεις ίδιες με του H .

Η επόμενη αυτή μέτρηση θα γίνει όχι στο ίδιο φυσικό σύστημα που η κατάσταση του διαταραχθηκε από την πρώτη μέτρηση αλλά σε ένα άλλο πανόμοιοτυπο σύστημα ενός στατιστικού συνόλου του οποίου όλα τα μέλη περιγράφονται από την ίδια ιδιοσυνάρτηση.

Σύμφωνα με την συζήτηση του προηγούμενου κεφαλαίου, αναγκαία συνθήκη για να έχουν οι τελεστές H και Q^2 κοινό πλήρες σύνολο ιδιοσυναρτήσεων, αρκεί να ισχύει η συνθήκη:

$$[Q, H] = 0$$

Σε αυτές τις περιπτώσεις λέμε ότι το παρατηρήσιμο μέγεθος Q είναι ένας καλός κβαντικός αριθμός. Η τιμή του μπορεί να δώσει ένα είδος ταυτότητας σε μια στάσιμη κατάσταση, διότι η τιμή του παρατηρήσιμου μεγέθους αυτού δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Στροφορμή .

Τα παραπάνω μπορούν να συγκεκριμενοποιηθούν με το παράδειγμα του παρατηρήσιμου μεγέθους της στροφορμής στο άτομο του υδρογόνου. Με αυτό το μέγεθος μπορούμε να χαρακτηρίζουμε τις μόνιμες καταστάσεις στο άτομο του υδρογόνου, όπως θα δείξουμε. Στην κλασική μηχανική η τροχιακή στροφορμή ενός σωματιδίου γύρω από την αρχή των συντεταγμένων είναι $r \times p$. Ο αντίστοιχος τελεστής στην κβαντομηχανική ονομάζεται συνήθως \hat{L} , και δίνεται από τη σχέση :

$$\hat{L}^2 = \hat{r} \times \hat{p} = \hat{r} \times (-i\hbar \nabla) \quad (9.8)$$

δηλαδή προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο των τελεστών της θέσης και της ορμής.

Άσκηση: Δείξτε ότι σε πολικές συντεταγμένες ο τελεστής της στροφορμής δίνεται από την έκφραση:

$$\hat{L}^2 = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \quad (9.9)$$

Επίσης δείξτε ότι το τετράγωνο του τελεστή της στροφορμής συνδέεται με

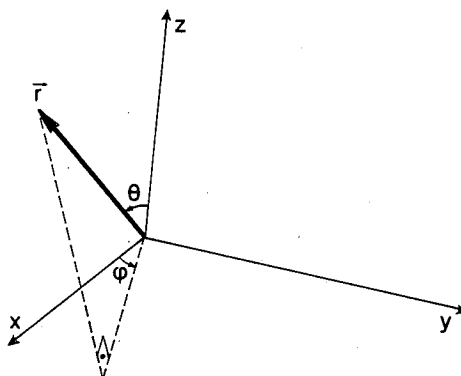
τον τελεστή της Λαπλασιανής, με τη σχέση:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{r^2} \nabla^2 \quad (9.10)$$

Σύμφωνα με την Εξ. (9.10) το μέρος της Λαπλασιανής που περιλαμβάνει την εξάρτηση από τις γωνίες θ και ϕ είναι ακριβώς $-L^2/r^2$. Αν τώρα ορίσουμε τον ορισμό του L μπορεί ναδειχθεί ότι η συνιστώσα του κατά μήκος, συνέπεια προκύπτει ότι και η στροφορμή πρέπει να είναι κβαντισμένη. άξονα των z παίρνει την μορφή: (βλ. Σχήμα 9.3 για ορισμό γωνιών θ και ϕ)

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (9.9) η L^2 δεν περιέχει ρητά τη γωνία ϕ , άλλα το $\partial/\partial \phi$. Τούτο σημαίνει ότι ο τελεστή L_z , δηλαδή είναι, $[L^2, L_z]=0$, έτσι ώστε οι δύο τελεστές έχουν κοινό πλήρες σύστημα (ταυτοχρόνων) ιδιοσυναρτήσεων. Διαπιστώνεται, όπως θα δείξουμε ότι αυτές είναι οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις $Y_l(\theta, \phi)$.



Σχήμα 9.3 Για τον ορισμό των σφαιρικών συντεταγμένων για την μελέτη του προβλήματος της στροφορμής.

9.2 Ιδιοσυναρτήσεις και ιδιοτιμές στο άτομο του Υδρογόνου.

Αν γράψουμε την εξίσωση του Schrodinger για το άτομο του οδρογόνου και

εφαρμόσουμε την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, τότε μια ιδιοσυνρτήση μπορεί να θεωρηθεί ως γινόμενο δύο παραγοντων:

$$\Psi(r) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$$

με αντικατάσταση στην έκφραση

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi + V(r)\Psi = E\Psi$$

όπου ∇^2 η Λαπλασιάνη σε σφαιρικές συντεταγμένες που δίνεται από την Εξ. (9.10). Συνεπώς μετά τον χωρισμό των μεταβλητών προκύπτει ως προς r η εξίσωση

$$-\frac{\hbar^2}{2Mr} \frac{d^2[rR(r)]}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} \right] R(r) = ER(r)$$

Επειδή η τιμή του κβαντικού αριθμού l δεν εμφανίζεται στην πιο πάνω εξίσωση, είναι φανερό ότι η ιδιοτιμές της ενέργειας θα πρέπει να είναι ανεξάρτητες του αζιμουθιακού κβαντικού αριθμού l . Συνεπώς θα έχουμε όπως λέμε εκφυλισμό, στην περίπτωση όπου το δυναμικό είναι κεντρικό. Δηλαδή όλες οι διαφορετικές καταστάσεις $2l+1$ το πλήθος που αντιστοιχούν σε κάθε συγκεκριμένη τιμή του κβαντικού αριθμού l , έχουν την ίδια ενέργεια.

Το Ατομο του Υδρογόνου.

Ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση όπου το δυναμικό έχει την μορφή του δυναμικού Coulomb:

$$V(r) = -e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$$

όπου υποθέτουμε ότι το πρωτόνιο, λόγω της εξαιρετικά μεγάλης συγκριτικά μάζας του είναι περίπου ακινητοποιημένο στην αρχή των αξόνων, Έτσι απλουστεύουμε τους υπολογισμούς. Ας βάλουμε την έκφραση αυτή του δυναμικού στην ακτινική εξίσωση και αναζητήσουμε λύσεις της μορφής

$R(r) \rightarrow 0$ για $r \rightarrow \infty$, έτσι ώστε το ηλεκτρόνιο να είναι εντοπισμένο κάπου σε μια περιοχή γύρω στον πυρήνα. Λόγω της παραπάνω έκφρασης του δυναμικού, η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν για $r \rightarrow \infty$, αρά η ενέργεια θα είναι αρνητική, όπως στην περίπτωση του μονοδιάστατου τετραγωνικού δυναμικού. Αν λοιπόν βάλουμε :

$$E \equiv -\frac{\hbar^2 k^2}{2M}$$

Τότε προκύπτει:

$$-\frac{d^2}{dr^2}(rR(r)) + \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 - \frac{Me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2 r} \right) (rR(r)) = 0$$

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση αυτή έχει λύσεις που ικανοποιούν την σχέση $R(r) \rightarrow 0$ για $r \rightarrow \infty$, τότε και μόνο τότε, αν η έκφραση

$$\frac{Me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}$$

παίρνει ακέραιες και θετικές τιμές n , και αν το l είναι περιορισμένο σε τιμές $0, 1, 2, \dots$ ως $(n-1)$. Ο αριθμός n λέγεται κύριος κβαντικός αριθμός και έχουμε την σχέση

$$E = \frac{-Me^4}{32\hbar^2\epsilon_0^2\pi^2} \frac{1}{n^2}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η ίδια ακριβώς στην οποία κατέληξε ο Bohr, όταν επέβαλε στο άτομο τις περίφημες "συνθήκες του Bohr". Η θεμελειώδης κατάσταση αντιστοιχεί σε $n=1$, οπότε αναγκαστικά $l=0$. Όταν $l=0$, τότε θα είναι και $m=0$ και τότε η σφαιρική αρμονική συνάρτηση $Y_{00}(\theta, \phi)$ είναι μια σταθερή (ισοτροπική) ποσότητα. Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η ακτινική κυματοσυνάρτηση της θεμελειώδους κατάστασης ισούται με

$$(\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

όπου

$$a = 4\pi\hbar^2\epsilon_0/Me^2$$

Άσκηση :

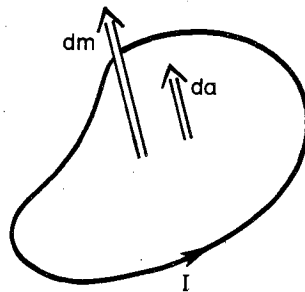
Δείξτε ότι η μέση τιμή της ακτινας $\langle r \rangle = \int d^3r |\psi|^2 r$ ισούται με $3/2a_0$.

9.3 Μαγνητικές Ροπές , Σπιν.

Μπρούμε τώρα να εξετάσουμε πρόσθετα παρατηρήσιμα μεγέθη εκτός της ενέργειας και της τροχιακής στροφορμής του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο. Ας δούμε πρώτα ορισμένα πειραματικά δεδομένα:

Πείραμα των Stern-Gerlach: spin του ηλεκτρονίου.

Το 1922 οι Stern-Gerlach μέτρησαν τις τιμές της μαγνητικής ροπής M_L των ατόμων Αργύρου. Προτού περιγράψουμε την πειραματική αυτή εργασία ας υπενθυμίσουμε σύντομα τι σημαίνει μαγνητική ροπή: όπως φαίνεται στο σχήμα 9.4 για ένα κλειστό επίπεδο βρόχο ηλεκτρικού ρεύματος, στοιχειώσους επιφάνειας da , που διαρρέεται στην περίμετρο του από ρεύμα I , η μαγνητική ροπή dm του βρόχου αυτού ισούται με $dm=I da$. Όπως μαθαίνουμε από τον ηλεκτρομαγνητισμό ένα σώμα που φέρει μαγνητική ροπή, αν βρεθεί σε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο τότε ασκείται στο σώμα αυτό δύναμη $F_z = m F_z$ παραλληλα προς τον άξονα των z .

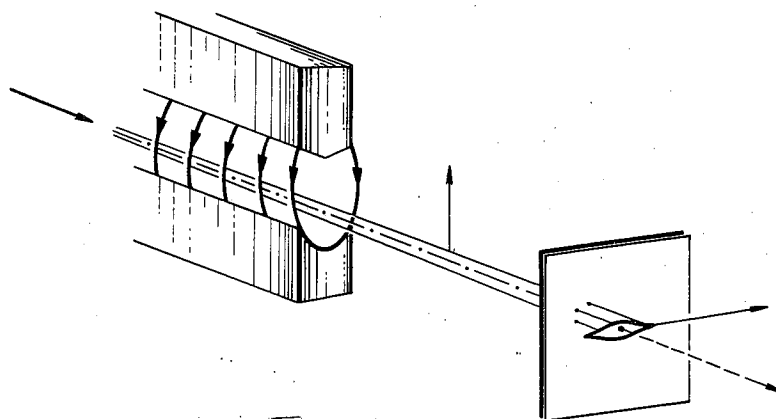


Σχήμα 9.4 Παραστατική εξήγηση της μαγνητικής ροπής που δημιουργείται όταν έχουμε βρόχο ρεύματος.

Στο πείραμα τους οι Stern και Gerlach έστειλαν μια δέσμη ατόμων αργύρου μέσα σε μια περιοχή ισχυρού ανομοιογενούς μαγνητικού πεδίου με άξονα αξιμουθιακής συμμετρίας κάθετο προς την διεύθυνση της δέσμης, όπως φαίνεται στο Σχ.9.5.

Η δύναμη λόγω της ανομοιογένειας του πεδίου μπορεί να εμγανίζεται και

παράλληλα προς τους αξονες των x και y . Έτσι η συνιστώσα $F_x = m \nabla B_x$ έχει μέση τιμή ίση με μηδέν, αφού $\Delta B_z / \Delta z = 0$ κοντά στο επίπεδο $x=0$, λόγω της



Σχήμα 9.5 Διάσπαση της πορείας δέσμης ατόμων αργύρου που προκαλείται λόγω της διέλευσης της από ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο.

συμμετρίας του πεδίου. Επειδή λοιπόν η δύναμη σε κάθε άτομο Ag εξαρτάται από την τιμή m_l , έπεται ότι η δέσμη ατόμων αναλύεται σε συνιστώσες σύμφωνα με την τιμή του m_l . Τα άτομα καθώς αποκλίνουν από την ευθύγραμμη, τροχιά λόγω του πεδίου προσκρούουν πάνω σε μεταλλική πλάκα Π , όπου και γίνεται μετατροπή από την αέρια σε υγρή φάση αφήνοντας έτσι ένα ορατό ίχνος. Η κλασική θεωρία προβλέπει ότι το m_l μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή από $-m_l$ ως $+m_l$. Αντίθετα οι προβλέψεις της κβαντικής θεωρίας περιγράφονται από την εξίσωση :

$$\mu_m = -g\mu_B m$$

όπου m είναι ένας από τους ακεραίους:

$$m = -l, -l+1, \dots, +l-1, +l.$$

Έτσι, αν τα πειραματικά αποτελέσματα έδιδαν ότι η δέσμη ατόμων παρουσίαζε πάνω στην πλάκα Π μια συνεχή κατανομή όπως φαίνεται στο Σχ.9.6α, τότε τούτο θα εσήμαινε ότι η μαγνητική ροπή παίρνει συνεχείς τιμές. Το πείραμα όμως των Stern-Gerlach έδειξε ότι η δέσμη χωρίζεται σε δύο διάκριτα τμήματα όπως φαίνεται στο Σχ.9.6β. Επανάληψη του πειράματος αυτού με δέσμη άλλων ουδέτερων ατομών έδειξε ότι η δέσμη χωρίζεται σε δύο συνιστώσες η και μερικές φορές σε περισσότερες

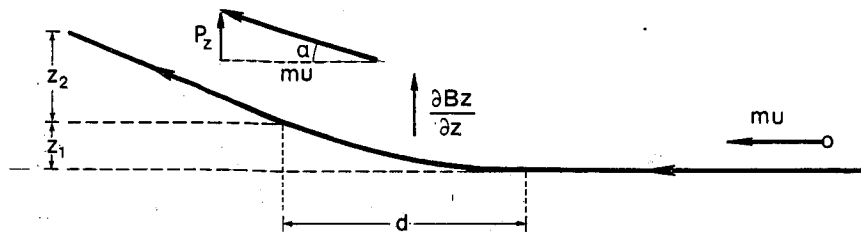
συνιστώσες.

Το ενδιαφέρον είναι ότι η διάσπαση αυτή της εξερχόμενης δέσμης σε διάκριτες συνιστώσες εξακολουθεί να υφίσταται και όταν αλλάξει ο προσανατολισμός του μαγνητικού πεδίου. Αλλάζει βέβαια η κατεύθυνση προς την οποία γίνεται η διάσπαση.



Σχήμα 9.6 α) Αναμενόμενη κλασικά κατανομή των ιχνών των ατόμων Ag πάνω στην πλάκα Π, για συνεχή κατανομή μαγνητικών ροπών
β) Πειραματικό αποτέλεσμα, Παρατηρούμε διάσπαση της δέσμης σε 2 συνιστώσες.

Αλλαγή του προσανατολισμού του πεδίου σημαίνει πρακτικά επαναορίσμο του άξονα των z .



Σχήμα 6.7 Παραστατική εικόνα της πορείας σωματιδίου δέσμης ατόμου συγκεκριμένης μαγνητικής ροπής (κβαντισμένης ή μη) εντός ανομογενούς μαγνητικού πεδίου.

Ας μελετήσουμε πιο λεπτομερειακά την πειραματική διαδικασία που οδηγεί στην παρατήρηση της κβάντωσης της στροφορμής. Εστω λοιπόν μια δέσμη ατόμων με μαγνητική στροφορμή του καθενός ατόμου μ , και με μέση ταχύτητα των ατόμων v , όπως φαίνεται στο Σχ.9.7. Εστω ότι εντός του εγκάρσιου ανομοιογενούς μαγνητικού πεδίου διανύεται από ένα άτομο διάστημα s κατά μήκος του οποίου το μαγνητικό πεδίο είναι μη μηδενικό και έχει βαθμίδα $\partial B/\mu z$. Λόγω αυτού του ανομοιογενούς μαγνητικού πεδίου έχουμε μια επιτάχυνση a κατά τον άξονα των z , αφού η δύναμη που ασκείται ισούται με $\nabla B dz$, άρα: (όπως φαίνεται στο Σχ. 9.7)

$$a = F_z / m, \text{ όπου } m \text{ η μάζα του ατόμου συνεπώς:}$$

$$z_1 = at^2/2, \text{ ενώ } t=s/v \text{ και συνεπώς:}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \frac{d^2}{v^2} \mu_z$$

όπου μ_z η συνιστώσα της μαγνητικής ροπής του ατόμου κατά τον άξονα z , Όταν το άτομο εξέλθει από το πεδίο, διανύει ένα πρόσθετο διάστημα S με σταθερό το διάνυσμα της ταχύτητας, άρα θα υποστεί μια επιπλέον μετατόπιση κατά τον άξονα των z ίση με $z_2 = S \tan \theta$, αλλά

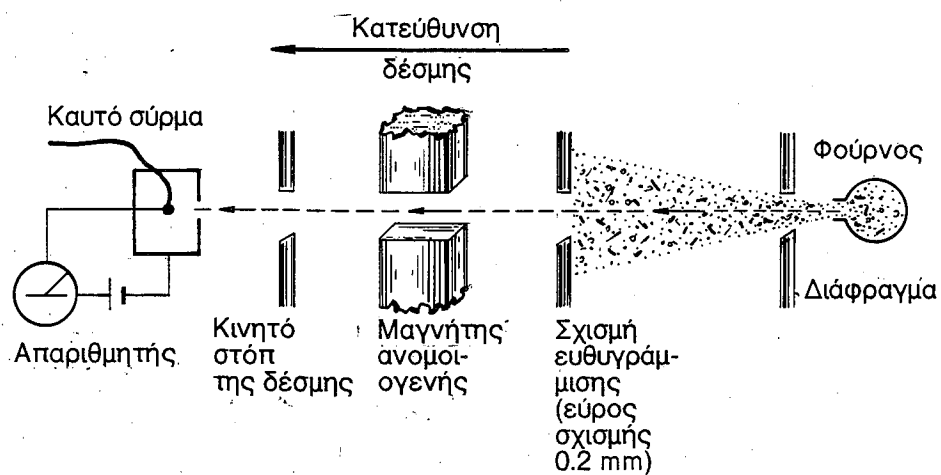
$$\tan \theta = \frac{p_z}{Mv} = \frac{F_z t}{Mv} = \frac{d}{Mv^2} \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\text{άρα } z_2 = \frac{dD}{mv^2} \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$z = z_1 + z_2 = \frac{d}{Mv^2} \left(D + \frac{d}{2} \right) \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Αν λοιπόν η μαγνητική ροπή μ_z έχει συνεχή κατανομή, τότε οι συντεταγμένες z που θα αποκτούν τα άτομα θα παίρνουν συνεχές διάστημα τιμών. Συνεπώς οι τελικές αποκλίσεις Z για ένα μεγάλο δείγμα ατόμων θα πρέπει επίσης να έχουν συνεχή κατανομή. Όπως όμως περιγράψουμε παρακάτω στο πείραμα Stern-Gerlach παρατηρήθηκε με σαφήνεια ότι, τουλάχιστον για το είδος ατόμων που χρησιμοποιήθηκε στη δοκιμή αυτή, η τιμή του μ_z , και συνεπώς η z -συνιστώσα της στροφορμής είναι πράγματι κβαντισμένη. Είναι

εξαιρετικά εντυπωσιακό ότι στο πείραμα αυτό παρατηρείται ότι το φαινόμενο της κβάντωσης δεν περιορίζεται σε μεγέθη όπως η ενέργεια που προκύπτει από απλά επεκτείνεται και σε μεγέθη όπως το σπιν. Παρακάτω φαίνεται μια σχηματική περιγραφή του πειράματος των Stern-Gerlach. Στο Σχ.9.8 φαίνεται η γενική πειραματική διάταξη ειδικότερα φαίνεται ο τρόπος δημιουργίας της δέσμης των σωματιδίων, καθώς και ο τρόπος καταγράφης των σωματιδίων που εξέρχονται αφού διέλθουν από την διαταξη του μαγνήτη. Από ένα θερμαινόμενο δείγμα κεσίου ξεφεύγουν άτομα και μέσω του επιλογέα κατεύθυνση της ταχύτητας (collimator) μπαίνουν μέσα στην περιοχή του ανομοιογενούς μαγνητικού πεδίου. Στην συνέχεια τα άτομα ταξιδεύουν ελεύθερα για 50 cm περίπου προτού φτάσουν στον απαριθμητή σύρματος Νιοβίου. Τούτο το σύρμα συνδέεται με ένα πολύ ευαίσθητο γαλβανόμετρο που μπορεί να μετρήσει ρεύματα της τάξης των 10^{-12} A. Το ρεύμα παράγεται από άτομα που ιονίζονται εύκολα (αλκάλια) όταν χτυπούν πάνω σε ζεστό σύρμα.

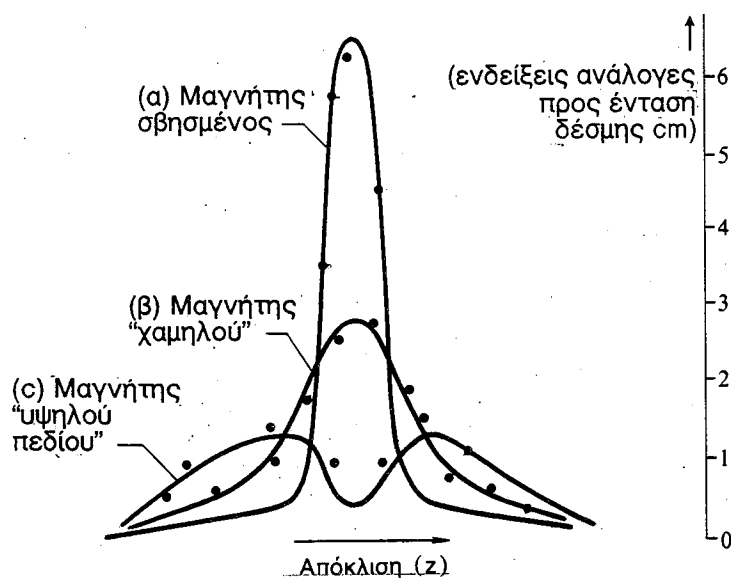


Σχήμα 9.8 Σχηματική παράσταση πειράματος Stern-Gerlach.
(συνολική άποψη)

Το μη ομογενές μαγνητικό πεδίο παρέχεται από ηλεκτρομαγνήτη με επιφάνειες πόλων σε σχήμα "κυλινδρικών τμημάτων". Η διάταξη αυτή παρέχει σταθερό $\partial B_z / \partial z$ Πάνω στο εύρος του διάκενου (περίπου μερικά χιλιοστόμετρα).

Στο Σχ. 9.9 φαίνονται τα βασικά αποτελέσματα του πειράματος. Αν η βαθμίδα του μαγνητικού πεδίου είναι υψηλή, η δέσμη διχάζεται στα δύο με ίσες και αντίθετες αποκλίσεις από την θέση συμμετρίας $z=0$. Η εικόνα γίνεται λιγότερο ευκρινής (δηλ. οι κορυφές δεν είναι αιχμηρές) λόγω της στατιστικής κατανομής του μέτρου και της κατεύθυνσης της ταχύτητας των ατόμων της δέσμης.

Τα αποτελέσματα, αν λάβουμε υπόψη εύρη σχισμών ευθυγράμμισης και κατανομής ταχυτήτων, είναι τελείως συνεπή με την κβάντωση της προβολής της μαγνητικής ροπής μ_z σε δύο ίσες και αντίθετες τιμές. Κατά συνέπεια προκύπτει ότι και η στροφορμή πρέπει να είναι κβαντισμένη.



Σχήμα 9.9 Κατανομές της δέσμης ατόμων cesium στο περιγραφόμενο πείραμα. Το (c) δείχνει την διασπορά της δέσμης με χαμηλό πεδίο. Η βαθμίδα του μαγνητικού πεδίου δεν επαρκεί για τον χωρισμό των συνιστωσών. Η καμπύλη () δίνει τον διαχωρισμό σε υψηλή βαθμίδα πεδίου. Παρατηρείστε την διανομή των από κλίσεων οφείλεται στην διασπορά των ταχυτήτων των ατόμων cesium από τον φούρνο.

9.4 Εφαρμογές του φαινομένου Zeeman στη μετρηση Αστρικών μαγνητικών πεδίων.

Η σχέση των ατομικών ενεργειακών σταθμών λόγω του φαινομένου Zeeman, και οι ηλεκτρονικές μετεπτώσεις σύμφωνα με τους κανόνες επιλογής έχουν

αποτέλεσμα την διαίρεση αυτή γίνεται σε σχηματισμούς οι σχετικές αποστάσεις των οποίων μπορούν να προβλεφθούν όπως επίσης να προβλεφθεί και η πόλωση των αντιστοιχών καταστάσεων.

Ετσι, όπως έδειξε ο Lorentz, με μια μελέτη βασισμένη σε κλασική φυσική, για ένα απλό σύστημα με ένα ηλεκτρόνιο, αν ν_0 παριστάνει τον κυματικό αριθμό χωρίς μαγνητικό πεδίο, τότε ο κυματαριθμός με την παρουσία μαγνητικού πεδίου γίνεται $\nu_0 + \Delta\nu$, όπου

$$\Delta\nu = eH / 4\pi mc^2 = 4.67 \times 10^{-5} \text{ Hcm}^{-1}$$

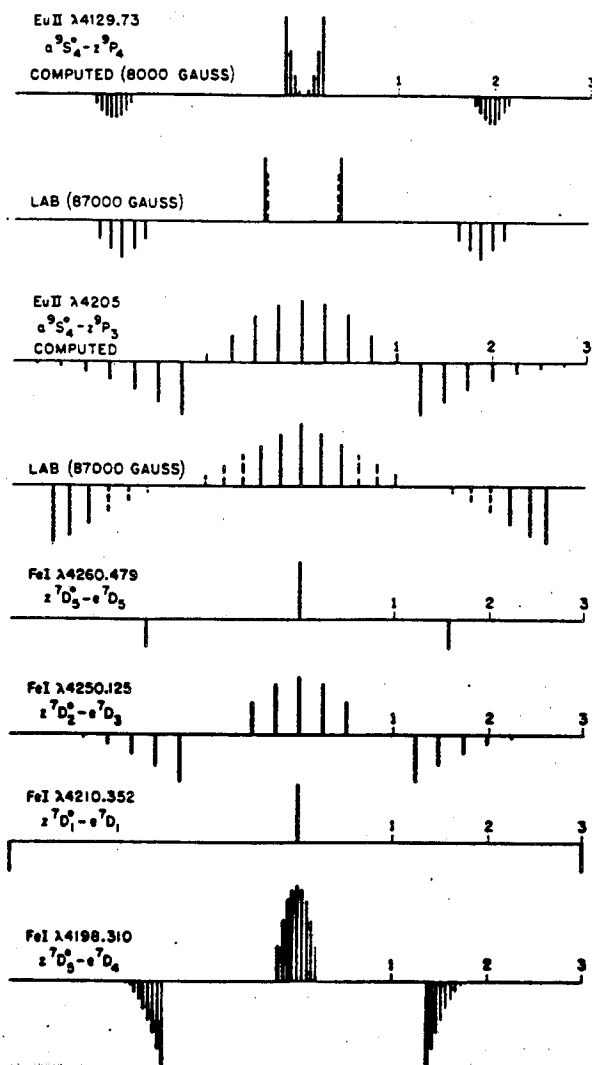
Η μετατόπιση σε μήκος κύματος για την κανονική τριπλέτα είναι αντίστοιχα:

$$\Delta\lambda = + 4.57 \times 10^{-13} \text{ \AA}^2 \text{ Angstrom}$$

Οι μετατοπισμένες συνιστώσες του σχηματισμού τριπλέτας ενεργειακών σταθμών Zeeman, οι οποίες ονομάζονται συνιστώσες σ είναι κυκλικά πολωμένες σε αντίθετες φορές όταν παρατηρούνται στην κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου (το διαμήκες φαινόμενο), ενώ η μη μετατοπισμένη π -συνιστώσα, απουσιάζει. Στο εγκάρσιο φαινόμενο, από την άλλη μεριά, οι σ συνιστώσες είναι γραμμικά πολωμένες κάθετα προς το πεδίο, και το άθροισμα των εντάσεων τους ισούται προς την ένταση της συνιστώσας π , η οποία είναι γραμμικά πολωμένη παράλληλα προς το πεδίο. Σε πιο πολύπλοκους σχηματισμούς, οι σ και π συνιστώσες χωρίζονται σε ομάδες οι οποίες παρουσιάζουν ίδια χαρακτηριστικά πόλωσης. ορισμένες αντιπροσωπευτικές εικόνες σχηματισμών σταθμών Zeeman φαίνονται στο Σχ.9.10.

9.5 Επίδραση φαινομένου Zeeman σε Αστρικά φασματά.

Για την μελέτη μαγνητικών πεδίων σε άστρα πρέπει να ληφθούν υπ όψη πρόσθετοι παράγοντες που κάνουν τα φάσματα των άστρων αρκετά πολύπλοκα ώστε να προκαλούνται πρόσθετα συστηματικά σφάλματα πέραν δηλαδή των σφαλμάτων που αφορούν την ευαισθησία της μεθόδου Zeeman. Ετσι, π.χ., μια σημαντική δυσκολία μπορεί να προκληθεί από μια διαπλάτυση των φασματικών γραμμών που οφείλεται στην μεταφορική κίνηση των ατόμων με συγκεκριμένη ταχύτητα και είναι γνωστή ως διαπλάτυση Doppler. Η διαπλάτυση αυτή συχνά είναι μεγαλύτερη από την μετατόπιση Zeeman με αποτέλεσμα οι σχηματισμοί Zeeman να μην μπορούν να αναλυθούν πειραματικά. Ξαν παράδειγμα ας θεωρήσουμε τυπικές μετρήσεις μαγνητικών πεδίων σε άστρα που είναι της τάξης των 5000 Gauss. Μολονότι αυτά θεωρούνται ισχυρά πεδία, η μετατόπιση Zeeman προκύπτει ότι είναι της ίδιας τάξης μεγέθους της μετατόπισης Doppler λόγω περιστροφής του άστρου γύρω από άξονα κλπ.



Σχήμα 9.10 Εικόνες Zeeman από το : Astronomical Techniques Hiltner,
The University of Chicago Press.

9.6 Το μόριο το Υδρογόνου .

Στο εδάφιο αυτό προσπαθούμε να επεκτείνουμε το παράδειγμα της μελέτης του ατόμου του Υδρογόνου. Πρώτα πρέπει να εξηγηθεί πως τα άτομα δένονται μεταξύ τους για να σχηματίζουν μόρια. Ετσι θα περιορισθούμε σε μια εισαγωγική μελέτη του λεγόμενου ομοιοπολικού δεσμού. Θα δούμε ότι αυτός ο δεσμός καθίσταται δυνατός λόγω φαινομένων που εμφανίζονται ειδικά στην

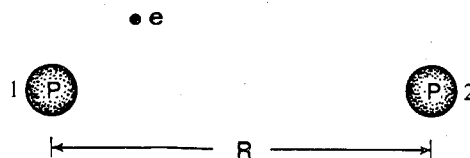
κβαντική φυσική, όπως το φαινόμενο σύραγγας. Θα περιγράψουμε πρώτα την πιο απλή περίπτωση: το ιονισμένο μόριο του υδρογόνου.

(α) Ιονισμένο Μόριο του Υδρογόνου.

Τι είναι εκείνο που συγκρατεί τα δύο πρωτόνια στο μόριο του ιονισμένου υδρογόνου, αφού αυτά αποθούνται μεταξύ τους με δυνάμεις Coulomb; Στο Σχ.9.1 βλέπουμε το ηλεκτρόνιο, που φαίνεται σαν προσαρτημένο στο πρωτόνιο υπ' αριθμό 1. Η πρόταση αυτή είναι σωστή μόνο αν το R είναι πολύ μεγαλύτερο από τον "άκτινα Bohr" στο άτομο του υδρογόνου. Τότε η κυματοσυνάρτηση του συστήματος θα είναι

$$\Psi_1(\text{Prot.1} + \text{elect}) \cdot \Psi(\text{Prot2})$$

Αν όμως η απόσταση R φανταζόμαστε μικραίνει βαθμιαία, τότε λόγω της αρχής της αβεβαιότητας (ή του φαινομένου σύραγγας), το ηλεκτρόνιο μπορεί να μεταπηδά από μια κατάσταση στην άλλη και έτσι τότε να "ανήκει" στο πρωτόνιο 1, ποτέ στο άλλο.



Σχήμα 9.11 Σχηματική παράσταση του ιονισμένου μόριου του Υδρογόνου.

Αν λοιπόν $\Psi(r-r_1)$ και $\Psi(r-r_2)$ είναι οι κυματοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις δύο δυνατές καταστάσεις του ηλεκτρονίου, τότε αυτές δεν είναι κυματοσυναρτήσεις στάσιμων καταστάσεων.

Ας γράψουμε λοιπόν την Χαμιλτονιανή του συστήματος

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|r-r_1|} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|r-r_2|} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Η επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών θα πρέπει να δώσει ενεργειακές σταθμές που να συμφωνούν με το πείραμα.

(β) Μόριο του H_2^+

Η κβαντική περιγραφή ακόμη και του απλούστερου μορίου όπως το μόριο το H_2 είναι εξαιρετικά πολύπλοκη και στην πραγματικότητα δεν δίνεται από αναλυτική μορφή. Το μόριο του H_2 είναι ένα σύστημα τεσσάρων σωματιδίων,

δύο ηλεκτρόνια και δύο πρωτόνια και συνεπώς το πρόβλημα δεν θα είχε αναλυτική λύση ακόμη και αν το σύστημά μας θεωρείτο κλασσικό. Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να προσεγγίσουμε πρώτα ποιοτικά το πρόβλημα και στη συνέχεια ας δούμε τις προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης του ενδιαφέροντος αυτού προβλήματος.

(γ) Ιονικός και Μοριακός δεσμός.

Το πρώτο είδος μορίου το οποίο μπορούμε να καταλήξουμε σε ποσοτικές εκτιμήσεις είναι εκείνο του KCl , το οποίο αντιστοιχεί σε ιοντικό δεσμό. Πειραματικά μπορούμε με διάφορους τρόπους να μετρήσουμε την ενέργεια διασπασης, η οποία απαιτείται ώστε το μόριο να μετατραπεί σε δύο ανεξάρτητα άτομα K , Cl σε "άπειρη" απόσταση.

Εφόσον απαιτείται να δώσουμε μια ενέργεια στο μόριο αυτό για να διαχωριστεί σε K και Cl , τούτο σημαίνει ότι το μόριο KCl έχει μια αρνητική δυναμική ενέργεια, και επομένως συγκρατείται μέσω ενός ελκτικού δεσμού. Θα δείξουμε ότι η δομή αυτή είναι ευσταθής και θα υπολογίσουμε την ενέργεια E_s . Εστω E η ολική ενέργεια του συστήματος των δύο ατόμων, και ας ορίσουμε $E=0$ την ενέργεια όταν τα δύο άτομα βρίσκονται σε άπειρη μεταξύ τους απόσταση.

Ας θεωρήσουμε έναν τρόπο δημιουργίας μορίου KCl ως εξής:

Πρώτο βήμα είναι διατηρώντας την άπειρη απόσταση απομακρύνουμε ένα ηλεκτρόνιο από το άτομο K , δίνοντας του την ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να μεταφερθεί στη ζώνη ιονισμού. Απαιτείται προς τούτο 4.34 eV , που είναι η ενέργεια ιονισμού $E_{i,K}$ του καλίου. Στη συνέχεια βάζουμε το ηλεκτρόνιο αυτό στο άτομο το Cl προς δημιουργία ιόντος Cl^- . Η διαδικασία αυτή όπως αποδεικνύεται πειραματικά μας δίνει πίσω 3.82 eV . Άρα στη συνολική διαδικασία ιονισμού του K και του Cl ουσιαστικά προσφέρουμε καθαρό ποσό ενέργειας 0.52 eV . Το επόμενο βήμα είναι να θεωρήσουμε ότι προσεγγίζουμε τα δύο ιόντα ώστε από το άπειρο να φτάσουν σε κάποια θέση ισορροπίας. Αναμένουμε ότι θα υπάρχει κάποια θέση ισορροπίας για τον εξής λόγο. Όσο η απόσταση των ιόντων είναι μεγάλη υπάρχει ένα ελκτικό δυναμικό, επειδή ουσιαστικά έχουμε δύο κατανομές με αντίθετα φορτία. Καθώς η απόσταση R μεταξύ των δύο ιόντων γίνεται αρκετά μικρή ώστε οι ηλεκτρονικές κατανομές των δύο αυτών ατόμων να έχουν μια μερική επικάλυψη, τότε συμβαίνουν τα εξής δύο πράγματα. 1ο επειδή οι φλοιοί $n=3$ αρχίζουν να επικαλύπτονται μερικά από τα ηλεκτρόνια πρέπει να

μεταβούν σε υψηλότερες κβαντικές καταστάσεις όπως οι 3d ή 4s. Αν τούτο δεν συνέβαινε θα είχαμε περισσότερα από ένα ηλεκτρόνια σε κάθε κβαντική κατάσταση που δεν επιτρέπεται από την απαγορευτική αρχή του Pauli όπως θα δούμε πιο κάτω. Όταν όμως ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια ανεβαίνουν σε μια από τις ανώτερες μη κατειλημμένες στάθμες μεγαλώνει και η ενέργεια του συστήματος σαν σύνολο.

Επομένως η αρχή του Pauli έχει σαν συνέπεια οίονει απωστική ενέργεια, που αυξάνει γρήγορα καθώς τα ιόντα αρχίζουν να διεισδύουν το ένα μέσα στο άλλο. Τούτο φαίνεται στο Σχ.9.11.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι ενώ όταν $R \rightarrow \infty$ τα δύο ιόντα βρίσκονται σε καθαρές ιδιοκαταστάσεις. Π.χ το K^+ μπορεί να βρίσκεται σε κατάσταση 3p. Όταν όμως το R γίνεται πολύ μικρό, η κυματοσυνάρτηση αρχίζει να παραμορφώνεται και έτσι η κατάσταση 3p του K^+ παύει να περιγράφει το ιόν. Η κυματοσυνάρτηση του ιόντος μπορεί π.χ. να είναι της μορφής $\psi = \alpha\psi_{3p} + \beta\psi_{4s}$, όπου το $|\alpha|^2/|\beta|$ μικραίνει όσο το R μικραίνει. όσο λοιπόν η επικάλυψη γίνεται μεγαλύτερη, τόσο η κυματοσυνάρτηση περιγράφεται από καταστάσεις ανώτερης ενέργειας και επομένως η ενέργεια στο Σχ. 9.1 αυξάνει κατά συνεχή τρόπο καθώς το R ελαττώνεται.

Ενας πρόσθετος λόγος της ύπαρξης απωστικής δύναμης μεταξύ των δύο ιόντων για πολύ μικρά R είναι το απωστικό δυναμικό Coulomb μεταξύ των δύο πυρήνων, αλλά η συνεισφορά του στην ολική ενέργεια είναι ανεπαίσθητη εκτός της περίπτωσης πολύ ελαφρών μορίων.

Μολονότι ο ακριβής υπολογισμός της μορφής της καμπύλης απωστικής ενέργειας $E_{\text{απ}}$ είναι αρκετά πολύπλοκος, φαίνεται από το Σχ.9.1 ότι το $E_{\text{απ}}$ αυξάνει ταχύτατα όταν το P μικραίνει πέραν του $R = 2.8 \text{ \AA}$ και συνεπώς η συνολική ενέργεια, δηλαδή το άθροισμα της ελκτικής και απωστικής ενέργειας που περιγράψαμε έχει ένα ελάχιστο. Πρέπει να σημειωθεί ότι για R περίπου στη θέση ευσταθούς ισορροπίας R_0 οι κυματοσυναρτήσεις των ατόμων έχουν ήδη κάποια παραμόρφωση ο υπολογισμός της ηλεκτροστατικής ελκτικής ενέργειας δεν εισαγάγει σημαντικό σφάλμα λόγω της μικρής σχετικά επικάλυψης των κυματοσυναρτήσεων των δύο ατόμων.

Για το KCl είναι $R_0 = 2.79 \text{ \AA}$ (από πειράματα περίθλασης ηλεκτρονίων). Έτσι, το ενεργειακό ισοζύγιο, όπως προκύπτει από το Σχ.9.1 δίνει

Η ενέργεια διάσπασης E_s μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά από φυσικοχημικά πειράματα ή από πειράματα μοριακής φασματοσκοπίας.

Προκύπτει $E_s = -4.40 \text{ eV}$. Έτσι η (9.2) δίνει

$$E_{\delta} = (E_{\text{αποστ.}})_{R_0} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0} + 0.52 \text{ eV}$$

$$E_{\text{αποστ. Pauli}} = (-4.40 + 5.16 - 0.52) \text{ eV} = 0.24 \text{ eV}$$

Ο υπολογισμός αυτός αμελεί την ύπαρξη της ελκτικής ενέργειας Van der Waals, διότι απλά αυτή αυξάνει το E_{δ} κατά μερικά δέκατα του ενός eV. Η συνεισφορά όμως αυτή υπάρχει και θα την δούμε πιο αναλυτικά στην περίπτωση του δεσμού στερεών ευγενών αερίων.

9.7 ΑΤΟΜΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΑ.

Μας ενδιαφέρει η δομή και η φασματική συμπεριφορά των ατόμων με περισσότερα του ενός ηλεκτρόνια για λόγους πρακτικούς όπως είναι η δυνατότητα εκπομπής ακτινών X, καθώς και για λόγους θεωρητικούς μια και απαιτείται όπως θα δούμε επέκταση της βασικής θεωρίας του Schrodinger με την εισαγωγή της αρχής του Pauli για την ερμηνεία της συμπεριφοράς των ατόμων αυτών.

Επίσης η εξίσωση του Schrodinger έχει λυθεί ακριβώς για τα άτομα του Υδρογόνου και του Ηλίου, ενώ για τα άτομα με πολλά ηλεκτρόνια, η Κ.Ε.Σ. δεν μπορεί να λυθεί ακριβώς λόγω των πολύπλοκων μαθηματικών διαφορικών εξισώσεων.

Η αρχή του Pauli

Σε ένα άτομο με πολλά ηλεκτρόνια οι στάσιμες καταστάσεις περιγράφονται από συντεταγμένες των πανομοιότυπων ηλεκτρονίων των. Οι συντεταγμένες του καθενός ηλεκτρονίου είναι οι τρεις συντεταγμένες (r , θ και ϕ), και ο κβαντικός αριθμός του σπιν m_s ο οποίος μπορεί να έχει δύο ιδιοτιμές $m_s = +1/2$ ή $m_s = -1/2$. Όπως όμως έχουμε δει στην κβαντική φυσική η κατάσταση ενός ηλεκτρονίου που βρίσκεται δέσμιο σε ένα άτομο περιγράφεται πλήρως με την βοήθεια το συνόλου των κβαντικών αριθμών n , l και m_l . Οι τρεις αυτοί αριθμοί δίνουν την μέγιστη δυνατή πληροφορία σχετικά με τις συντεταγμένες x , y και z του ηλεκτρονίου. Συνεπώς η κατάσταση ενός ηλεκτρονίου σε ένα άτομο καθορίζεται από την τετράδα των κβαντικών αριθμών n , l , m_l και m_s (n, l, j, m_j).

Τώρα όμως προβάλλει το ερώτημα αν δύο ηλεκτρόνια στο ίδιο άτομο είναι δυνατόν να βρίσκονται στην ίδια ακριβώς κατάσταση. Η κβαντική φυσική

όπως διατυπώθηκε με την εξίσωση του Shrodinger δεν δίνει από μόνη της απάντηση στο ερώτημα αυτό. Απάντηση δόθηκε το 1925 από τον Pauli, οποίος βασιζόμενος σε πειραματικές ενδείξεις κατέληξε στο συμπέρασμα ότι δεν είναι δυνατόν δύο ηλεκτρόνια να καταλαμβάνουν τις ίδια κβαντική κατάσταση. Αυτό το συμπέρασμα είναι γνωστό ως η απαγορευτική αρχή του Pauli. Αυτή η αρχή διατυπώνεται και ως εξής:

Δεν είναι δυνατόν σε ένα άτομο να έχουμε δύο ηλεκτρόνια με ταυτόσημες τιμές για το σύνολο των κβαντικών αριθμών (n, l, m_l, m_s) ή (n, l, j, m_j) .

Όμως τι είδους πειραματικές παρατηρήσεις οδήγησαν τον Pauli στο συμπέρασμά του αυτό; Ας θεωρήσουμε τι θα περιμέναμε να παρατηρήσουμε από ένα άτομο όπου δύο ηλεκτρόνια του δεν ικανοποιούσαν την αρχή του Pauli. Τότε δύο ηλεκτρόνια της βασικής κατάστασης θα μπορούσαν να είχαν π.χ. κβαντικό αριθμό $m_s = +1/2$ και συνεπώς αν οι υπόλοιποι κβαντικοί αριθμοί τους ήταν $n=1, l=0, m_l=0$, τότε η ολική τιμή του σπιν στη βασική κατάσταση θα ήταν μονάδα. Εξ άλλου αν ένα ηλεκτρόνιο είναι σε κατάσταση $m_s = 1/2$, και ένα άλλο στην $m_s = -1/2$, τότε η ολική τιμή της στροφορμής σπιν ατόμου του Ηλίου θα ήταν ίση με μηδέν. Το πείραμα δείχνει ότι οι παρατηρούμενες μεταπτώσεις προς και από την βασική κατάσταση στο άτομο του Ηλίου αντιστοιχούν σε ολική στροφορμή σπιν ίση με μηδέν και όχι ίση προς ένα. Ετσι επιβεβαιώνεται στην περίπτωση αυτή η αρχή του Pauli. Τι συνέπεια έχει η αρχή αυτή ως προς τις ιδιότητες των κυματοσυναρτήσεων που περιγράφουν ένα σύστημα με δύο ηλεκτρόνια όπως εκείνο του ατόμου του Ηλίου;

Η συνολική κυματοσυνάρτηση ενός τέτοιου συστήματος, αν αμελήσουμε την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο αυτών ηλεκτρονίων θα μπορούσε να γραφεί σαν γινόμενο των κυματοσυναρτήσεων του καθενός από τα δύο ηλεκτρόνια:

$$\Psi_T(x_1, \dots, z_2) = \Psi(x_1, y_1, z_1) \cdot \Psi(x_2, y_2, z_2)$$

όπου οι $\Psi(x_1, y_1, z_1)$ και $\Psi(x_2, y_2, z_2)$ ικανοποιούν της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωση του Schrodinger. Η καθεμία από τις κυματοσυναρτήσεις αυτές απαιτεί τρεις κβαντικούς αριθμούς που αντιστοιχούν στον καθορισμό της μαθηματικής μορφής της εξάρτησης από τις τρεις αυτές συντεταγμένες. Απαιτείται όμως και ένας ακόμη κβαντικός αριθμός για την περιγραφή του σπιν του σωματιδίου.

Ετσι μπορούμε να περιγράψουμε τα δύο σωματίδια με δείκτες α και β για το σύνολο των τεσσάρων κβαντικών αριθμών του καθενός από τα δύο σωματίδια υπαριθμό 1, και 2. Ετσι η κυματοσυναρτήσεις των δύο σωματιδίων μπορούν

να περιγραφούν σαν $\psi_\alpha(1)$ και $\psi_\beta(2)$.

Ετσι είναι $\psi_T(x_1, \dots, z_2) = \psi_\alpha(1) \cdot \psi_\beta(2)$.

Ωστόσο είναι δυνατόν αν εναλλάξουμε τα δύο σωματίδια ώστε το υπαριθμόν 1 να πάρει το σύνολο των κβαντικών αριθμών β και το 2 το σύνολο των κβαντικών αριθμών α . Επειδή τα δύο σωματίδια είναι πανομοιότυπα, η αλλαγή αυτή δεν πρέπει να έχει επίπτωση στα παρατηρήσιμα μεγέθη. Ένα τέτοιο είναι η πυκνότητα πιθανότητας.

$$\psi_T^* \psi_T = \psi_\alpha^*(1) \psi_\beta^*(2) \psi_\alpha(1) \psi_\beta(2)$$

Ετσι η ποσοτητα αυτή θα πρέπει να ισούται με την

$$\psi_\beta^*(1) \psi_\alpha^*(2) \psi_\beta(1) \psi_\alpha(2)$$

σύμφωνα με την παραδοχή ότι τα σωματίδια είναι πανομοιότυπα. Τούτο όμως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δεν είναι δυνατόν, διότι η $\psi_\alpha(1)$ υπολογίζεται στις θέσεις x, y, z . Ετσι η εναλλαγή των δεικτών των σωματιδίων πράγματι αλλάζει την συναρτηση κατανομής πιθανότητας. Για τον λόγο αυτό καταλήγουμε στο ότι τόσο η $\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)$ και $\psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)$ δεν είναι κατάλληλες για την σωστή περιγραφή του συστήματος δύο σωματιδίων.

Υπάρχει όμως ένας τρόπος, ορθότερος, για την περιγραφή, ο οποίος έχει την αποδεκτή ιδιότητα ώστε η εναλλαγή των δύο σωματιδίων, να οδηγεί στην ίδια τιμή της πυκνότητας πιθανότητας. Αυτός είναι όταν πάρουμε συνδυασμό που δίνει συμμετρικές ή αντισυμμετρικές συναρτήσεις:

$$\psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) + \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)] \quad (\alpha)$$

και

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) - \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)] \quad (\beta)$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ένα σύστημα που περιέχει αρκετά ηλεκτρόνια πρέπει να περιγράφεται από αντισυμμετρική ολική κυματοσυνάρτηση.

Πράγματι από την κυματοσυνάρτηση (β) προκύπτει η πιθανότητα τα δύο ηλεκτρόνια να βρίσκονται και τα δύο σε καταστάσεις που περιγράφονται από το ίδιο σύνολο κβαντικών αριθμών, δηλαδή $\alpha=\beta$:

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_\alpha(1)\psi_\alpha(2) - \psi_\alpha(1)\psi_\alpha(2)] = 0$$

Δηλαδή βρίσκουμε πιθανότητα μηδέν, όπως ακριβώς προβλέπει η απαγορευτική αρχή του Pauli. Αντίθετα η συμμετρική ολική κυματοσυνάρτηση (α) δεν οδηγεί σε μηδενισμό της πυκνότητας πιθανότητας όταν τα δύο σωματίδια του συστήματος βρίσκονται στο ίδιο σύνολο κβαντικών αριθμών. Ανάλογη συμπεριφορά, σαν τα ηλεκτρόνια, παρουσιάζουν και συστήματα από πείραμα. Αντίθετα, τα φωτόνια, τα μεσόνια, συστήματα από άτομα Ηλίου πρέπει να περιγράφονται από συμμετρικές κυματοσυναρτήσεις όπως δείχνει το πείραμα. Αποδεικνύεται ότι τα σωματίδια αυτά έχουν ακέραια τιμή του κβαντικού αριθμού του Spin. Τα ηλεκτρόνια, πρωτόνια, νετρόνια κλπ. έχουν ημιακέραια τιμή του Spin. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει πολύ συγκεκριμένη σχέση μεταξύ του spin και τις συμμετρίας της συνολικής κυματοσυνάρτησης. Δεν θα επεκταθούμε όπως παραπάνω στο ενδιαφέρον αυτό θέμα.

9.8 Υπεραγωγιμότητα.

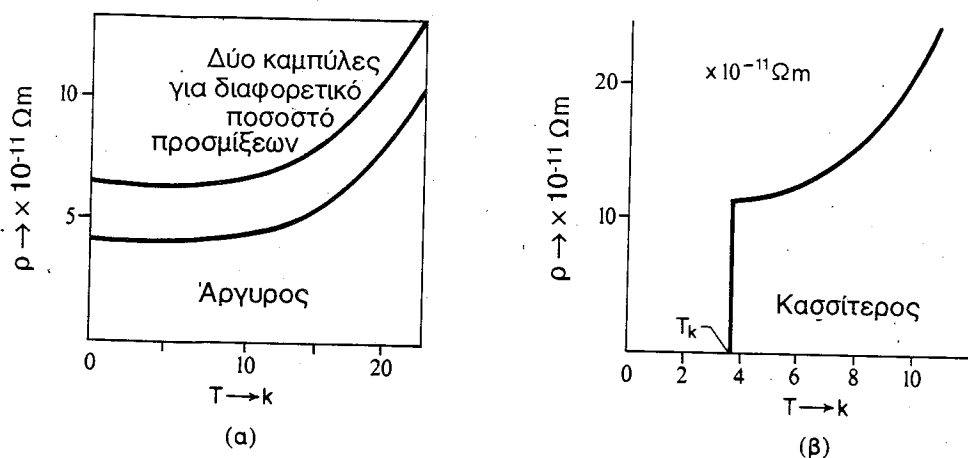
Η υπεραγωγιμότητα γενικά αναφέρεται στην ιδιότητα πολλών υλικών να παρουσιάζουν απότομα μηδενική ηλεκτρική αντίσταση μόλις η θερμοκρασία τους κατέρχεται κάτω από μια κρίσιμη θερμοκρασία T_c . Το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας μολονότι ανακλύφθηκε το 1911 από τον Kamerlingh-Onnes αποτελεί και σήμερα ένα ερευνητικό πεδίο εντόνου ενδιαφέροντος. Η βασική θεωρητική του ερμηνεία δόθηκε με τη θεωρία των Bardeen, Cooper, και Schriffner, (αποκαλείται θεωρία BCS από τα αρχικά του επίθετου των ερευνητών αυτών) και με αυτή έγινε δυνατό να ερμηνευθούν πολύ ικανοποιητικά η μεγάλη ποικιλία των πειραματικών δεδομένων που σχετίζονται με την υπεραγωγιμότητα.

Το έτος όμως 1987 μπορεί να θεωρηθεί ως οριακό έτος για φαινόμενα της υπεραγωγιμότητας, αφού αναπτύχθηκαν υλικά που παρουσιάζουν υπεραγωγιμότητα σε κρίσιμη θερμοκρασία 98°K , η οποία είναι υψηλότερη από τη θερμοκρασία υγροποίησης του αζώτου (θερμοκρασία μετατροπής από στερεά σε υγρή φάση).

Οι εξελίξεις αυτού του είδους που συμβαίνουν μέσα σε ένα κλίμα εντονότατης ερευνητικής δραστηριότητας τους τελευταίους μήνες, προδικάζουν τεράστιες και απρόβλεπτες δυνατότητες τεχνολογικών εφαρμογών. Ας περιγράψουμε λοιπόν πρώτα τα βασικά πειραματικά δεδομένα της υπεραγωγιμότητας.

Η πειραματική καμπύλη της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης σαν συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας δίνεται στο Σχ.9.12 α,β για δύο υλικά: Αργυρο, ο οποίος δεν παρουσιάζει το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας, και κασσίτερο,

ο οποίος όπως παρατηρούμε παρουσιάζει υπεραγωγιμότητα σε θερμοκρασία ελαφρώς μικρότερη των 4_0 K.



Σχήμα 9.12 α,β Ειδικές αντιστάσεις μετάλλων σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας. Δεδομένα από W.J. de Haas, et al, Physica 2, 453(1935) a 3, 440(1936).

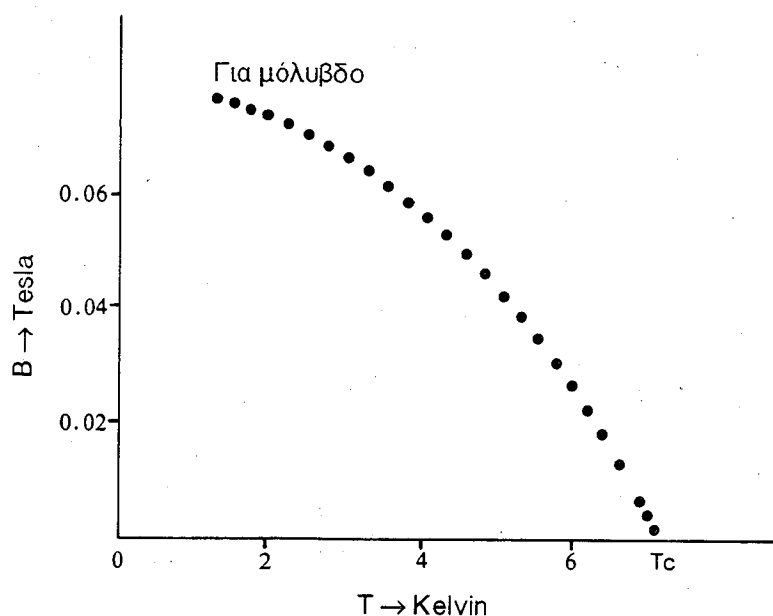
Το ρ παραμένει ακριβώς μηδέν σ'έναν υπεραγωγό αν $T < T_k$, ακόμη και όταν υπάρχει μεγάλο ποσοστό προσμίξεων. Παρουσιάζεται δηλαδή ένα ηλεκτρικό ρεύμα, που επιμένει να διαρρέει τον υπεραγωγό εφόσον $T < T_k$. Η ύπαρξη του ρεύματος αυτού και της σταθερότητάς του παρατηρείται πειραματικά μετρώντας το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί. Τέτοια ρεύματα έχει παρατηρηθεί να εξακολουθούν να υπάρχουν επί έτη: Υπάρχουν και πρόσθετα φαινόμενα που συνδέονται με την υπεραγωγιμότητα, εκτός εκείνου του μηδενισμού της ηλεκτρικής αντίστασης. Ένα εντυπωσιακό φαινόμενο είναι το φαινόμενο Meissner: Τούτο συνίσταται στον πλήρη μηδενισμό της μαγνητικής ροής στο εσωτερικό ενός υπεραγωγού. Τούτο δεν σημαίνει ότι λόγω υπεραγωγίμου ρεύματος το ρεύμα περιορίζεται πάνω στην εξωτερική

επιφάνεια του μετάλλου διότι κάτι τέτοιο έρχεται σε αντίθεση με τις εξισώσεις του Maxwell: Το φαινόμενο Meissner ο μηδενισμός της αντίστασης φαίνεται ότι αποτελούν δύο διαφορετικές εκδηλώσεις του φαινομένου της υπεραγωγιμότητας. Ανάλογα πράγματα συμβαίνουν και με όλες τις άλλες ιδιότητες που εξαρτώνται από την κίνηση ηλεκτρονίων της ζώνης αγωγιμότητας φαίνεται να αλλάζουν όταν το υλικό γίνεται υπεραγωγός. Π.χ. τούτο συμβαίνει με τη θερμική αγωγιμότητα, τα θερμοηλεκτρικά φαινόμενα κλπ. Η συνολική μεταβολή των ιδιοτήτων του υλικού υποδεικνύει κάποιας μορφής μεταβολή φάσης, η αλλιώς μια ποιοτική μεταβολή στην ηλεκτρονική δομή χωρίς αυτή να συνοδεύεται με ουσιαστική μεταβολή ενέργειας ή εντροπίας μεταξύ των δύο αυτών καταστάσεων. Η θερμοκρασία μετάβασης T_c σε υπεραγωγιμότητα επηρεάζεται και από το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στο οποίο βρίσκεται το υλικό. Τα σχετικά πειραματικά δεδομένα φαίνονται στο Σχ.9.13. Τα δεδομένα αυτά μπορούν να προσαρμοστούν πολύ ικανοποιητικά σε μια συνάρτηση $B = \text{σταθ.}_1 (1 - T^2 / \text{σταθ.}_2^2)$. (2). Για διαφορετικό υπεραγωγίμο υλικό η τιμή T_c και η τιμή $\text{σταθ.}_1 = B_0 = \mu_0 H_{\text{κρίσιμο}}$ είναι διαφορετική, αλλά η συμπεριφορά των δεδομένων εξακολουθεί να περιγράφεται πολύ ικανοποιητικά από την εκφραση (2).

Ένα άλλο ενδιαφέρον φαινόμενο που συνδέεται με την υπεραγωγιμότητα και συμβάλλει στην θεωρητική κατανόησή της είναι το λεγόμενο ισοτοπικό φαινόμενο. Τούτο συνίσταται στο ότι η θερμοκρασία T_c για μέταλλο δεδομένου ατομικού αριθμού εξαρτάται από την ισοτοπική μάζα M του πυρήνα. Η εξάρτηση αυτή έχει τη μορφή $T_c M^{-1/2}$. Τούτο υποδεικνύει ότι η αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων-φωτονίων παίζει σημαντικό ρόλο στην υπεραγωγιμότητα.

Η θεωρητική εξήγηση της υπεραγωγιμότητας, που οφείλεται στους Bardeen, Cooper και Schrieffer είναι αρκετά πολύπλοκη. Μπορούμε όμως να σκιαγραφήσουμε τα βασικότερα σημεία της. Πολλά ηλεκτρόνια αγωγιμότητας φαίνεται ότι συνεργάζονται, δηλαδή αλληλεπιδρούν ασθενικά μεταξύ τους, ενώ τα φωνόνια παίζουν το ρόλο του μεσάζοντα στη συνεργασία αυτή (ή όπως λένε το ρόλο του αμοιβαίου φίλου). Έτσι, όταν ένα ηλεκτρικό ρεύμα ρέει στον αγωγό, τα ηλεκτρόνια κινούνται εν γένει από τη μια κενή θέση (κατάσταση) στη ζώνη αγωγιμότητας σε μια επόμενη. Τα ηλεκτρόνια στους κανονικούς αγωγούς έχουν ασθενή σύζευξη μεταξύ τους και έτσι μπορούν να χάσουν (το καθένα από αυτά) ορμή λόγω συγκρούσεων με άλλα ηλεκτρόνια. Αντίθετα, στην υπεραγωγιμή κατάσταση έχουμε μια κβαντική κατάσταση στην οποία σε μεγάλη κλίμακα οι κινήσεις όλων των ηλεκτρονίων στη ζώνη αγωγιμότητας γίνονται

με τέτοιο τρόπο ώστε να μηδενίζεται η σχετική κίνηση όλων των ηλεκτρονίων:



Σχήμα 9.13 Μεταβολή της απόλυτης θερμοκρασίας στην οποία παρουσιάζεται υπεραγωγικότητα σαν συνάρτηση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου στο οποίο βρίσκεται το υλικό.

Σε χαμηλή θερμοκρασία, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια ενός μετάλλου δεν συμπεριφέρονται σαν ξεχωριστά σωματίδια, αλλά σχηματίζουν ζεύγη, τα ζεύγη Cooper, καθένα από τα οποία αποτελείται από ένα ηλεκτρόνιο με σπιν $+1/2$ και ένα ηλεκτρόνιο με σπιν $-1/2$. Έτσι συνολικά το ζεύγος των ηλεκτρονίων έχει σπιν μηδέν. Συμπεριφέρεται δηλαδή σαν μποζόνιο. Τα μποζόνια δεν υπόκεινται στην απαγορευτική αρχή του Pauli. Έτσι πολλά μποζόνια μπορούν να βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση και να περιγράφονται από την ίδια κυματοσυνάρτηση. Σε έναν κοινό κρυστάλλο η αντίσταση στη δίοδο του ηλεκτρικού ρεύματος είναι αποτέλεσμα της μεταβίβασης ορμής, από τα ηλεκτρόνια στα ιοντα του κρυστάλλου στη διάρκεια συγκρούσεων. Για να μεταβληθεί η ορμή όλων των ζευγών των ηλεκτρονίων θα χρειαζόταν, επομένως πολύ μεγαλύτερη ενέργεια, αφού η ορμή πρέπει να

αλλάξει ταυτόχρονα σε κίνηση τα ζεύγη λοιπόν ένα ηλεκτρικό πεδίο θέσει σε κίνηση τα ζεύγη Cooper, το ρεύμα που δημιουργείται δεν μπορεί πια να σταματήσει.

Για να συμβεί η υπεραγώγιμη κατάσταση πρέπει η αλληλεπίδραση που κλειδώνει μεταξύ τους τα ηλεκτρόνια σε έλξη ηλεκτρονίου-ηλεκτρονίου μέσω του "αμοιβαίου φίλου" φωνονίου να υπερβαίνει την κανονική άπωση ηλεκτρονίου-ηλεκτρονίου (ηλεκτροστατική). Έτσι τα κύρια κριτήρια υπεραγωγιμότητας είναι μια μεγάλη αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου-φωνονίου και μεγάλη ισοτοπική μάζα. Η θεμελιώδης κατάσταση απαρτίζεται από συζευγμένα ζεύγη ηλεκτρονίων αντίθετου σπιν και αντίθετες ορμές: Οι ορμές μπορεί να είναι ίσου μεγέθους (μηδέν ρεύμα) ή ελαφρά διαφορετικού (μηδενική ορμή, δηλ. υπεραγώγιμο ρεύμα). (βλ. Σχήμα 9.14).

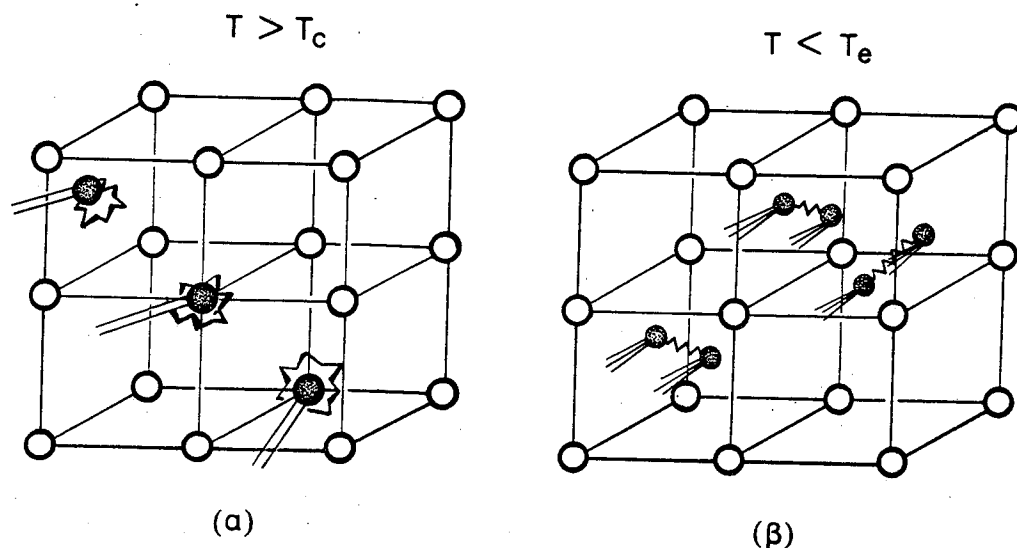
Υπεραγωγοί με υψηλά T_c

Από έτος 1987, συνέβησαν ραγδαίες εξελίξεις στα πειραματικά δεδομένα της υπεραγωγιμότητας. Έχουν κατασκευαστεί υλικά που παρουσιάζουν υπεραγωγιμότητα σε "πολύ υψηλότερες θερμοκρασίες" από εκείνες του υγρού ήλιου. Η πρόοδος όμως άρχισε λίγο νωρίτερα.

Στο τέλος του 1986 ο Alex Muller των εργαστηρίων της IBM στη Ζυρίχη, παρουσίασε υπεραγωγιμότητα στους 30°K. Η κατά προσέγγιση σύνθεση του υλικού αυτού ήταν $La_{1.8} Ba_{0.2} CuO_4$, σύμφωνα με ανακοίνωση μιας ερευνητικής ομάδας από το Τόκιο.

Ήδη, από το 1973 ερευνητές από τα εργαστήρια της Westinghouse και Bell Labs έχουν ανεβάσει το T_c από 21 σε 23°K με τη βοήθεια φίλμς Νιοβίου-Γερμανίου. Μετά την επιτυχία του Muller γίνεται δραματική προσπάθεια τους τελευταίους μήνες με συνταρακτικά αποτελέσματα.

Μια ομάδα των Bell Labs βρήκε ότι το $La_{1.8} Sr_{0.2} CuO_{4-y}$ (όπου το y είναι απροσδιόριστο) είχε T_c περίπου 36-40°K. Μια ομάδα του Houston βρήκε ένα οξειδίο του Βαρίου που υπό υψηλή πίεση έδινε T_c ως τους 52°K. Τον Φεβρουάριο μια μικτή ομάδα από τους C.Chu και M.Wu (Alabama) ανακοίνωσε υπεραγωγιμότητα σε περίπου 90°K. Τέτοιες ανακοινώσεις υπεραγωγιμότητας εμφανίστηκαν στο Physical Review Letters των 3 Μαρτίου 1987. Η ένωση αυτή είναι σαν το Οξειδίο του La-Ba-Cu, όπου το Λανθάνιο αντικαθίσταται από το Yttrium. Ωστόσο, η κρυσταλλική δομή της ένωσης αυτής δεν έχει ακόμη προσδιοριστεί.



Σχήμα 9.14 . Παραστατική απεικόνιση της εμφάνισης ηλεκτρικής αντίστασης για $T > T_c$ (α) και του μηδενισμού της ηλεκτρικής αντίστασης για $T < T_c$ λόγω της δημιουργίας ζευγών Cooper.

Η εμφάνιση υπεραγωγιμότητας σε 90°K δηλαδή σε θερμοκρασία υψηλότερη από τη θερμοκρασία 77oK υγροποίησης του Αζώτου παρουσιάζει σημαντικότερο ενδιαφέρον τόσο από τεχνολογικής πλευράς (υπεραγωγιμοί κινητήρες, τράινα κλπ.) όσο και από πλευράς βασικής έρευνας (κατασκευής υπεραγωγιμων μαγνητών-επιταχυντές σωματιδίων).

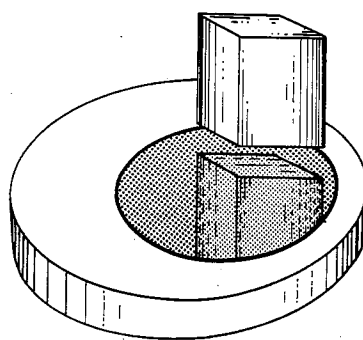
Ενα πρόβλημα που παρουσιάζεται στην υπεραγωγιμη κατάσταση είναι εκείνο των ασταθειών που έχουν σαν αποτέλεσμα την απότομη απώλεια της υπεραγωγιμότητας. Έτσι η υψηλή λανθάνουσα θερμότητα του υγρού αζώτου ($159\text{J}/\text{cm}^3$) ελλοτώνει τις αστάθειες που παρουσιάζονται. Τα νέα αυτά πειραματικά αποτελέσματα σχετικά με την υπεραγωγιμότητα είναι πολύ ενθαρρυντικά, αλλά η τεχνολογική πρόοδος που αναμένεται είναι ακόμη στο στάδιο της επιστημονικής δοξασίας. Τα νέα υλικά πρέπει να μελετηθούν από τεχνικοοικονομική σκοπιά για κάθε συγκεκριμένη εφαρμογή. Όσον αφορά την εφαρμόσιμότητα της θεωρίας BCS στα νέα υπεραγωγιμα υλικά θα πρέπει να

σημειωθεί ότι φαίνεται να υπάρχει ισχυρότερη σύζευξη στα ζεύγη Cooper. Τούτο είναι συνέπεια της ατομικής δομής των στρωματικών perovskites, όπως έχουν αποκαλέσει τις ενώσεις αυτές. Συνεπώς, πιστεύεται ότι υπάρχει ισχυρή αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου-φωνονίου. Πειραματικό ενδιαφέρον παρουσιάζει ο προσδιορισμός του μαγνητικού πεδίου στο οποίο καταστρέφεται η υπεραγωγίμη κατάσταση στα υλικά αυτά. Σύμφωνα με τη συνήθη θεωρία BCS το πεδίο στο οποίο μηδενίζεται η υπεραγωγιμότητα στους 0°K είναι 50-100 Tesla. Δεν μπορούν ακόμη να κατασκευαστούν τόσο μεγάλα συνεχή πεδία για να ελεγχθεί η πρόβλεψη της θεωρίας. Μετρήσεις από τις ομάδες MIT και Bell δίνουν τουλάχιστον 45T σε 4.2°K. Δυστυχώς η περιοχή μετάπτωσης είναι αρκετά ευρεία (περίπου 20 Tesla).

Επίδειξη υπεραγωγιμότητας.

Η υπεραγωγιμότητα, φαινόμενο που παλαιότερα μπορούσε να παρατηρηθεί μόνο με εξαιρετικά ευαίσθητες συσκευές, τώρα στα νέα υπεραγωγίμα υλικά μπορεί να παρατηρηθεί ευκολότατα. Έτσι, Στο Σχ. 9.15 ένα δείγμα από τα νέα υλικά τοποθετείται πάνω σε ένα δίσκο υπεραγωγίμου υλικού με υγρό άζωτο και πάνω από αυτό ένας μαγνήτης. επειδή οι υπεραγωγοί απωθούν τα μαγνητικά πεδία (φαινόμενο Meissner), ο μαγνήτης παραμένει μετέωρος στον αέρα.

Τα αναμενόμενα τεχνολογικά άλματα με την πρόοδο της υπεραγωγιμότητας είναι δύσκολο να τα προβλέψουμε. Ας δούμε λίγα προφανή πλεονεκτήματα. Πρώτα, η διάδοση ηλεκτρισμού. Είναι γνωστό ότι σε γραμμές μεταφοράς υψηλών τάσεων έχουμε σημαντική απώλεια ισχύος λόγω θερμότητας που παράγεται από την αντίσταση του καλωδίου χαλκού στο ηλεκτρικό ρεύμα. Αν ο ηλεκτρισμός μπορεί να σταλεί μέσω ενός υπεραγωγού καλωδίου, τότε ούτε ένα Joule ενέργειας δεν χάνεται. Έτσι η εξοικονόμηση θα ήταν τεράστια. Η έλλειψη της θερμότητας λόγω ηλεκτρικής αντίστασης θα έχει τεράστια επίπτωση στις νέες σχεδιάσεις ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ένα από τα σπουδαιότερα εμπόδια στην ανάπτυξη Η/Υ με μεγάλη υπολογιστική δύναμη ανά μονάδα όγκου είναι η σχετικά μεγάλη θερμότητα που αναπτύσσεται από τα ηλεκτρικά ρεύματα στα κυκλώματα των Η/Υ. Η υπεραγωγιμότητα μπορεί να άρει το βασικό αυτό περιορισμό στην ελάττωση του όγκου των υπολογιστικών κυκλωμάτων, χωρίς π.χ. την ανάγκη συστημάτων εξαερισμού για την απομάκρυνση της θερμότητας. Άλλες προφανείς περιοχές εφαρμογής υπεραγωγιμότητας είναι η ανάπτυξη παρά πολύ εντόνων μαγνητικών πεδίων.



Σχήμα 9.15 Ένας μονιμος μαγνητης M αιωρείται πάνω από ένα δίσκο υπεραγωγίου υλικού.

Αυτά βρίκουν πιθανώς εφαρμογές στην ιατρική διαγνωστική , μαγνητική μετακίνηση τραίνων, λειτουργία επιταχυντών σωματιδίων κ.ά.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 9.

τριδιάστατα δυναμικά

(1) Επαληθεύσετε ότι η
είναι λύση της εξίσωσης

$$\Phi(\varphi) = e^{im_e\varphi}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m_l^2\Phi$$

(2) Να βρείτε τον λόγο των ενεργειών της θεμελιώδους κατάστασης μεταξύ του μονά ιονισμένου ατόμου του ηλίου και του ουδέτερου ατόμου του υδρογόνου. Δώστε το αντίστοιχο λόγο για την n ιοστή διεγερμένη στάθμη. (Υποδ. για μεγαλύτερη ακρίβεια λάβετε υπ όψη ότι ο πυρήνας δεν είναι απείρως βαρύτερος του ηλεκτρονίου) .

(3) Σχεδιάστε γραφικά την κατανομή πυκνότητας πιθανότητας

$$P_{n_l}(r)dr \equiv |R_{n_l}|^2 r^2 dr \quad (\text{ακτινική πυκνότητα πιθανότητας})$$

α) για $n=1, l=0$,

β) για $n=2, l=1$. Εξηγήστε ποιά είναι η φυσική σημασία των προκύπτουσών κατανομών .

γ) βρείτε σε ποιά τιμή (ή τιμές) του r έχουμε την μεγαλύτερη πιθανότητα να εντοπίσουμε σε μία μέτρηση , θέσης r , το ηλεκτρόνιο (ανεξαρτήτως των θ, φ).

(4) Επαληθεύετε ότι η ιδιοσυνάρτηση Ψ_{211} , και η αντίστοιχα ιδιοτιμή E_2 , ικανοποιούν την χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση του Schrodinger:

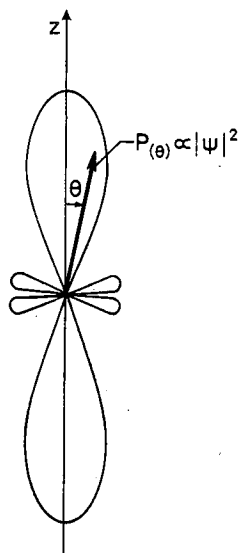
$$E_2 = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 \cdot 2^2},$$

$$\psi_{21\pm 1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Zr}{a_0} e^{-\frac{Zr}{a_0}} \sin\theta e^{\pm i\phi}$$

(Σημ. Έχει αρκετές πράξεις).

(5) Να υπολογίσετε την μεση τιμή της ακτινικής συντεταγμένης r στην θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου (δείξτε ότι $r_{10}=1.5a_0$

(6) να σχεδιάσετε σε πολικά διαγράμματα, την γωνιακή εξάρτηση (από την πολική γώνια θ) των πυκνοτήτων πιθανότητας των ψ_{321} , ψ_{322} , ψ_{430} , στο άτομο του υδρογόνου, πχ. για την κυματοσυνάρτηση ψ .



$l=3, m_l=0$

(7) Όλες οι συναρτήσεις

$$e^{im_l\phi}, e^{-im_l\phi}, \cos m_l\phi, \sin m_l\phi$$

ικανοποιούν την αζιμουθιακή

εξίσωση για την συνάρτηση $\Phi(\phi)$. Βρείτε ποιές από τις πιο πάνω συναρτήσεις είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της Z-συνιστώσας της στροφορμής, L_z . Βέβαια, βρείτε τις φυσικά αποδεκτές ιδιοσυναρτήσεις.

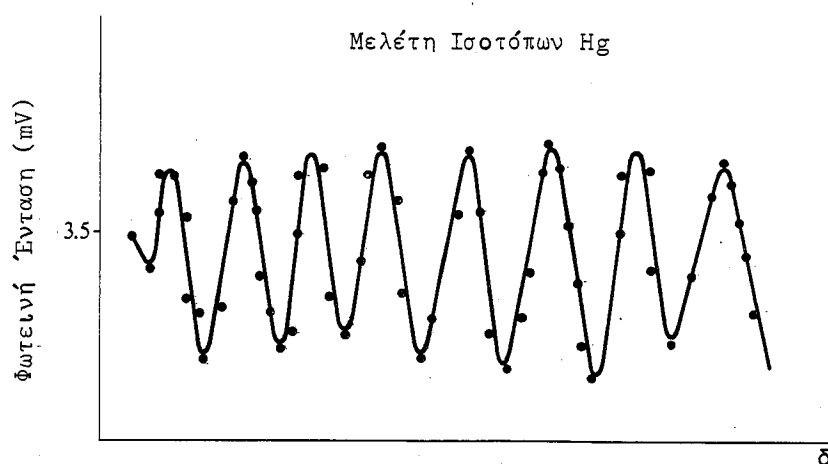
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ

Τα πειράματα του Rutherford απέδειξαν ότι ο πυρήνας δομείται από μεμονωμένα θετικά φορτία, τα πρωτόνια. Μεταγενέστερα πειράματα ανέδειξαν την ύπαρξη εντός του πυρήνα άλλων βαρέων σωματιδίων με ουδέτερο φορτίο των νετρονίων. Για τις ιδιότητες των νετρονίων θα μιλήσουμε αργότερα. Ωστόσο μπορούμε με φασματογράφους, όπως εκείνον του Dempster, να προσδιορίσουμε την μάζα του ατόμου εκάστου στοιχείου. Παρατηρήθηκαν τα εξής ενδιαφέροντα αποτελέσματα για άτομα συγκεκριμένου ατομικού αριθμού Z :

Είναι δυνατόν άτομα του ίδιου στοιχείου (δοσμένων δηλαδή χημικών ιδιοτήτων) να έχουν διαφορετική μάζα του πυρήνα. Τούτο αποδεικνύεται ότι οφείλεται στον διαφορετικό αριθμό των νετρονίων. Τα διαφορετικά αυτά άτομα που έχουν ίδιο ατομικό αριθμό, τα λέμε **ισότοπα**. Τα ισότοπα έχουν διαφορετικές μάζες. Τούτο έχει μια ανεπαίσθητη επίδραση και στην ατομική δομή των ατόμων. Η επίδραση αυτή χαρακτηρίζεται με τον όρο **υπέρλεπτη υφή** (hyperfine structure). Αυτό έχει σαν χαρακτηριστικό αποτέλεσμα την σχετική μετατόπιση των φασματικών γραμμών ισότοπων, κατά ένα μικρό κλάσμα του Angstrom. Μόνο με εξαιρετικής διακριτικής ικανότητας κατέστη δυνατόν να παρατηρηθούν οι μετατοπίσεις αυτές. Για τον λόγο αυτό, αναπτύχθηκαν όργανα μεγαλύτερης διακριτικής ικανότητας, προκειμένου να καταγραφούν οι εξαιρετικά λεπτές αυτές δομές των φασμάτων. Αυτά είναι τα συμβολόμετρα που ήδη αναφέραμε. Μια εφαρμογή των στην πράξη είναι η μέτρηση με οπτικές μεθόδους ποσοστιαίας σύστασης ισότοπων σε μια βιομηχανική διεργασία εμπλουτισμού. Ένα χαρακτηριστικό φάσμα της γνωστής γραμμής 2537\AA του

φυσικού Hg φαίνεται στο Σχ. 10.1. Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε είναι ένα συμβολόμετρο Fabry-Perot συντονιζόμενο με



Σχήμα 10.1. Φωτεινή ένταση σαν συνάρτηση της διαφοράς φάσης δ .

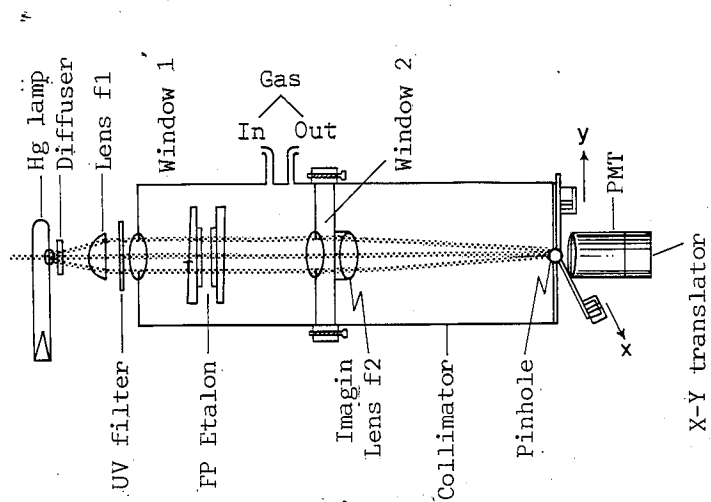
μεταβολή της πίεσης στο χώρο ανάμεσα στα κάτοπτρα, ενώ η φωτεινή πηγή είναι λάμπα φυσικού Hg χαμηλής πίεσης και φαίνεται στο Σχ. 10.2.

Η ευκρίνεια των κροσσών συμβολής είναι πολύ κατώτερη από εκείνη που θα περίμενε κανείς για μονοϊσοτοπικό άτομο. Πράγματι στο Σχ. 10.3a,b φαίνονται φωτογραφίες της ίδιας γραμμής για φυσικό μονοϊσοτοπικό Hg.

Ποσοτικά αποτελέσματα που αφορούν την σχετική συγκέντρωση ισοτόπων που προκύπτουν από φασματογράφο μάζας φαίνονται στο Σχ. 10.4.

Παρατηρούμε ότι κάθε παρουσιαζόμενη κορυφή αντιστοιχεί ένα συγκεκριμένο ισότοπο του Hg. Ωστόσο φαίνεται ότι το "εύρος γραμμής" είναι αρκετά σημαντικό και συνεπώς η ακρίβεια προσδιορισμού μάζας δεν είναι πολύ ικανοποιητική. Σε ένα φασματογράφο μάζας θα θέλαμε το εύρος γραμμής να είναι τόσο ώστε να οδηγεί σε σχετική ακρίβεια της τάξης του 10^{-6} .

Στην ακρίβεια μέτρησης ατομικών μαζών με την παραπάνω μέθοδο, πολύ σημαντικό ρόλο παίζει η καθιέρωση κάποιου **κατάλληλου** προτύπου μάζας,



Σχήμα 10.2. Πειραματική διάταξη για μέτρηση φάσματος Hg με συμβολομετρική μέθοδο.



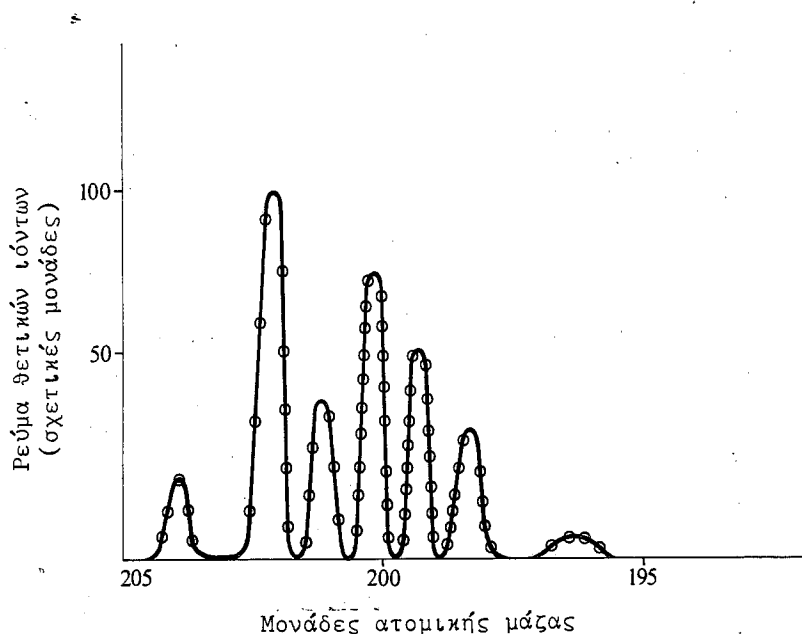
(α)



(β)

Σχήμα 10.3a,b. Φωτογραφίες της Γραμμής 185nm του Hg για φυσικό (α) και μονοισοτοπικό Hg (β).

ώστε οι μετρήσεις να γίνονται **σχετικές** συγκρίνοντας τη μετατόπιση της γραμμής ενός αγνώστου στοιχείου με εκείνη του προτύπου, όπως αποτυπώνονται στην φωτογραφική πλάκα. Για λόγους που δεν θα αναπτύξουμε από το



Σχήμα 10.4. Φάσμα μαζών ισοτόπων υδραργύρου.

1960 και μετά ως πρότυπο ατομικής μάζας έχει καθιερωθεί το ισότοπο του άνθρακα, ^{12}C . Με τεχνικές φασματογράφου μάζας έχει επιτευχθεί μέτρηση ατομικής μάζας ισοτόπων υδρογόνου με τα εξής αποτελέσματα:

$$^1\text{H}: 1.0078247 \pm 0.2 \times 10^{-6} \text{ amu}$$

$$^2\text{D}: 2.0141022 \pm 0.2 \times 10^{-6} \text{ amu}$$

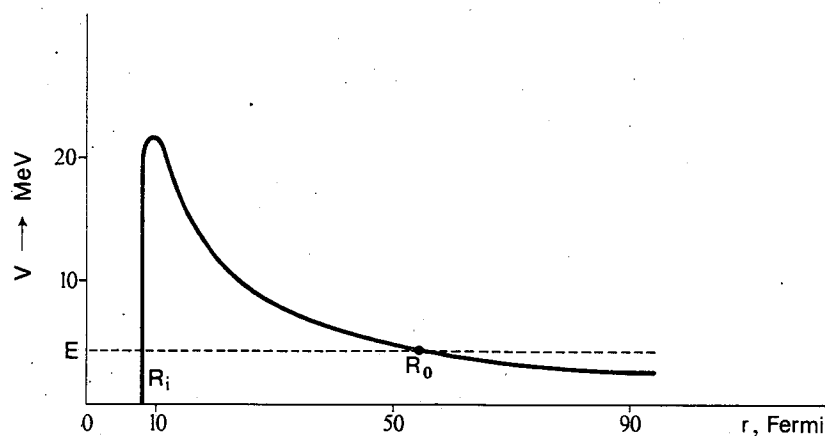
10.2. Ακτινοβολία 'Αλφα

Μέσα στον πυρήνα ενός ατόμου ως γνωστόν έχουμε πρωτόνια και νετρόνια. Είναι τώρα δυνατόν τα στοιχεία ενός ζεύγους πρωτονίου-νετρονίου μέσα στον πυρήνα να συνδυάζονται ώστε με τον προκύπτοντα δεσμό να προκύπτει ένα σωματίδιο άλφα, υπό ορισμένες προϋποθέσεις που επιτρέπουν κάτι τέτοιο. Μια τέτοια διεργασία είναι πολύ πιθανόν να συμβεί δεδομένου ότι ένας τέτοιος δεσμός είναι αρκετά σταθερός. Πράγματι ένα σωματίδιο άλφα μπορεί να προκύψει αν σχηματισθεί διπλά ιονισμένος πυρήνας Ηλίου από τέσσερα άτομα υδρογόνου που έχουν μάζα $4 \times 1.008 \text{ amu}$. Ο προκύπτων πυρήνας Ηλίου έχει μάζα ηρεμίας 4.004 amu . Έτσι σύμφωνα με την ισοδυναμία μάζας και ενέργειας του Einstein ή ενέργεια συνδέσεως στο σωματίδιο άλφα είναι:

$$(4 \times 1.008 - 4.004)c^2 = 0.028c^2 = 0.25 \times 10^{10} \text{ ergs/mole}$$

Επίσης είναι γνωστό ότι σωματίδια άλφα εκπέμπονται από ασταθείς (ραδιενεργούς) πυρήνες. Εξάλλου, οι πυρήνες με ατομικό βάρος διαιρετό με το 4 σχηματίζουν μία ιδιαίτερα κανονική σειρά όσον αφορά την ενέργεια συνδέσεων.

Επίσης είναι ενδιαφέρον να εξηγηθεί ποια είναι εκείνη η δυναμική που επιτρέπει στην τάση δημιουργίας κορεσμένων σχηματισμών νουκλεονίων, δηλαδή συστημάτων με μηδενική στροφορμή, σε συμφωνία με την αρχή του Ραυλί. Έτσι είναι δυνατόν να γίνει κατανοητή η διάσπαση άλφα. Ωστόσο για να δοθεί και μια ποσοτική ερμηνεία πρέπει να παρουσιασθεί ένα θεωρητικό μοντέλο που να δίνει την μορφή του δυναμικού σαν συνάρτηση της απόστασης του σωματιδίου άλφα από τον ραδιενεργό πυρήνα ή όπως φαίνεται στο Σχ. 10.5.



Σχήμα 10.5. Φραγμός δυναμικού σε πυρήνα που συναντά ένα σωματίδιο άλφα σαν συνάρτηση της απόστασης r μεταξύ πυρήνα-σωματιδίου άλφα.

Το σχήμα αυτό αποτελεί συγκρασμό των πειραματικών δεδομένων με μοντέλο ραδιενέργειας άλφα.

Πειραματικά δεδομένα που βοήθησαν στην ανάπτυξη του μοντέλου αυτού

δίνονται από τους G. Igo et al*. Βρήκαν ότι τα πειραματικά δεδομένα είναι συνεπή με μια δυναμική ενέργεια σαν συνάρτηση της απόστασης από τον πυρήνα που για μεγάλες αποστάσεις περιγράφεται από το παραπάνω Σχήμα. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στο Σχήμα αυτό δίνεται από την εξίσωση

$$V(r) = \frac{\alpha_1 Z}{r} - \alpha_2 \exp \left[- \frac{r - \alpha_3 H^{1/3}}{a_4} \right] \text{ MeV (i)}$$

όπου $Z=2$ και α_i , $i=1$ ως 4 είναι παράμετροι που προσαρμόζονται έτσι ώστε τα πειραματικά δεδομένα σκέδασης να συμπίπτουν με τις θεωρητικές προβλέψεις της πιο πάνω συνάρτησης δυναμικού. Η πιο πάνω εξίσωση ισχύει για r μεγαλύτερο της λεγόμενης ακτίνας του πυρήνα R_1 .

10.3. Δευτέριο: Πειραματικά δεδομένα

Η ενέργεια σύνδεσης του Δευτερίου είναι 2.225 MeV. Αυτό προκύπτει από μια σειρά από ανεξάρτητες μετρήσεις. Μια μέθοδος συνίσταται στην μέτρηση της ενέργειας της ακτίνας γάμμα που εκπέμπεται όταν ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο συνδυάζονται για να σχηματίσουν ένα πυρήνα Δευτερίου (σύλληψη $n-p$).

Η άλλη μέθοδος συνίσταται στην μέτρηση της ενέργειας ακτίνας γάμμα που απαιτείται για τη διάσπαση ενός πυρήνα Δευτερίου σε πρωτόνιο και νετρόνιο (φωτοδιάσπαση). Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε φαίνεται στο Σχήμα 10.6.

Ο κρύσταλλος κ έχει λυγισθεί έτσι ώστε όπως αποδεικνύεται ακτίνες γ που έχουν συγκεκριμένη ενέργεια, όταν σκεδάζονται κατά Bragg ώστε να δίνουν την ανάκλαση πρώτης τάξης, εστιάζονται στο ίδιο σημείο A . Αυτό φαίνεται παραστατικά στο Σχ. 10.7.

Η όλη συσκευή μπορεί να στρέφεται γύρω από έναν άξονα που περνάει από το κέντρο του κρυστάλλου. Έτσι παίρνουμε μια άλλη έκθεση κατά την οποία έχουμε εστίαση της πρώτης τάξης περίθλασης στο σημείο A' . Αποδεικνύεται τότε ότι

$$\theta = \frac{AA'}{4R}$$

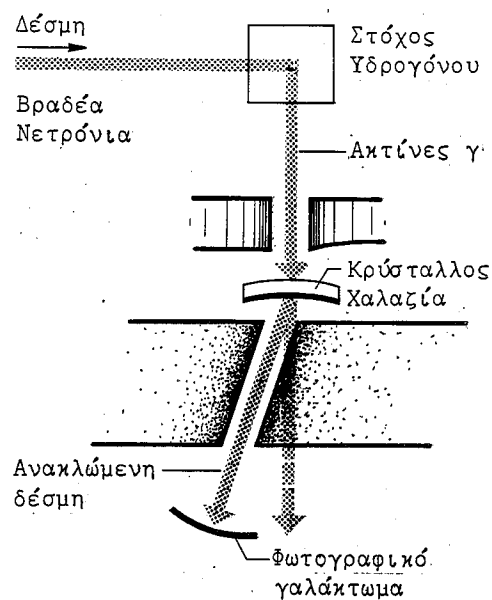
*G. Igo, Phys. Rev. Letters 1, 72 (1958).

Μετρώντας το AA' και από τη σχέση Bragg:

$$2d\sin\theta = n\lambda$$

μπορούμε να προσδιορίσουμε το λ , δηλαδή την ενέργεια της ακτίνας γάμα από τη σχέση

$$E = \frac{hc}{e\lambda}$$



Σχήμα 10.6. Πείραμα σύλληψης Νετρονίου-Πρωτονίου Πειραματική διάταξη σε πυρηνικό αντιδραστήρα.

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων πάνω σε φωτογραφικό φιλμ έχουν τη μορφή του Σχ. 10.9.

Έτσι προκύπτει $(AA')_1 = 12.1406 \text{ cm}$ για $e^+e^- \leftrightarrow \gamma$

$(AA')_2 = 2.7890 \text{ "}$ για n-p σύλληψη

Αν γράψουμε

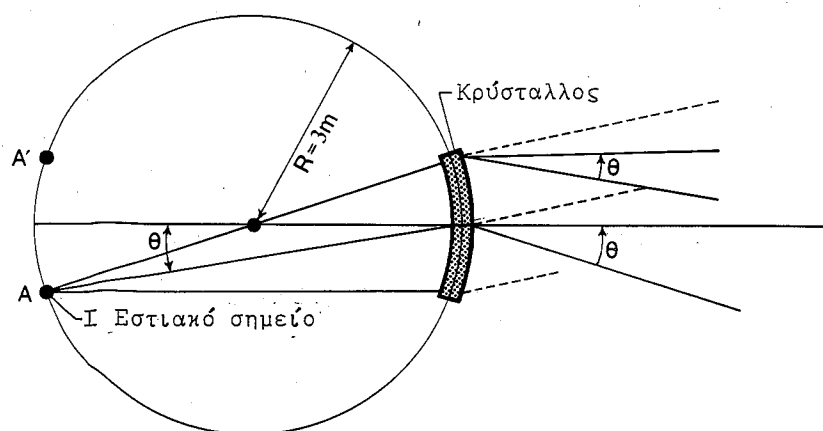
$$\frac{(AA')_1}{(AA')_2} = \frac{E_\gamma}{0.511007\text{MeV}}$$

Τότε προκύπτει

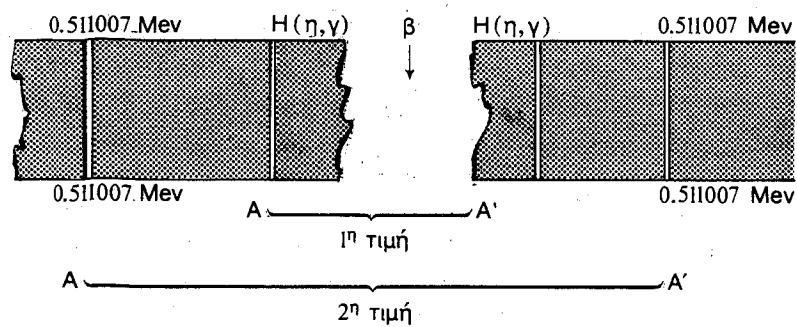
$$E_{\gamma} = 2.2244 \text{ MeV}$$

Η τιμή

$$E_1 = 0.511007 \text{ MeV}$$



Σχήμα 10.7. Λειτουργία εστίασης από τον κεκαμένο κρύσταλλο.



Σχήμα 10.8. Σχηματική παράσταση μορφής του φωτογραφικού φιλμ που προκύπτει από το πείραμα μέτρησης ακτίνων γ με κεκαμένο κρύσταλλο.

έχει προκύψει με ακρίβεια από άλλα πειράματα και συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σχετική βαθμονόμηση της διάταξης.

Άσκηση: Να βρείτε την ενέργεια ανάκρουσης του πυρήνα του D (δευτερίου) κατά την εκπομπή της ακτίνας γ .

Λύση: Επειδή κατά τον σχηματισμό του D από την σύλληψη του n από το p του στόχου με μηδενική κινητική ενέργεια, μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της διατήρησης της ορμής, πριν και μετά την εκπομπή ακτίνας γ :

$$P_{\text{πριν}} = 0 = P_D - P_\gamma \rightarrow |P_D| = |P_\gamma| = E_\gamma/c$$

Άρα

$$E_D = \frac{P_D^2}{2m} = \frac{E_\gamma^2}{2c^2m} = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ MeV} = 1.3 \text{ KeV}$$

Με εφαρμογή της μικρής αυτής διόρθωσης στην ενέργεια της ακτίνας γ που παρατηρήθηκε, προκύπτει

$$E_{\text{σύνδεσης}} = (2.2244 + 0.0013) \text{ MeV} = 2.2256 \text{ MeV}$$

10.4. Εξάρτηση Πυρηνικών Δυνάμεων από το Spin

Οι μετρήσεις έδειξαν ότι στη θεμελιώδη κατάσταση του πυρήνα του Δευτερίου υπάρχει ολική στροφορμή $J=1$. Άρα τα σπιν των δύο νουκλεονίων φαίνεται να είναι παράλληλα και έτσι να σχηματίζουν όπως λέμε μία κατάσταση **τριπλέτας**.

Στην φασματοσκοπική ορολογία αυτό συμβολίζεται με 3S_1 .

Αν οι πυρηνικές δυνάμεις ήταν ανεξάρτητες του spin, θα έπρεπε να περιμέναμε να παρατηρήσουμε μια κατάσταση "singlet", S_0 , με την ίδια ενέργεια. Κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται. Στην πραγματικότητα, δεν έχει παρατηρηθεί δέσμια κατάσταση με $J=0$, μέσα στο δευτέριο! Τούτο σημαίνει ότι οι δυνάμεις πρωτονίου-νετρονίου είναι ισχυρότερες όταν τα σπιν είναι παράλληλα, παρά όταν αυτά είναι αντιπαράλληλα. Τούτο δεν σημαίνει ωστόσο ότι η δύναμη για σπιν αντιπαράλληλα (ή singlet state) είναι μηδέν.

Θεωρητική Μελέτη Πυρήνα Δευτερίου

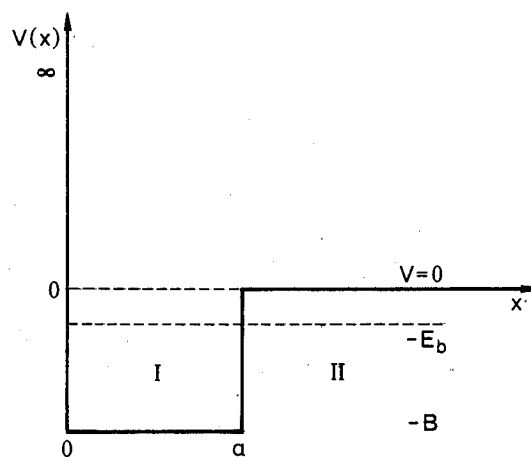
Στο εδάφιο αυτό θα κάνουμε μία πρώτη προσεγγιστική γνωριμία με τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Η γνωριμία αυτή θα είναι αρκετά απλοϊκή και σκοπό θα έχει να εξηγήσει πως οι ιδέες της κβαντικής φυσικής που ήδη εκθέσαμε μπορούν ποιοτικά τουλάχιστον να εξηγήσουν φαινόμενα και του ατομικού **πυρήνα**. Θα παρουσιάσουμε λοιπόν ένα απλό μοντέλο του πυρήνα του Δευτερίου, του ατόμου δηλαδή του υδρογόνου που έχει ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο.

Μερικές από τις αλληλεπιδράσεις νετρονίου-πρωτονίου μέσα στο δευτέριο μπορούν να αναπαραχθούν σωστά με το απλό μονοδιάστατο δυναμικό του Σχήματος 10.9, όπου x είναι η απόσταση μεταξύ των δύο νουκλεονίων.

Ας βρούμε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν το εύρος a και το βάθος, του δυναμικού αυτού για να υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις του συστήματος πρωτονίου-νετρονίου.

Χωρίζουμε την περιοχή από 0 έως ∞ ότι περιοχές I και II, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Στην περιοχή I η εξίσωση του Schrodinger παίρνει την μορφή:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_I(x) - B\Psi_I(x) = -E_b\Psi_I(x)$$



Σχήμα 10.9. Υπόδειγμα του πυρήνα του δευτερίου.

$$\Psi_I''(x) + \left(\sqrt{\frac{2m(B-E_b)}{\hbar^2}} \right)^2 \Psi_I(x) = 0$$

ή

$$\Psi_I''(x) + k^2 \Psi_I(x) = 0$$

με $k^2 \equiv \frac{2m(B-E_b)}{\hbar^2}$. Λύση είναι της μορφής

$$\Psi_I(x) = A.e^{ikx} + B.e^{-ikx} \quad (10.3)$$

Στην περιοχή II η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi_{II}''(x) + 0 = -E_b \Psi_{II}(x) \quad \text{ή} \quad \Psi_{II}'' - \frac{2mE_b}{\hbar^2} \Psi_{II} = 0$$

ή $\Psi_{II}'' - q^2 \Psi_{II} = 0$, όπου $q^2 \equiv 2mE_b/\hbar^2 > 0$. Λύση είναι της μορφής:

$$\Psi_{II}(x) = C.e^{+qx} + D.e^{-qx} \quad (10.4)$$

Εφαρμόζουμε τις **συνοριακές συνθήκες** ως εξής: πρώτον για τις θέσεις $x \leq 0$ είναι $V = \infty$, άρα η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται. Έτσι προκύπτει

$$\Psi(x)_{x=0} = A+B = 0, \quad \text{άρα} \quad A = -B, \quad \text{συνεπώς} \quad \Psi_I(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx})$$

ή

$$\Psi_I(x) = 2A \sin kx, \quad 0 < x \leq a$$

Για x τείνον στο ∞ , πρέπει η κυματοσυνάρτηση να είναι πεπερασμένη, άρα ο συντελεστής C του όρου Ce^{qx} πρέπει να είναι μηδέν. Συνεπώς,

$$\Psi_{II}(x) = D.e^{-qx}, \quad x \geq a \quad (10.5)$$

Οι συνθήκες συνέχειας για $x=a$, δίνουν:

$$\begin{aligned} 2A \sin ka &= D.e^{-qa} \\ 2Aik \cos ka &= -Dqe^{-qa} \end{aligned} \quad (10.6)$$

Διατηρώντας τις σχέσεις αυτές, παίρνουμε:

$$\cot ka = -\frac{q}{k}$$

ή

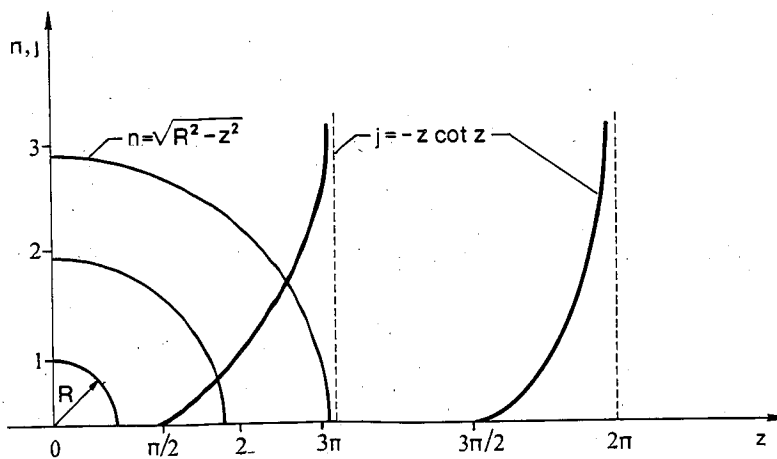
$$\frac{\sqrt{2m(B-E_b)}}{\hbar} \cot\left(a \frac{\sqrt{2m(B-E_b)}}{\hbar}\right) = -\frac{\sqrt{2mE_b}}{\hbar} \quad (10.6a)$$

Η εξ. (10.6a) είναι υπερβατική εξίσωση. Βάζοντας $z \equiv a \frac{\sqrt{2m(B-E_b)}}{\hbar}$, (12)

προκύπτει:

$$-z \cot z = \sqrt{R^2 - z^2}, \text{ όπου } R^2 \equiv 2mBa^2/\hbar^2 \quad (10.7)$$

Για $E < 0$, πρέπει η καμπύλη $J = -z \cot z$ να τέμνει το τεταρτημόριο της περιφέρειας κύκλου με ακτίνα R όπως φαίνεται στο Σχ. 10.10. Επειδή η συνάρτηση $\cot z$ μηδενίζεται στα σημεία $z = \pi/2, 3\pi/2$ κλπ.



Σχήμα 10.10. Γραφική παράσταση των δύο ακελών της υπερβατικής εξίσωσης για την επίλυση του απλουστευμένου δυναμικού του πυρήνα του δευτερίου.

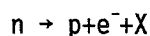
Από τα σημεία τομής προκύπτουν οι ενεργειακές στάθμες των διαφόρων στασιμών (δέσμιων) καταστάσεων του πυρήνα του Δευτερίου. Ένα αβίαστο

συμπέρασμα είναι ότι ο πυρήνας έχει **διάκριτο** ενεργειακό φάσμα. Τούτο επαληθεύεται και πειραματικά αφού είναι δυνατόν να γίνονται ενεργειακές μεταπτώσεις από μια ενεργειακή κατάσταση σε άλλη και μας στέλνουν φωτόνια πολύ μονοχρωματικά που μπορούμε να τα επισημάνουμε και να μετρήσουμε την ενέργεια τους. Έτσι γίνεται η αμφίδρομη συνεργασία μεταξύ θεωρίας και πειράματος που τελικά οδηγεί στην βαθύτερη κατανόηση της Φύσης.

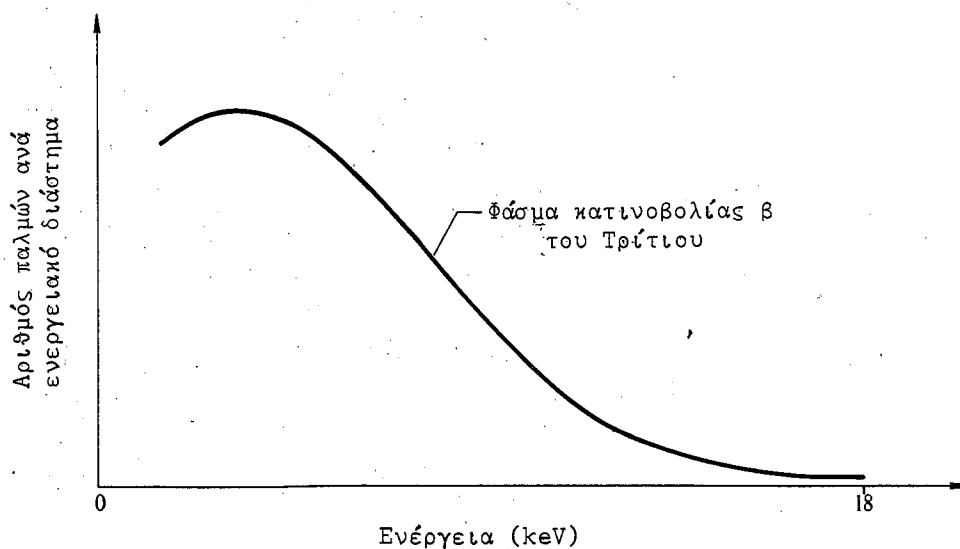
10.6. Εκπομπή ακτινοβολίας βήτα

Η ακτινοβολία β που προκύπτει από διάσπαση νετρονίου συνοδεύεται από μεταβολή του ατομικού αριθμού ενός πυρήνα κατά +1, πράγμα που σημαίνει ότι μπορεί τουλάχιστον νοητά να θεωρηθεί ότι μέσα στον πυρήνα, ταυτόχρονα με την εκδίωξη ενός σωματιδίου β, έχουμε μετατροπή ενός νετρονίου σε πρωτόνιο.

Άρα η αλληλεπίδραση που αντιστοιχεί στην εκπομπή β από ραδιενεργό πυρήνα μπορεί να γραφεί:



όπου το χ μπορεί να αντιστοιχεί σε μια ποσότητα (ενέργεια ή μάζα), η τιμή της οποίας πρέπει να προσδιορισθεί από το πείραμα ώστε να ικανοποιούνται



Σχήμα 10.11. Φάσμα ακτινοβολίας β από στοιχείο τρίτιο. Παρατηρούμε ότι το φάσμα της ενέργειας έχει ένα ανώτατο όριο.

οι αρχές διατήρησης ενέργειας και ορμής. Τα πειραματικά αποτελέσματα της εκπομπής ακτινοβολίας β φαίνονται στο Σχήμα 10.11.

Γιατί είναι το φάσμα αυτό συνεχές; Τότε με την εκπομπή σωματιδίων β με τέτοιες ενέργειες, ο πυρήνας δεν μπορεί να παραμένει σαν συγκεκριμένη δομή με ορισμένη ενέργεια. Όμως όλα τα πειράματα που γίνονται σε αποδιεγερμένους πυρήνες, αότου φτωχαίνουν κατά ένα ηλεκτρόνιο με την ακτινοβολία β , βρίσκουν ότι αυτοί έχουν την ίδια ενέργεια. Η μόνη λογική διέξοδος από αυτό το αίνιγμα είναι ότι κατά τη διάρκεια της διάσπασης β , κάτι συμβαίνει ώστε να δικαιολογεί αυτή την έλλειψη ενέργειας, στα προϊόντα της διάσπασης.

Όπως αποδεικνύεται πειραματικά, η υπόλοιπη ενέργεια φαίνεται να χάνεται διότι στην πραγματικότητα απάγεται με ένα εξαιρετικά περίεργο σωματίδιο, προϊόν, της διάσπασης, που ονομάστηκε νεutrίνο (ν). Το πιο πιθανό είναι ότι η μάζα ηρεμίας του νεutrίνο είναι ίση με μηδέν. Η ως τώρα πειραματική μαρτυρία δίνει ένα ανώτατο όριο μάζας του νεutrίνο της τάξης των μερικών ηλεκτρονικών βολτ.

Η σημασία του νεutrίνο για την κατανόηση των αλληλεπιδράσεων των στοιχειωδών σωματιδίων είναι τεράστια.

Μια πρώτη θεωρητική προσέγγιση του φαινομένου της διάσπασης β έγινε από τον Fermi. Για να υπολογισθεί η πιθανότητα μετάπτωσης ανά μονάδα χρόνου πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον γενικό τύπο

$$P_{if} = \frac{4\pi^2}{f^2} |H'_{if}|^2 \rho_f(w)$$

(σελ. 153, κεφ.5, του Born).

10.7. Στατιστική Ερμηνεία της Κβαντομηχανικής

Συχνά μελετάμε για την κατανομή πυκνότητας των ηλεκτρονίων ή ενός ηλεκτρονικού νέφους γύρω από τον πυρήνα. Αυτό σημαίνει ότι την κατανομή του φορτίου που προκύπτει όταν πολλαπλασιάζουμε την πυκνότητα πιθανότητας $|\psi_n|^2$ μιας ιδιοκατάστασης επί το φορτίο e του ηλεκτρονίου. Από την άποψη στατιστικής ερμηνείας των αποτελεσμάτων.

Τώρα σε αναλογία με την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $\psi_n^* \psi_n$ μιας ιδιοκατάστασης, μπορούμε να σχηματίσουμε, με έναν φορμαλιστικό τρόπο, την πυκνότητα μετάπτωσης $\psi_n^* \psi_m$ που αντιστοιχεί στη μετάπτωση από μια κατάσταση n σε κατάσταση m . Αυτό αντιστοιχεί στα "φαινόμενα διακροτήματος", τα

οποία συμβαίνουν όταν υπερτίθεται δύο ταλαντώσεις με συγκεκριμένες κοντινές συχνότητες. Ο ρυθμός της συχνότητάς της δίνεται από τον χρονικό παράγοντα

$$\exp [-(i2\pi/h)(E_n - E_m)t]$$

Γενικά, σύμφωνα με την μηχανική πινάκων του Heisenberg, η πυκνότητα μετάπτωσης δίνεται από το στοιχείο πίνακα a_{mn} που υπολογίζεται σαν

$$\int \Psi_n^* \hat{H}_{inter} \Psi_m dr, \text{ όπου } \hat{H}_{inter}$$

είναι ο όρος της Hamiltonian που είναι υπεύθυνος για την μετάπτωση. Π.χ. στην διπολική μετάπτωση (η οποία μπορεί να οφείλεται σε επίδραση ενός προσπίπτοντος ηλεκτρομαγνητικού κύματος), η διπολική ροπή που σχετίζεται με τη μετάπτωση είναι:

$$e \int \Psi_n^* \hat{r} \Psi_m dr$$

Η μέθοδος για τον υπολογισμό της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από άτομα μπορεί να υπολογισθεί πιο αυστηρά. Ο τύπος που προκύπτει γενικότερα είναι

$$P_{nm} = \frac{2\pi}{h^2} |H'_{nm}|^2 \rho(\epsilon)$$

όπου H'_{nm} είναι το στοιχείο πίνακος της ενέργειας σύζευξης μεταξύ των δύο ενεργειακών καταστάσεων.

Στην περίπτωση της διάσπασης β' , αν η αρχική κατάσταση είναι i , και η τελική f , η πιθανότητα μετάπτωσης δίνεται από

$$P_{if} = \frac{4\pi^2}{h} |H'_{if}| \rho_f(w)$$

Το w σημαίνει την διαφορά ενέργειας μεταξύ των καταστάσεων i και f . Το σύστημα αποτελείται από 2 μέρη.

Το μέρος (1) έχει διακριτό ενεργειακό φάσμα. Το μέρος (2) έχει συνεχές με πυκνότητα ρ .

Τώρα η αρχή διατήρησης της ενέργειας δίνει $W = E_e + E_\nu$, δηλαδή λόγω της μετάπτωσης $i \rightarrow f$, η ενέργεια που εκλύεται γίνεται ενέργεια νιτρίνου και ενέργεια ηλεκτρονίου.

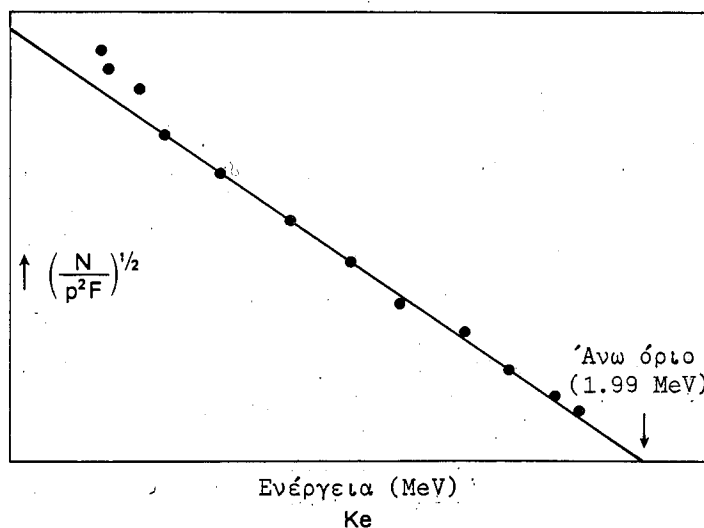
Ακριβέστερα, γράφουμε

$$dP_{if} = \frac{4\pi^2}{h} |H'_{if}| \rho_f(w, E_e) dE_e$$

με

$$\int_0^{\infty} P_f(w, E_e) dE_e = \rho_f(w)$$

Η γραφική παράσταση της ποσότητας $\sqrt{N}/(\rho^2 F)$ σαν συνάρτηση της ποσότητας E , πρέπει να δώσει μία ευθεία γραμμή. Στο Σχ. 10.12 φαίνεται πως ποιοτικά παρουσιάζονται τα πειραματικά σημεία. Το διάγραμμα αυτό λέγεται διάγραμμα Curie. Το συγκεκριμένο στοιχείο ήταν ^{114}In (Lawson & Cork, 1940 Rev. Mod. Physics).



Σχήμα 10.12. Πειραματικά δεδομένα διαγράμματος Curie σε ^{114}In .

Από τα δεδομένα προκύπτει η ολική πιθανότητα διάσπασης (το αντίστροφο του μέσου χρόνου ζωής):

$$\frac{1}{t} = \sum P_{if} = \int_1^w P(\epsilon, w) d\epsilon = C^2 f(w)$$

$$\text{όπου } f(w) = \int_1^w t(w-t)^2 \sqrt{t^2-1} dt .$$

Κατόπιν κάπως πολύπλοκου υπολογισμού, προκύπτει, αν $\epsilon \equiv E_e/m_e c^2$, $w \equiv W/m_e c^2$

$$dP_{if} \equiv P(w, \epsilon) d\epsilon, \quad \mu = m_e/m_e$$

$$P(w, \epsilon) = C^2 \epsilon (w-\epsilon) \sqrt{\epsilon^2-1} \sqrt{(w-\epsilon)^2-\mu^2}$$

όπου

$$C^2 = \frac{m_e c^2}{h} \left(\frac{8\pi^2 g m_e^2 c}{h^3} \right) |M_{ij}|^2$$

(με $h_{if}' \equiv g M_{if}/V$).

Το g ονομάζεται σταθερά σύζευξης και προσδιορίζεται με σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.

Η σύγκριση με δεδομένα έδειξε ότι αυτά είναι σύμφωνα με $m_e=0$.

Έτσι το τέλος του φάσματος είναι $t_m=w$ και συνεπώς το P έχει τη μορφή

$$P(w, \epsilon) = C^2 \epsilon (w-\epsilon)^2 \sqrt{\epsilon^2-1}$$

τελικώς, αν

$$F(\epsilon, w) \equiv \sqrt{\frac{P(\epsilon, w)}{\epsilon \sqrt{\epsilon^2-1}}}$$

τότε προκύπτει

$$F(\epsilon, w) \propto (w-\epsilon)$$

Η εμπειρική αυτή καμπύλη λέγεται Curie plot και είναι ευθεία γραμμή.

Πίνακας Περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	Σελίδα
Εισαγωγή	1
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΑΡΤΥΡΙΕΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ	3
1.1 Μοντέλο Ράδερφορντ	3
1.2 Σκέδαση σωματιδίου από κεντρικό δυναμικό -Σκέδαση Ράδερφορντ	4
Ενεργός διατομή σκέδασης	5
ΑΣΚΗΣΗ 1. Άλλος τρόπος εξαγωγής της σχέσης (1.5) της σκέδασης Ράδερφορντ	12
ΑΣΚΗΣΗ 2. Συσκευή για εργαστηριακή μελέτη σκέδασης Ράδερφορντ	13
1.3.1 Προσδιορισμός του λόγου e/m του ηλεκτρο- νίου	13
1.3.2 Κίνηση σε ηλεκτρικό πεδίο-Οπτική Ηλεκτρονίων	16
1.3.3 Φασματοσκοπία μαζών	19
1.3.4 - Φάσμα του Ατόμου του Υδρογόνου - Συνθήκες του Bohr	21
1.3.5 Γραμμικά Φάσματα Πυρήνων	25
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - Ενδείξεις κβαντικής συμπεριφοράς από την στατιστική της θερμικής ακτινοβολίας	29
2.1 Συστήματα από τεράστιο αριθμό σωματιδίων: Στατιστική Μηχανική	29
2.2 Ο νόμος της κατανομής των Maxwell-Boltzman	32
2.3 Θερμική ακτινοβολία και η Αρχή της κβαντικής θεωρίας	33
2.4 θεωρία των Rayleigh-Jeans	35
2.5 Υπολογισμός της ενέργειας ανά διάστημα συχνότητων	36
2.6 θεωρία του Planck	38

2.7	Υπολογισμός της συνάρτησης φασματικής κατανομής $w(\lambda)$ με βάση την υπόθεση Planck	40
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2	43
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΑΣΜΑΤΟΣΚΟΠΙΑΣ	47
3.1	Οπτική Φασματοσκοπία-Φασματόμετρα	47
3.2	Φασματόμετρο Czerny-Turner	49
3.3	Φασματόμετρο Ebert-Fastie	49
3.4	Συμβολόμετρα-Βασικές έννοιες	51
3.5	Πλεονεκτήματα Συμβολομέτρων	52
3.6	Το συμβολόμετρο του Michelson	52
3.7	Συμβολόμετρο Fabry-Perot- Μελέτη εύρους φασματικών γραμμών	57
3.8	Συμφωνία- Lasers	64
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3	66
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ	69
4.1	Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο	69
4.2	Προσπάθεια εξήγησης φωτοηλεκτρικού φαινομένου με την κλασική άποψη	72
4.3	Κβαντική ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου	73
4.4	Εφαρμογές του φωτοηλεκτρικού φαινομένου	76
4.5	Εφαρμογές του φωτοηλεκτρικού φαινομένου στη φωτογραφία	78
4.6	Φαινόμενο Compton	80
4.6.1	Φαινομενολογική εξήγηση του φαινομένου από τον Compton	84
4.7	Κλασική ερμηνεία του φαινομένου Compton	85

4.8	Κβαντική Ερμηνεία του Φαινομένου Compton	87
4.9	Αποτυχία της Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας	89
4.10	Το άτομο του Υδρογόνου σαν πηγή διάκριτου φάσματος . Θεωρία του Bohr	90
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4	95
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΥΛΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ	96
5.1	Πείραμα Davisson-Germer -Αρχή de Broglie	96
5.2	Πρόσθετες εκδηλώσεις της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων	98
5.3	Κυματομηχανική - Αρχή του de Broglie	101
5.4	Διερεύνηση της συνθήκης περίθλασης	102
5.5	Πείραμα:Επαλήθευση από τον (την) σπουδα-στη(στρια) της αρχής του De Broglie στο εργαστήριο	103
	Φωταύγεια	105
	Βασικές Αρχές Φωταύγειας	106
5.6	Κυματοπακέτα και κυματοπακέτα σωματιδίων	108
5.7	Ασυνέπεια μεταξύ κυματικής και σωματιδικής θεωρίας , και η αντιμετώπισή της γενικής περίπτωσης σωματιδίων στο μικρόκοσμο	111
5.8	Αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg	112
	Πείραμα: Μέτρηση ενεργειακών σταθμών στο άτομο	114
5.9	Μηχανική Πινάκων . Εναλλακτική περιγραφή κβαντικών φαινομένων	115
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5	117
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ	119
6.1	Κυματική Εξίσωση για την Κβαντική συμπεριφορά υλικών σωματιδίων. Εξίσωση Schrodinger.	119

6.2	Εξίσωση Schrodinger για ελεύθερο σωματίδιο	121
6.3	Κυματική εξίσωση για σωματίδιο σε πεδίο δυνάμεων	122
6.4	Ιδιότητες της εξίσωσης του Schrodinger	128
6.5	Επίλυση της εξίσωσης του Schrodinger σε τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού απείρου βάθους	129
6.6	Μονοδιάστατο τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού	134
6.7	Μελέτη συντελεστή ανάκλασης και διάδοσης υλικών κυμάτων	142
6.8	Στάσιμες καταστάσεις	144
6.9	Γενίκευση του προβλήματος φραγμού δυναμικού σε περίπτωση συνεχώς μεταβαλλόμενου δυναμικού.	148
6.10	Πρόβλημα του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή στην κβαντομηχανική (μονοδιάστατη περίπτωση)	152
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6	156
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 - ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ	162
7.1	Θεωρία Χρονικά Ανεξάρτητων Διαταραχών	162
7.2	Η προσέγγιση Born	164
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ	168
8.1	Ιονικοί και Ομοιοπολικοί Κρύσταλλοι	170
8.2	Κυματα Bloch	171
8.3	Μοντέλο Κρυστάλλου Kronig-Penney	174
	Ενεργός Μάζα	179
8.4	Τεχνικές υπερδομές ημιαγωγών και δομές κβαντικών πηγαδιών	182

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9- ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΜΟΡΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ	186
9.1 Ερμηνεία μακροσκοπικών ιδιοτήτων σωμάτων - Φαινόμενο Zeeman	186
- Στροφορμή	190
- Ατομο του Υδρογόνου	192
9.3 Μαγνητικές Ροπές , Σπιν	194
9.4 Εφαρμογές του φαινομένου Zeeman στη μέτρηση αστρικών μαγνητικών πεδίων	199
9.5 Επίδραση φαινομένου Zeeman σε αστρικά φάσματα	200
9.6 Το μόριο του Υδρογόνου	201
9.7 Ατομα με πολλά ηλεκτρόνια	205
- Η αρχή του Pauli	205
9.8 Υπεραγωγιμότητα	208
- Υπεραγωγοί με υψηλό Tc	212
- Επίδειξη υπεραγωγιμότητας	214
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 9	216
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 - ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ	218
10.2 Ακτινοβολία Αλφα	221
10.3 Δευτέριο: Πειραματικά δεδομένα	223
10.4 Εξάρτηση Πυρηνικών δυνάμεων από το Spin	226
10.5 Θεωρητική μελέτη πυρήνα Δευτερίου	228
10.6 Εκπομπή ακτινοβολίας βήτα	230
10.7 Στατιστική ερμηνεία της Κβαντομηχανικής	231
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΦΑΛΑΙΟΥ 10	235

Ασκήσεις (Πυρηνική Φυσική)

1. Υπολογίστε την πλησιέστερη απόσταση 10 MeV σωματιδίων άλφα σε πυρήνα σιδήρου.
2. Η μάζα του σωματιδίου άλφα είναι 4.002602 amu, του πρωτονίου 1.007825 amu, και η μάζα του νετρονίου =1.008665 amu. Να υπολογίσετε την ενέργεια σύνδεσης του σωματιδίου άλφα (1 amu = 932 MeV).
3. Δέσμη σωματιδίων άλφα με ενέργεια 400 MeV εισέρχεται σε περιοχή μαγνητικού πεδίου έντασης 800 Gauss. Να βρεθεί η ακτίνα της τροχιάς των σωματιδίων της δέσμης.
4. Υπολογίστε προσεγγιστικά την πυκνότητα μάζας στο εσωτερικό του πυρήνα.
5. Ασταθείς πυρήνες, με ρυθμό διάσπασης R, παράγονται με ρυθμό I σε πυρηνικές αντιδράσεις. Αν η διεργασία παραγωγής αρχίζει στο χρόνο $t=0$, να υπολογίσετε τον αριθμό των πυρήνων που θα είναι παρόντες στο χρόνο $t=t_1$, (Απαντ. $(1-e^{-Rt_1})I/R$).